Lehrgang

des

Rechenunterrichts

mit

gleichmäßiger Berücksichtigung

des

Kopf- und Zifferrechnens

von

Joh. Fr. Heuner.

Vierte vermehrte Auflage.

Mittelst h. Minist.-Rescr. vom 14. Dezember 1859 wurde **Heuner's** Lehrgang des Rechenunterrichts nebst den dazu gehörigen Aufgabenheften für alle bayer. Schulen zum Gebrauche empfohlen.

Mit einer Figurentafel.

Ansbach.

Verlag der Fr. Seybold'schen Buchhandlung.

1864.

Druck von C. Brügel und Sohn.

Aus der Vorrede zur zweiten Auflage.

Der in der Vorrede zur ersten Auflage dieses Buches ausgesprochene Wunsch, daß dasselbe freundlich aufgenommen werden möge, hat sich erfüllt. Die mir zugekommenen Beurtheilungen in öffentlichen Blättern waren so günstig, daß sie meine bescheidene Erwartung weit übertrafen. Auch hatte der Lehrgang, gleich meinem schon früher erschienenen Werkchen für das Kopf- oder Denkrechnen, das besondere Glück, alsbald nach seinem Erscheinen in mehreren bayerischen Schullehrer-Seminarien eingeführt und im Laufe dieses Jahres von der hohen kgl. Regierung Mittelfrankens für den Präparanden-Unterricht vorgeschrieben zu werden.

Da im ersten Cursus das Zerlegen der Zahlen in gleiche Theile — der Produktzahlen in ihre Faktoren — eine Hauptübung bildet so war es fast unerläßlich, das Multiplikationszeichen, und der Konsequenz wegen auch das Divisionszeichen in der Weise zu gebrauchen, wie es jetzt allenthalben in den Rechenbüchern für deutsche Schulen geschieht, nämlich so, daß Multiplikator und Divisor vor den Zeichen stehen.

Daß nicht Alles, was das Buch bietet, überall durchgenommen werden kann und soll, bedarf kaum bemerkt zu werden. In einem Rechenbuche auch gerade nur so viel zu geben, als für jede einzelne Schule nothwendig sein möchte, ist bei der großen Verschiedenheit derselben durchaus unmöglich. Es muß daher immer dem Lehrer überlassen bleiben, das Wieviel für seine Schule selbst zu bestimmen, zuzugeben und abzubrechen.

Eine große Erleichterung gewähren übrigens die zu diesem Lehrbuche gehörigen 3 Aufgabenhefte zum Zifferrechnen. Sie sind für die Hand der Schüler und haben den Zweck, dem Lehrer das lästige und zeitraubende Aufgabendiktiren zu ersparen und dem Schüler Gelegenheit zu geben, sich auch zu Hause zu üben.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die bereits in sechs d. i. in dem größeren Theile der bayerischen Schullehrer-Seminarien stattgefundene Einführung des Buch's machte es uns zur Pflicht, bei dieser Ausgabe einige nicht unerhebliche Veränderungen vorzunehmen. Sollte dasselbe nämlich bei dem Unterrichte für künftige Lehrer ausreichend sein und diese zugleich in die methodische Behandlung des Gegenstandes gründlich einführen; so war nach unserm Dafürhalten der Rahmen bezüglich des Lehrstoffes zu erweitern, das Objekt hie und da tiefer zu erfassen, Manches mehr zu gliedern und übersichtlicher zu ordnen, die sachliche Beurtheilung der angewandten Aufgaben durch Beleuchtung der entsprechenden Lebensverhältnisse zu erleichtern und das unterrichtliche Verfahren auf allen Stufen vollständiger anzugeben. Das ist denn auch nach Kräften geschehen. Dem seinem Berufe entgegenreifenden Jünglinge zur Herrschaft über den Gegenstand zu verhelfen, seine Neigung dafür zu gewinnen und ihn zu befähigen, einst selbst mit Geschick und Erfolg darin zu unterrichten, war überall Zweck und Ziel. Möchten wir uns der Erreichung desselben freuen dürfen!

Uebrigens glauben wir, daß das Buch, so wie es jetzt ist, einer Umarbeitung nicht mehr bedürfen werde.

Ansbach, den 28. März 1862.

Vorrede zur vierten Auflage.

Die gegenwärtige Auflage unterscheidet sich von der vorigen, im Ganzen genommen, sehr wenig. Nur der erste Cursus hat eine auf die Zahlen von Eins bis Fünf sich erstreckende Abänderung und der siebente Cursus eine die Lehre von den Quadrat- und Kubikzahlen und deren Wurzeln in sich begreifende Erweiterung erfahren, beides auf mehrfach geäußerten Wunsch. Im Uebrigen ist die vierte Auflage der dritten völlig gleichlautend. Der Gebrauch der beiden Ausgaben nebeneinander ist daher in Anstalten, wo das Buch als Lehrbuch bereits eingeführt ist, nicht im mindesten erschwert.

Ansbach, den 1. November 1864.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Erster Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Hundert.

Zweiter Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Tausend.

Dritter Cursus.

Der Zahlenraum von unbegränzter Ausdehnung.

Seite

Sechster Cursus.

Verhältnißrechnungen.

Erste Abtheilung. Verhältnißbestimmungen.

Seite

Siebenter Cursus.

Erster Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Hundert.

Vorbemerkung.

Die Zahlen von Eins bis Hundert liegen vor allen übrigen Zahlen der Anschauung offen und werden im Leben am häufigsten angewendet. Darum und weil das Rechnen mit ihnen die Grundlage zu allem Rechnen bildet; so können und müssen sie unter allen Zahlen am gründlichsten behandelt werden. Der Schüler muß von jeder derselben eine möglichst klare und vollständige Kenntniß erhalten. Es ist aber einleuchtend, auch schon vielfach nachgewiesen*), anerkannt und durch die Erfahrung festgestellt, daß die gründliche Kenntniß der Zahl weniger aus der gleichzeitigen Behandlung ganzer Zahlenreihen, als vielmehr aus der allseitigen Betrachtung der einzelnen Zahlen erwächst. Wir sind deßhalb für die letztere Weise, für die individuelle Behandlung der Zahl. Demgemäß durchschreiten wir das Gebiet des ersten Hunderts von Zahl zu Zahl. Am Ende eines Zehners aber findet ein Rückblick, eine Wiederholung statt. Die Uebungen verbreiten sich dann über alle Zahlen desselben, beziehungsweise über den ganzen bis dahin zurückgelegten Zahlenraum.

Nur mit den Zahlen von Eins bis Fünf machen wir eine Ausnahme. Um nämlich das gegen die individuelle Behandlung der Zahl bestehende Bedenken, daß sie im Anfange wegen der fast gleichzeitigen Vorführung sämmtlicher Rechengeschäfte eine besondere Lehrgewandtheit erfordere und die Thätigkeit des Lehrers über Gebühr in Anspruch nehme, zu beseitigen, und um diese Methode, der selbst ihre Gegner zugestehen, daß sie den Charakter eines bildenden Unterrichts habe, einen stufenreichen Fortschritt in sich schließe, die Denkthätigkeit der Kinder sehr

*) Zuerst und am gründlichsten von Grube in seinem Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule.

befördere und allen todten Mechanismus ausschließe, besonders für angehende Lehrer zugänglicher zu machen, so treten wir mit unsern Schülern in das ihnen ohnehin schon einigermaßen bekannte Zahlengebiet von Eins bis Fünf auf einmal ein und benützen dasselbe, um die Anfänger im Rechnen in die verschiedenen Rechenoperationen und die Anfänger im Unterrichten in das dabei einzuschlagende Lehrverfahren einzuführen. Dann erst betrachten wir jede dieser Zahlen auch allseitig für sich und schreiten so von einer Zahl zur andern weiter fort.

Bei Behandlung der einzelnen Zahlen gehen wir übrigens gerade so zu Werk, wie man sich klare Kenntniß von andern Dingen verschafft. Wir fassen zuerst das Ganze ins Auge, sehen dann zu, aus welchen Theilen es besteht und in welchem Verhältniß das Ganze und seine Theile zu einander stehen, und untersuchen hierauf, inwiefern die neue Zahl und die schon bekannten sich von einander unterscheiden.

Mit diesen formalen Zahlenübungen verbinden wir sogleich und so innig als möglich das angewandte Rechnen. Denn soll der Rechenunterricht wirklich theoretisch-praktisch sein, wie man mit Recht verlangt; so muß er es durchweg sein, vom Anfange an und auf jeder Stufe. Ist daher durch die Anschauung ein Zahlenverhältniß aufgefaßt, so wird es sofort auch in einer dem Gesichtskreise des Kindes entsprechenden Weise auf das praktische Leben angewendet.

Am Schlusse jeder Stufe folgen immer Aufgaben verschiedener Art, nämlich Aufgaben, wie sie bereits vorgekommen sind, aber in vermischter Aufeinanderfolge, Aufgaben, worin die gewöhnlich gegebenen Glieder in Frage gestellt erscheinen, und Aufgaben, wodurch die Zahl noch weiter auf die Lebensverhältnisse angewendet wird.

So schreiten also Kenntniß der Zahl, Fertigkeit im Operiren und praktisches Rechnen, in natürlicher Verbindung und sich gegenseitig fördernd, gleichmäßig fort. Der Lehrgang, einfach und konsequent und darum auch von den Schülern unschwer zu erkennen, macht es ihnen möglich, den Lehrstoff selbstthätig zu ergreifen und sich dessen zu bemächtigen. Mit jeder neuen Zahl erweitert sich der Kreis der Vorstellungen des Schülers und mehrt sich sein Besitz. Er fühlt das Wachsthum seiner Kraft. Sein Bewußtsein wird gehoben, seine Lernbegierde gesteigert. Er arbeitet immer mehr aus Lust und Liebe zur Sache. Und dieß, sowie die beständige Abwechslung, welche der Lehrgang in die Thätigkeit der Lernenden bringt, macht, daß sie dieser Beschäftigung nie müde werden.

In Bezug auf das Lehrverfahren sei bemerkt:

1) Bei jeder Uebung werde die Sache auf mannigfache Weise, durch räumlich vorhandene, wie durch zeitlich eintretende Dinge, als: Würfel, Hände, Bücher, Federn, Münzen, Maße, Klänge, Silben, Schritte u. dgl. m. wiederholt zur Anschauung gebracht. Als stereotypes Anschauungsmittel aber sei, nebst den Fingern, Punkten oder Strichen, das sogenannte russische Rechenbrett empfohlen. Aus mehreren Gründen. Das dekadische Zahlensystem baut sich an ihm anschaulich auf; die Zahlen lassen sich daran sehr leicht und schnell umstellen; der Lehrer hat, wenn er sich neben oder hinter dasselbe stellt,

die Schüler beständig vor sich, und deren Augen sind, indem sie sich darauf fixiren, zugleich auf ihn gerichtet. Nur werde dasselbe nicht sogleich mit seinen hundert Kugeln vorgeführt. Der Schüler sehe zuerst nur das Gestell mit den (zehn) leeren Drähten, welche auf beiden Seiten durch den Rahmen gehen, an einem Ende umgebogen und am andern, um sie leicht herausnehmen zu können, mit einer Schraubenmutter versehen sind. Für die Zahl Eins thue man eine Kugel in die oberste Stange, für Zwei 2 Kugeln in die zweite Stange, für Drei 3 Kugeln in die dritte Stange u. s. f. bis Zehn. Ehe man zur Zahl Elf übergeht, nehme man alle Kugeln wieder heraus und thue in die erste oder oberste Stange 10 derselben und in die nächste darunter eine. Bei Zwölf werde dieser einen Kugel eine zweite beigefügt, bei Dreizehn eine dritte u. s. f.

2) Die Veranschaulichung der Zahlen und der Zahlenoperationen ist selbstverständlich zunächst Sache des Lehrers, aber nicht ausschließlich und nicht immer. Vielmehr ist der Schüler so bald als möglich anzuhalten, Theil daran zu nehmen. Es ist dieß das beste Mittel, den Schüler aus seinem mehr oder weniger passiven Verhalten in Selbstthätigkeit zu versetzen und ihn zu befähigen, bei irgend einer Ungewißheit in diesem Bereiche durch Versinnlichung der Sache sich selbst zu helfen.

3) In Allem, was der Schüler vermittelst der äußern Anschauung klar begriffen hat, muß derselbe durch freie Uebung im Kopfe sofort auch fest und sicher werden. Zur deutlichen Einsicht muß Sicherheit und Fertigkeit kommen.

4) Vorstellungen und Begriffe, besonders rein abstrakte, wie die von Zahlen, werden durch einmaliges Auffassen und Einüben noch nicht für immer Eigenthum des Geistes. Werden sie nicht von Zeit zu Zeit wieder aufgefrischt und erneuert; so verbleichen sie nach und nach und verlieren sich endlich völlig. Darum werde fleißig wiederholt, sowohl mit Anschauung, als frei im Kopfe. Gelegenheit dazu bietet sich bei jeder neuen Zahl.

5) Eine besondere Sorgfalt verdient das Rechnen mit der angewandten Zahl, die übrigens mit der blos benannten nicht verwechselt werden darf. Aufgaben, wie:

3 Maas + 2 Maas = ? 3 × 2 Aepfel = ?
5 Ellen — 2 Ellen = ? $^1/_3$ × 6 Kreuzer = ?

sind Aufgaben mit der blos benannten Zahl, man mag die Gegenstände dabei vor sich haben oder nicht. Was mit den gegebenen Zahlen geschehen soll, ist in diesen Fällen angezeigt. Das Geschäft des Rechners besteht allein darin, die bezeichneten Operationen auszuführen.

Anders ist es bei den Aufgaben mit der angewandten Zahl. Dergleichen sind: Eine Bäuerin verkauft zuerst 3 Ms. Milch und dann 2; wie viel im Ganzen? Von 5 Ellen Zeug wurden 3 Ellen verbraucht; wie viel ist noch vorhanden? Für 1 Kreuzer erhalte ich 2 Aepfel; wie viel für 3 Kreuzer? 3 Loth Kaffee kosten 6 Kreuzer; was kostet 1 Loth? — Hier ist nicht angezeigt, was mit den gegebenen Zahlen gethan werden muß, um die verlangte Antwort zu erhalten.

Die mit den Zahlen auszuführenden Operationen sind also in der Aufgabe nicht schon bezeichnet, sondern erst zu entdecken. Und gerade das, nämlich das Auffinden der zum Resultate führenden Operationen, das Auflösen oder Beurtheilen der Aufgabe, ist hier der Schwer- und Angelpunkt in der Berechnung. Der Schüler muß klar und deutlich einsehen, daß man für 3 Kreuzer 3 mal so viel Aepfel bekommt, als für einen, und daß 1 Loth Kaffee nur den dritten Theil so viel kostet, als 3 Loth. Zu dieser Einsicht gelangt derselbe aber wieder nur durch die Anschauung und zwar am leichtesten und sichersten, wenn man sich dabei der realen Dinge selbst bedient. In den Fällen, wo sie nicht zu Handen sind, lasse man ihre Stelle durch ähnliche Dinge, wenigstens durch Zeichnungen an der Wandtafel vertreten.

6) Nie werde in Einem fort so lange gerechnet, bis bei den Kindern eine geistige Abspannung bemerkbar ist. Eine halbe Stunde auf einmal wird für das erste Schuljahr das rechte Zeitmaß sein.

7) Endlich hüte man sich vor dem Fehler, dessen sich besonders eifrige Anfänger gerne schuldig machen: zu eilen, die Schüler vorwärts zu drängen und seine Leistungen nach der Quantität des behandelten Stoffes zu bemessen. Wo das geschieht, da wird nichts recht begriffen und gelernt; da ist kein wohlthätiger Einfluß auf die Entwicklung des kindlichen Geistes; da kommt die rechte Lehr- und Lernfreudigkeit nicht auf, wohl aber gibt es Unmuth und Verdruß genug. Wer in seiner Schule die Freude eines gedeihlichen Fortschrittes, den schönsten Lohn des Lehrers, kennen lernen und genießen will; wer es mit der ihm anvertrauten Jugend und mit sich selbst gut meint: der gehe nicht eilfertig, sondern langsam, aber bestimmt und sicher vorwärts; der weiche von keinem Punkte, als bis die Schüler die Sache verstehen und ihrer Herr geworden sind; der muthe den Kleinen nicht zu, Alles sogleich zu begreifen und zu können; der suche, wenn Etwas nicht recht gehen will, die Ursache davon zunächst in sich und denke darüber nach, wie es dem Verständnisse der Kinder näher zu legen sei; der sei sich stets bewußt, daß mehr gethan ist, wenn eine Zahl allseitig und gründlich durchgearbeitet und eine praktische Aufgabe klar und verständig gerechnet wird, als wenn zehn derselben einseitig und leichthin durchgenommen werden, und daß, je genauer und sorgfältiger man das Eine thut, desto leichter und besser es mit dem Andern geht, das darauf folgt.

In Schulen mit einer Altersklasse nehme man sich zwei Jahre Zeit zu diesem Cursus, in Schulen mit mehreren Klassen drei. In diesen gehe das Pensum für das erste Schuljahr nicht über die Zahl 10 hinaus, in jenen nicht über 20. Dabei wird vorausgesetzt, daß die betreffende Schülerabtheilung in den einklassigen Schulen wöchentlich viermal, in den mehrklassigen zwei- bis dreimal Rechenunterricht erhalte.

Der erste Zehner.

Die Zahlen Eins bis Fünf.

I. Bilden und Auffassen.

Durchaus anschaulich.

Mit Strichen.

Man macht an die Wandtafel einen senkrechten Strich und fragt: Was ist das? (Ein Strich.) Wie viel Striche sind es? (Ein Strich.) Neben diesen Strich macht man einen zweiten und veranlaßt die Kinder, zu sprechen: Ein Strich und ein Strich sind zwei Striche. An die Seite des zweiten Strichs setzt man einen dritten, und die Kinder sprechen: Zwei Striche und ein Strich sind drei Striche. So fort bis: Vier Striche und ein Strich sind fünf Striche.

Dieß wird so oft wiederholt, bis sich die Schüler geläufig ausdrücken.

Dann setzt man die Zahlen, wie folgt, unter einander,

zeigt — in und außer der Ordnung — auf die einzelnen Reihen und läßt von den Schülern die Zahlen benennen. Hierauf nennt man selbst bald diese, bald jene Zahl, und einer der Schüler zeigt darauf hin.

Mit Kugeln an der Rechenmaschine.

Man thut, wie in der Vorbemerkung gesagt ist, in die oberste oder erste Stange eine Kugel, in die zweite Stange zwei u. s. f. und verfährt dann eben so, wie vorhin bei der Veranschaulichung mit Strichen.

Mit den Fingern einer Hand.

Streckt einen Finger empor! (Zeigefinger.) Streckt zwei Finger empor! (Daumen und Zeigefinger.) Drei Finger! (Daumen, Zeige- und Mittelfinger.) Vier Finger! (Alle, ohne den Daumen.) Fünf Finger! — Dieß wiederholt und auch außer der Ordnung.

Was ist einmal an dem Kopfe? Was habt ihr zweimal an euch? Welche Thiere haben zwei Füße? Welche haben vier? Wie

viele Wände hat die Schulstube? Wie viel Fenster hat sie? Wie viel Flügel hat dieses Fenster? Und wie viel Glasscheiben hat dieser Flügel?

II. Zerlegen, Zusammenzählen, Abziehen, Unterscheiden.

1. Das Zerlegen (in zwei Elemente.)

Mit Würfeln, Büchern oder andern frei beweglichen Dingen.

Man legt zwei Würfel auf den Tisch, nahe zusammen. Wie viel Würfel sind das? (Zwei.) Nun rückt man einen vom andern etwas weg. Wie viel Würfel liegen jetzt auf dem Tische? (Noch gerade so viel, zwei.) Aber wie liegen sie jetzt? (Auseinander.) Wie viel Würfel liegen da? (Einer.) Und da? (Auch einer.) Was habe ich also aus der Zwei gemacht? (Eins und Eins.)

So abgefragt und veranschaulicht wird ferner zerlegt:

3 in 2 und 1	4 in 3 und 1	5 in 4 und 1
in 1 und 2	in 2 und 2	in 3 und 2
	in 1 und 3	in 2 und 3
		in 1 und 4

Dieß wird öfter wiederholt, doch so, daß der Lehrer blos die Veranschaulichung gibt, und die Schüler das Veranschaulichte in vollständigen Sätzen aussprechen. 2 ist 1 u. 1; 3 ist 2 u. 1; 3 ist 1 u. 2 u. s. w.

Dasselbe geschieht auch mit Kugeln an der Rechenmaschine und mit Punkten. Die Veranschaulichung durch Punkte gibt eine feststehende und übersichtliche Darstellung sämmtlicher Fälle.

•	•|•	••|•	•••|•	••••|•
		•|••	••|••	•••|••
			•|•••	••|•••
				•|••••

Der einzelne Punkt bleibt, wie er ist. Eins ist Eins. — Die zwei Punkte können wir zwar nicht so, wie 2 Würfel oder Kugel, auseinander rücken. Trennen oder zerlegen können wir sie aber doch. Wir thun dieß — und zwar vor den Augen der Schüler — durch einen kleinen Strich. Auf der einen Seite dieses Striches ist Eins, und auf der andern ist Eins. So ist also Zwei zerlegt in Eins und Eins.

Eben so zerlegen wir die Drei einmal in 2 u. 1, und dann in 1 u. 2, u. s. w.

Zuletzt, wenn sämmtliche Fälle vor Augen stehen, deutet der Lehrer auf die einzelnen Zahlen, indem er mit einem Stäbchen darüber hinstreicht, und auf ihre Theile hin, und die Schüler sprechen wieder in vollständigen Sätzen: 1 ist 1; 2 ist 1 u. 1 ꝛc.

2. Das Zusammenzählen.

a. In Verbindung mit dem Zerlegen und anschaulich.

Mit Würfeln, Büchern ꝛc. Man stellt 2 Würfel auf und fragt:

Wie viel ist das? Antwort: Zwei. Nun rückt man sie etwas auseinander, und die Schüler sprechen: Zwei ist Eins und Eins. Hierauf werden die Würfel wieder vereinigt, und dabei heißt es: Eins und Eins ist Zwei.

So auch mit den Zahlen 3, 4 und 5. Die obige Darstellung durch Punkte läßt ersehen, wie oft jede Zahl in zwei Elemente zerlegt und aus diesen wieder zusammengesetzt werden kann.

Das Nämliche wird mit den Kugeln an der Rechenmaschine ausgeführt. —

Auch an den Punkten, welche bei dem Zerlegen zur Veranschaulichung gedient haben, kann das Zusammenzählen geübt werden. Bei • | • deutet der Lehrer zuerst auf die eine, dann auf die andere Eins, und die Schüler sprechen: 1 und 1 ist 2. Bei • • | • streicht der Lehrer zuerst über die Zwei hin, deutet dann auf Eins, und die Schüler sprechen: 2 und 1 ist 3 u. s. w.

b. Für sich, anschaulich und frei im Kopfe.

Mit den Fingern der beiden Hände. Der Lehrer hebt eine Hand mit 1 ausgestreckten Finger empor, und die Schüler sprechen: „Eins"; dann hebt er die andere Hand mit 1 ausgestreckten Finger empor, und die Schüler sprechen: „und Eins", und indem er nun die zwei Finger zusammenthut, fahren die Schüler fort: „ist Zwei." Dieß wird noch ein oder einigemal in rascherem Tempo wiederholt und dabei im Zusammenhange gesprochen: Eins und Eins ist Zwei.

Ebenso wird veranschaulicht und zusammengezählt:

2 und 1	1 und 2	1 und 3
3 und 1	2 und 2	2 und 3
4 und 1	3 und 2	1 und 4

Frei im Kopfe. Wie viel ist 1+1? 2+1? 3+1? 4+1? ꝛc.

Karl bekommt vom Pathen 1 Apfel und von der Pathin 1 Apfel; wie viel Aepfel hat er nun? — Ein Vater hat 2 Knaben und 2 Mädchen; wie viel Kinder also? — Ein Fuhrmann hat 3 Rappen; dazu kauft er sich noch 2 Schimmel; wie viel Pferde hat er jetzt? — Emilie hat 2 Ostereier und bekommt noch 3 dazu; wie viel Ostereier hat sie nun im Ganzen? — Fritz erhält am Christfeste 1 versilberte Nuß und 3 vergoldete Nüsse; wie viel Nüsse hat er also erhalten? ꝛc.

3. Das Abziehen.

a. Anschaulich.

Mit Würfeln, Büchern ꝛc.

Der Lehrer stellt 5 Würfel auf. Wie viel ist das? (Fünf.) Nun nimmt er 1 Würfel davon weg. Ist es noch Fünf? (Nein.) Ist es jetzt mehr, oder weniger als Fünf? (Weniger.) Warum? (Weil Eins weggenommen worden ist.) Wie viel ist es daher jetzt weniger? (Eins.) Und wie viel ist noch da? (Noch 4.) Man stellt nun den fünften Würfel nochmal hin, und indem man ihn wieder wegnimmt, heißt es: Fünf weniger Eins ist Vier.

So fortfahrend wird veranschaulicht und gesprochen: 4 weniger 1 ist 3; 3 weniger 1 ist 2; 2 weniger 1 ist 1; 1 weniger 1 ist Nichts. — Wird einigemal wiederholt.

Mit den Fingern einer Hand, indem man mit Hilfe der andern Hand einen Finger nach dem andern einbiegt. Der Lehrer veranschaulicht, und die Schüler sprechen. Nachdem dieß einigemal so geschehen, thun die Schüler Beides zugleich.

An der Rechenmaschine.

Der Lehrer zeigt auf die Kugel in der ersten Stange, und die Schüler sprechen: „Eins." Indem er dieselbe auf die andere Seite schiebt, sprechen sie: „weniger Eins." Und indem er auf die vorige, nun leere Stelle der Kugel zeigt: „ist Nichts." Im Zusammenhange: Eins weniger Eins ist Nichts.

So die folgenden Fälle bis zur Geläufigkeit:

Erste Stange: 1—1
2te Stange: 2—1, 2—2
3te Stange: 3—1, 3—2, 3—3
4te Stange: 4—1, 4—2, 4—3, 4—4
5te Stange: 5—1, 5—2, 5—3, 5—4, 5—5.

b. Frei im Kopfe.

Die nämlichen Fälle, wie oben. Wie viel ist 1—1? 2—1? 2—2? ꝛc.

Karl hat 2 Aepfel; einen davon ißt er; wie viel hat er noch? — Sophie hat 3 Kreuzer; nun kauft sie für 2 kr. Aprikosen; wie viel Geld bleibt ihr übrig? — Für die 2 kr. erhält sie 5 Aprikosen; 2 davon gibt sie ihrem Bruder; wie viel hat sie noch? — Ein Mann hat 4 Pferde; 2 davon verkauft er; wie viel Pferde besitzt er nun? — Wie viel Kreuzer gilt 1 Groschen? Anton bekommt von seinem Vater 1 Gr., um für 1 Kreuzer Bretternägel zu holen; wie viel Kreuzer muß er wiederbringen?

3. Das Unterscheiden (Unterschiedsuchen.)

a. Die Schüler lernen erkennen, was gleiche und ungleiche Zahlen sind.

Man stellt zwei Schüler von gleicher Größe nebeneinander. Welcher von den Beiden ist größer, als der Andere? (Keiner.) Welcher ist kleiner, als der Andere? (Keiner.) Sie sind also — ihrer Größe nach — einander gleich. — Nun stellt man zwei Schüler von verschiedener Größe nebeneinander. Sind diese auch einander gleich? (Nein. A, der eine Schüler, ist größer als B, und B ist kleiner als A.)

Eben so mit zwei gleichgroßen und mit zwei ungleichgroßen Stäbchen und Linien, in senkrechter und in wagrechter Lage.

Dann mit Zahlen:

• • • • • • • • •
• • • • • • • • • •

5 und 5. Auf die eine Fünf zeigend: Wie viel ist das? (5.) Auf

die andere Fünf zeigend: Und wie viel ist das? (Auch 5.) Welche Zahl ist die größere: die obere Fünf, oder die untere Fünf? (Sie sind einander gleich.) Was für Zahlen sind also Fünf und Fünf? (Zwei gleiche Zahlen.)

4 und 5. Auf die Vier zeigend: Wie viel ist das? (4.) Auf die Fünf zeigend: Wie viel ist das? (5.) Sind diese zwei Zahlen auch einander gleich? (Nein.) Welche Zahl davon ist die größere? Und welche ist die kleinere?

So kann auch noch veranschaulicht werden, daß 4 u. 4 zwei gleiche, 3 u. 4 zwei ungleiche, 3 u. 3 zwei gleiche, 2 u. 3 aber ungleiche Zahlen sind.

b. Es wird bestimmt, um wie viel eine Zahl größer ist, als die andere.

Man stellt zwei Schüler von verschiedener Größe nebeneinander. So viel der größere Schüler über den andern hinausragt, um so viel ist er größer, als dieser.

Dem ähnlich thut man mit zwei ungleich großen Stäbchen und Linien, sowohl in senkrechter als in wagrechter Lage.

So viel die größere Linie über die kleinere hinausgeht, um so viel ist sie größer, als diese.

Dann mit Zahlen.

• • • •   • • •   • •   •
• • • • | •   • • • | • •   • • | • • •   • | • • • •

• • •   • •   •   • •   •   •
• • • | •   • • | • •   • | • • •   • • | •   • | • •   • | •

4 und 5. Hindeutend: Wie viel ist das? (4.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die größere? (Die Fünf.) Um wie viel geht 5 über 4 hinaus? (Um Eins.) Also ist Fünf um Eins größer als 4.

3 und 5. Hindeutend: Wie viel ist das? (3.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die größere, 3 oder 5? (5.) Um wie viel geht 5 über 3 hinaus? (Um Zwei.) Also ist 5 um 2 größer als 3. — So fort.

Zuletzt deutet der Lehrer auf die mit Punkten dargestellten Zahlen blos hin, und die Schüler sprechen das, was sie aus der Anschauung erkennen, in einem vollständigen Satze aus. Indem der Lehrer z. B. zuerst auf die 5, dann auf die 4 (zuerst also auf die größere, dann auf die kleinere der beiden Zahlen) zeigt, sprechen die Schüler: 5 ist um 1 größer als 4. —

Dieß bis zur Geläufigkeit. Dann frei im Kopfe. Man fragt: Welche Zahl ist größer: 2 oder 1? Antw. 2. Um wie viel? Antw. Um Eins. U. s. w.

Anm. Hier oben ist das, was die größere Zahl mehr ist als die kleinere, durch einen kleinen Strich bezeichnet. Beim Unterrichte kann man dieß auch durch ein Stäbchen andeuten.

C. Es wird bestimmt, um wie viel eine Zahl kleiner ist, als die andere.

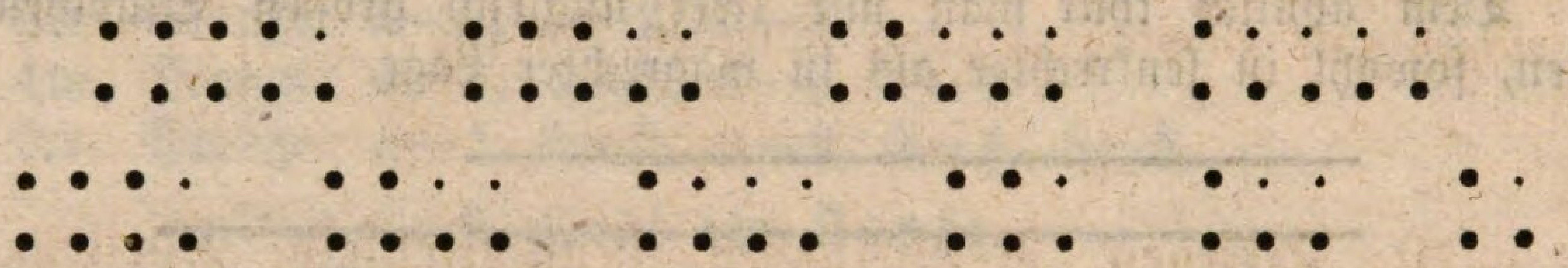
Man stellt wieder zwei Schüler von ungleicher Größe nebeneinander. So viel der kleinere Schüler noch wachsen oder größer werden muß, um dem andern gleich zu sein, um so viel ist er kleiner als dieser. Dieß zeigt der Lehrer, indem er seine Hand über dem kleineren Schüler so hoch empor hebt, als der andere Schüler groß ist.

Eben so mit zwei Linien von ungleicher Größe.



Um wie viel muß ich die obere Linie größer machen, damit sie der unteren gleich ist? (Durch eine feine Linie dieses anzeigend: Um so viel.) Warum muß ich sie gerade um so viel größer machen? (Weil sie um so viel kleiner ist.) So noch einigemal mit je zwei andern Linien.

Dann mit Zahlen.



4 und 5. Hinzeigend: Wie viel ist das? (4.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die kleinere? (Die Vier.) Um wie viel muß ich sie größer machen, damit sie der Fünf gleich ist? (Um Eins.) Also ist Vier um Eins kleiner als Fünf.

3 und 5. Hinzeigend: Wie viel ist das? (3.) Und das? (5.) Welche Zahl ist die kleinere? (Die Drei.) Um wie viel muß ich die Drei größer machen, damit sie der Fünf gleich ist? (Um 2.) Also ist Drei um 2 kleiner als 5. So fort.

Am Ende wird vom Lehrer auf die Zahlen — jetzt zuerst auf die kleinere, dann auf die größere — blos hin gezeigt, und von den Schülern wird das aus der Anschauung Erkannte wieder in vollständigen Sätzen ausgesprochen. Indem also der Lehrer z. B. zuerst auf 4 und dann auf 5 zeigt, sprechen die Schüler: 4 ist um 1 kleiner als 5. — Auch dieß bis zur Geläufigkeit!

Dann frei im Kopfe. Welche Zahl ist kleiner: 1 oder 2? Um wie viel? — Welche Zahl ist kleiner: 2 oder 3? Und um wie viel? 2c. —

Karl hat 1 Apfel, Fritz hat 2; wie viel Aepfel hat Fritz mehr, als Karl? — Ein Fuhrmann hat 2 Schimmel und 3 Rappen; wie viel Schimmel hat er weniger, als Rappen? — Lotte bekam 4 Ostereier, Marie bekam 2; wie viel Ostereier bekam Lotte mehr, als Marie? — Ein Vater hat 4 Söhne und 3 Töchter; wie viel Töchter hat er weniger, als Söhne? — Heinrich kaufte sich für 1 Kr. Aepfel und bekam 3; August aber bekam für 1 Kr. 5 Aepfel; wie viel bekam August mehr? 2c.

Nun lernen die Schüler die Ziffern für die Zahlen von Eins bis Fünf kennen, und während der folgenden Uebungen lernen sie nebenher dieselben schreiben.

|	1	ein Strich, Ziffer	Eins.
| |	2	zwei Striche, „	Zwei.
| | |	3	drei Striche, „	Drei.
| | | |	4	vier Striche, „	Vier.
| | | | |	5	fünf Striche, „	Fünf.

Welche Ziffer bedeutet Vier? welche bedeutet Zwei? ꝛc. Wie viel bedeutet diese Ziffer? wie viel diese? ꝛc. Nun schreibt man dieselben Ziffern mehrmals außer der Reihenfolge an, läßt sie von den Kindern lesen und ihre Bedeutung durch aufgehobene Finger angeben.

Sind Namen und Bedeutung bekannt, so geht es an das Schreiben. Zuerst wird der Schüler im Schreiben der Ziffer 1 geübt, dann im Schreiben der Ziffer 2 u. s. f.

Der Lehrer schreibt die Ziffer immer im langsamen Takte einigemal an die Tafel und macht hiebei darauf aufmerksam, in welcher Ordnung die einzelnen Züge aufeinander folgen müssen. Dann werden die Schüler angehalten, das Zeichen in derselben Weise so lange nachzubilden, bis sie es richtig und ziemlich geläufig schreiben können.

III. Zerlegen, Vervielfachen, Enthaltensein, Theilen.

1. Das Zerlegen (in mehrere Elemente.)

Die Eins als Einheit.

Zuerst wird den Schülern der Ausdruck „mal" in's Bewußtsein gebracht.

Zählt, wie oft ich meine Hand aufhebe! (1 mal, 2 mal.) Zählt wieder! (1 mal, 2, 3 mal) ꝛc. — Nun hebt ihr die rechte Hand empor. Thut es 3 mal und zählt dazu! Thut es 5 mal! Thut es 4 mal! Zählt, wie oft ich 1 Schritt mache! (1 mal, 2 mal.) Wie vielmal 1 Schritt habe ich gemacht? (2 × 1 Schritt.) Zählt wieder! (1 mal, 2, 3 mal.) Wie vielmal 1 Schritt habe ich dießmal gemacht? (3 × 1 Schritt.)

Nun zählt, wie oft ich 1 Punkt mache! (1 mal.) Wie vielmal 1 Punkt ist es? (1 × 1 Punkt.) — Zählt wieder! (1 mal, 2 mal.) Wie vielmal 1 Punkt ist dieß? (2 × 1 Punkt.) So fort, bis die Zahlen von Eins bis Fünf mit Punkten, wie hier unten, dargestellt sind. Hierauf werden sie gelesen und dann, wie folgt, zerlegt, wobei der Lehrer auf jeden Punkt, der in's Auge gefaßt werden soll, immer auch hinzeigt.

•	1 ist 1mal 1.
• | •	2 ist 1+1 od. 2×1.
• | • | •	3 ist 1+1+1 od. 3×1.
• | • | • | •	4 ist 1+1+1+1 od. 4×1.
• | • | • | • | •	5 ist 1+1+1+1+1 od. 5×1.

Wird wiederholt, bis zur Geläufigkeit, durchgesprochen.

Die Zwei als Einheit.

Strecke du deine zwei Hände zugleich einmal empor! Wie viel-

mal zwei Hände sind es? (1 × 2 H.) — Nun strecke auch du (ein zweiter Schüler) deine Hände empor! Wie vielmal 2 Hände sind es jetzt? (2 × 2 H.) — Auch du! Wie vielmal 2 Hände sind jetzt ausgestreckt? (3 × 2 H.)

An der Rechenmaschine. Die Kugeln sind alle auf einer Seite.

Zweite Stange. Der Lehrer deutet auf die 2 Kugeln und spricht: Zählt, wie oft ich hier 2 K. auf die andere Seite schiebe! (Einmal.) Wie vielmal 2 K. sind das also? (1 × 2 K.)

Vierte Stange. Auf die 4 Kugeln deutend: Zählt, wie oft ich davon 2 K. auf die andere Seite schiebe! (1mal, 2mal.) Wie vielmal 2 K. sind also das? (2 × 2 K.)

Hierauf:

a. Mit Kugeln:		b. Mit Punkten:	
2te Stange	• •	2=1×2	• •
3te Stange	• • •	3=1×2+1	• • | •
4te Stange	• • • •	4=2×2	• • | • •
5te Stange	• • • • •	5=2×2+1	• • | • • | •

Wird ebenso bis zur Geläufigkeit durchgesprochen.

Anm. Um die Zwei als Einheit den Kindern recht anschaulich zu machen, so kann man bei den Punkten je zwei derselben durch einen Ring einschließen.

2. Das Vervielfachen.

Mit der nämlichen Veranschaulichung.

•	1 ist 1; 1×1 ist 1.
• | •	1+1 ist 2; 2×1 ist 2.
• | • | •	1+1 ist 2, +1 ist 3; 3×1 ist 3.

u. s. w.

Auf den obersten Punkt zeigend: Wie vielmal Eins ist das? (1×1.) Und wie viel ist es? (1.) Wie viel ist also 1×1? (1×1=1.)

Auf die 2 Punkte und zwar auf jeden besonders zeigend: Wie viel ist das? (Eins.) Und das? (Auch Eins.) Wie vielmal Eins ist es? (2×1.) Zählt Eins und Eins zusammen! (1+1=2.) Wie viel ist also 2×1? (2×1 ist 2.) So fort.

Zuletzt deutet der Lehrer auf die Punkte blos hin, und die Schüler sprechen, wie oben angezeigt: 1 ist 1, 1×1 ist 1; 1+1=2, 2×1=2; 1+1=2, +1=3, 3×1=3 rc.

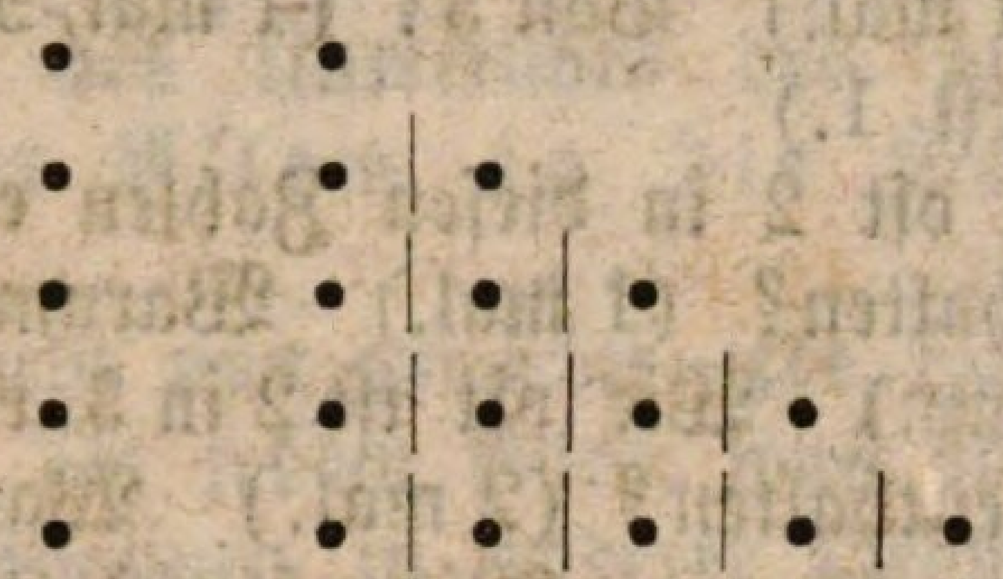
• •	2 ist 2; 1 × 2 ist 2.
• • | •	2 + 1 ist 3; 1 × 2 ist 2, + 1 ist 3.
• • | • •	2 + 2 ist 4; 2 × 2 ist 4.
• • | • • | •	2 + 2 ist 4, + 1 ist 5; 2 × 2 ist 4, + 1 ist 5.

Bis zur Geläufigkeit!

Dasselbe kann auch noch an der Rechenmaschine mit den Kugeln

ausgeführt werden, indem man je eine, oder je zwei derselben von einer Seite auf die andere Seite schiebt.

3. Das Enthaltensein.



Eins in Eins. Ich nehme diese Eins (zur linken Hand, sie ablöschend) weg und lege sie in diese (ihr gegenüberstehende) Eins, (diese etwas verstärkend.) Wie oft habe ich Eins in diese Eins gelegt? Wie oft liegt also 1 in 1? (1mal.)

Eins in Zwei. Ich nehme die Eins weg und lege sie in diese erste Eins der Zwei. Nun mache ich die Eins wieder an ihre vorige Stelle und lege sie auch in die andere Eins von der Zwei. Wie oft habe ich Eins in die Zwei gelegt? (2mal.) Wie oft liegt 1 in dieser Eins? (1mal.) Und in dieser andern Eins? (Auch 1mal.) Wie oft liegt also 1 in 2? (2mal.) — So fort.

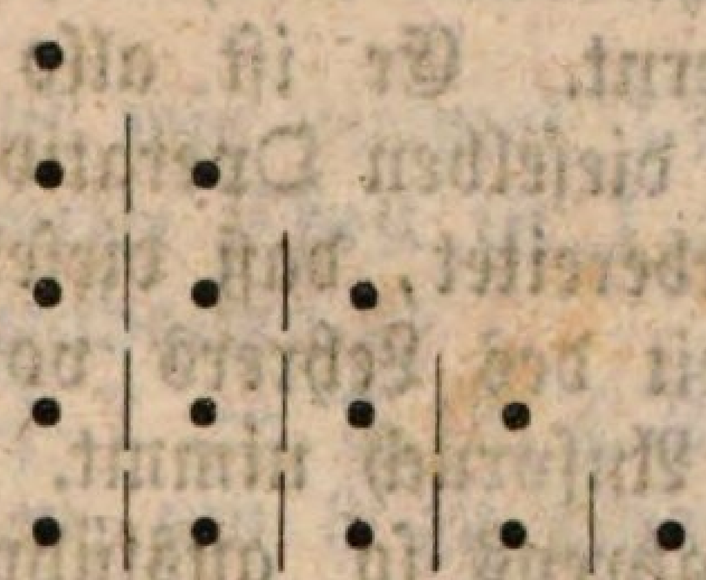
Eins liegt also in jeder Eins einmal.

Auf die Punkte hinzeigend:

1 ist 1 × 1; daher liegt 1 in 1 einmal.
2 ist 2 × 1; daher liegt 1 in 2 zweimal (einmal in dieser 1 und einmal in dieser.)
3 ist 3 × 1; daher liegt 1 in 3 dreimal (1mal in dieser 1 ꝛc.)
4 ist 4 × 1; daher liegt 1 in 4 viermal (1mal in dieser 1 ꝛc.)
5 ist 5 × 1; daher liegt 1 in 5 fünfmal (1mal in dieser 1 ꝛc.)

Wißt ihr, wie vielmal 1 Kugel ich in dieser meiner Tasche habe? (Nein.) Zählt, wie oft ich Eine herausnehme! (1mal, 2, 3, 4mal.) Nun, wie vielmal 1 Kugel waren in meiner Tasche enthalten? (4mal 1 Kugel.) Woher wißt ihr es jetzt? (Weil aus der Tasche 4 × 1 Kugel herausgenommen worden sind.)

Auf die mit Punkten dargestellten Zahlen angewendet.





Zählt, wie oft ich Eins wegnehmen oder ablöschen kann: von Eins! (1mal.) Von Zwei! (1mal, 2mal.) So fort, bis die Zahlen von Eins bis Fünf abgelöscht sind.

Wie oft ist also 1 in 1 enthalten? (1mal.) Warum? (Weil man 1 von 1 einmal wegnehmen kann.) Wie oft ist 1 in 3 enthalten? (3mal.) Warum? (Weil man 1 von 3 dreimal wegnehmen kann.) ꝛc.

Nun zählt, wie oft ich Zwei wegnehmen oder ablöschen kann: von 2! (1 mal.) Von 3! (1 mal und 1 bleibt übrig.) Von 4! (1 mal, 2 mal.) Von 5! (1 mal, 2mal, und 1 bleibt übrig.)

Was übrig bleibt, heißt Rest. Also nochmal: Wie oft kann man 2 wegnehmen von 2? (1 mal.) Von 3? (1 mal, Rest 1.) Von 4? (2 mal.) Von 5? (2 mal, Rest 1.)

Nun wißt ihr auch, wie oft 2 in diesen Zahlen enthalten ist.

Wie oft ist 2 in 2 enthalten? (1 mal.) Warum? (Weil man 2 von 2 einmal wegnehmen kann.) Wie oft ist 2 in 3 enthalten? (1 mal, Rest 1.) Wie oft ist 2 in 4 enthalten? (2 mal.) Warum? (Weil man 2 von 4 zweimal wegnehmen kann.) Wie oft ist 2 in 5 enthalten? (2 mal, Rest 1.)

4. Das Theilen.

•|•   •|•|•   •|•|•|•   •|•|•|•|•

••|••

Die Zahl Zwei.

Auf die Punkte hinzeigend: Wie viel ist das? Antwort: Zwei. In wie viel Theile habe ich die Zwei getheilt? (In zwei Theile.) Sind es zwei gleiche oder ungleiche Theile? (2 gleiche Theile.) Wie groß ist jeder Theil? (Eins.) Der wievielte Theil ist 1 von 2? Vor- und nachsprechend: Eins ist der halbe Theil von Zwei.

Eben so die übrigen Zahlen.

Zuletzt, auf die entsprechenden Theile hinzeigend:

1 ist der halbe Theil von 3; 1 ist die Hälfte von 2.
1 ist der dritte Theil von 3; 1 ist 1 Drittel von 3.
1 ist der vierte Theil von 4; 1 ist 1 Viertel von 4.
1 ist der fünfte Theil von 5; 1 ist 1 Fünftel von 5.
2 ist der halbe Theil von 4; 2 ist die Hälfte von 4.

Dieß wird mit Kugeln an der Rechenmaschine, mit Würfeln und andern Dingen so oft wiederholt, bis die Sache von den Kindern aufgefaßt und eingeprägt ist.

Durch das Bisherige hat der Schüler anschauen, über das, was er angeschaut, sich aussprechen und dabei die verschiedenen Rechenoperationen mit den gebräuchlichen Ausdrücken kennen gelernt. Er ist also für die individuelle Behandlung der Zahlen, wobei sich dieselben Operationen von Stufe zu Stufe koncentrirt wiederholen, so vorbereitet, daß dieser Unterricht nunmehr weder eine besondere Gewandtheit des Lehrers voraussetzt, noch auch die Kraft desselben über Gebühr in Anspruch nimmt.

Daß wir in der Darlegung des Lehrverfahrens so ausführlich waren, geschah hauptsächlich aus Rücksicht für angehende Lehrer, denen wir übrigens rathen müssen, des Buches sich mehr zur Vorbereitung auf den Unterricht zu bedienen, als bei diesem selbst. Denn die Worte des Lehrers müssen frei und frisch vom Munde fließen. Das ist aber nur möglich, wenn er über der Sache steht und ihrer Herr ist. Also muß er streben, sich derselben zu bemächtigen. Wer es thut, hat sich dessen in

der Folge gewiß nur zu freuen. Das Bewußtsein, den Lehrgegenstand zu beherrschen und in der Art und Weise, wie dem Kinde die Sache begreiflich und anschaulich zu machen sei, nie in Verlegenheit zu kommen, gibt ihm eine Sicherheit und Bestimmtheit in Haltung und Ausdruck, die auf die Schüler äußerst wohlthätig einwirkt. Auch ist nur in diesem Falle der Erfolg des Unterrichts der gewünschte. Darum nochmal: zuerst und vor Allem in die Sache sich fest hineingearbeitet!

Wir behandeln nun zunächst jede Zahl von Eins bis Fünf auch allseitig für sich. Da jedoch Alles, was vorkommen wird, nur eine Wiederholung des Bisherigen in anderer Ordnung ist; so können wir uns kurz fassen. Zur Veranschaulichung wird nur ausnahmsweise gegriffen werden müssen.

Die Eins.

Eins ist wie vielmal Eins? Wie viel ist 1×1? Wie viel ist $1 - 1$? Wie oft liegt 1 in 1?

Die Zwei.

2 ist wie vielmal 1? Wie viel ist $1 + 1$? Wie viel ist 2×1? Wie oft liegt 1 in 2? Was für ein Theil ist 1 von 2?

Wie viel muß man zu 1 legen, um 2 zu erhalten? Wie viel ist $2 - 1$? $2 - 2$? Um wie viel ist 2 größer als 1? Um wie viel ist 1 kleiner als 2?

Karl erhält vom Vater 1 kr. und von der Mutter 1 kr.; wie viel Kreuzer hat er? — Davon kauft er sich für 1 kr. Kirschen; wie viel Geld bleibt ihm übrig? — 1 Stahlfeder kostet 1 kr.; was kosten 2 Stahlfedern? — Wenn du 2 Aepfel an 2 Kinder vertheilen sollst; wie viel gibst du jedem? — 1 Zweier gilt 2 Pfennige; Fritz hat 1 Zweier, Karl hat 1 Pfg.; wer von beiden hat mehr? Und wie viel?

Die Drei.

3 ist wie vielmal 1? Wie viel ist 3×1? Wie oft liegt 1 in 3? Der wievielte Theil ist 1 von 3? — 3 ist wie vielmal 2? Wie oft ist 2 in 3 enthalten?

$2 + ? = 3$ (d. i. 2 und wie viel ist 3? oder: Wie viel muß man zu 2 legen, um 3 zu erhalten?) $1 + ? = 3$.

Wie viel ist $3 - 1$? $3 - 2$? $3 - 3$?

Um wie viel ist 3 größer als 2? Um wie viel ist 3 größer als 1?

Um wie viel ist 2 kleiner als 3? Um wie viel ist 1 kleiner als 3?

Ein Kutscher fährt 2 Herren; wie viel Männer befinden sich auf dem Wagen? — Louise hat 3 Kirschen; 2 davon ißt sie; wie viel hat sie noch? — Franz hat 2 Stifte, Karl hat 3. Wer hat mehr? Wie viel?

Wer hat weniger? Wie viel? — Marie ist 3 Jahre alt, ihr Bruder Fritz 1 Jahr. Um wie viel ist Marie älter, als Fritz? Um wie viel ist Fritz jünger, als Marie? — 1 Groschen gilt 3 kr.; wie viel gilt 1 Gr. mehr, als 1 kr.? Wie vielmal 1 kr. gilt 1 Groschen? — Für 1 kr. erhält man 1 Elle Band; wie vielmal 1 Elle erhält man für 2 kr.? für 3 kr.? Wie viel Ellen sind 3×1 Elle? Wie viel Ellen Band erhält man also für 3 kr.? — 3 Brüder theilen unter sich 3 Aepfel. In wie viel Theile müssen sie die 3 Aepfel theilen? Warum? Wie viel kommt auf 1 Theil? Wie viel Aepfel bekommt also jeder von den 3 Brüdern?

Die Vier.

4 ist wie vielmal 1? Wie viel ist 4×1? Wie oft liegt 1 in 4? Der wievielte Theil ist 1 von 4? — 4 ist wie vielmal 2? Wie viel ist 2 + 2? Wie viel ist 2×2? Wie oft ist 2 in 4 enthalten? Was für ein Theil ist 2 von 4?

$3 + ? = 4$? $2 + ? = 4$. $1 + ? = 4$.

$4 - 1 = ?$ $4 - 2 = ?$ $4 - 3 = ?$

Um wie viel ist 4 größer als 3? als 2? als 1?

Um wie viel ist 3 kleiner als 4? 2 kleiner als 4? 1 kleiner als 4?

Um wie viel sind 4 kr. mehr, als 1 Gr.? — 4 Pfennige = 1 kr.; wie viel gilt 1 kr. mehr, als 1 pf.? — August nimmt 1 kr. und kauft sich für 2 pf. einen Bleistift; wie viel muß er zurück bekommen? — Emilie hat 4 kr. und kauft sich für 1 Gr. Aepfel; wie viel Geld bleibt ihr übrig? — Eine Stahlfeder kostet 1 kr.; was kosten 2? 3? 4? — Ein Loth Kaffee kostet 2 kr.; was kosten 2 Loth? — 2 Pfund Kirschen kosten 4 kr; was kostet 1 Pfd.? — 4 Pfirsiche kosten 4 kr.; was kostet eine? — 2 Ellen Zeug geben 1 Kleidchen; wie viele Kleidchen lassen sich aus 4 Ellen machen?

Die Fünf.

5 ist wie vielmal 1? Wie viel ist 2×1? 3×1? 4×1? 5×1? Wie oft liegt 1 in 2? in 3? in 4? in 5? — Was für ein Theil ist 1 von 2? von 3? von 4? von 5?

5 ist wie vielmal 2? Wie oft ist 2 in 5 enthalten?

$4 + ? = 5$. $3 + ? = 5$. $2 + ? = 5$. $1 + ? = 5$.

$5 - 3 = ?$ $5 - 1 = ?$ $5 - 4 = ?$ $5 - 1 = ?$

Um wie viel ist 5 größer als 4? als 2? als 3? als 1?

Um wie viel kleiner als 5 ist 4? 2? 3? 1?

Hermann bekommt 2 kr. und hat nun 5; wie viel Kreuzer hat er vorher gehabt? — Von 5 Kirschen hat Anton noch 1; wie viel hat er davon schon gegessen? — Fritz hat 5 Sprüche gelernt und kann nun 1 Spruch mehr, als seine Schwester; wie viel Sprüche kann diese? — Emilie ist 5 Jahre alt; Ernestine ist um 3 Jahre jünger; wie alt ist diese? — August hat 5 kr. und kauft sich für 1 Gr. ein neues Schreibheft; wie

viel Geld bleibt ihm übrig? — Ein Knabe hat 5 Aepfel und ißt täglich einen davon; wie viele Tage hat er daran? — 5 pf., wie viele Kreuzer? — 5 kr., wie viele Gr.? — 4 Quint = 1 Lth.; 5 Qt., wie viel Loth? — Für 1 Gr. bekommt man 1 Citrone; wie viel für 3 Gr.? für 5 Gr.? — 5 Brüder erhalten 5 Trauben; wie viel kommt auf einen?

Das schriftliche Rechnen.

(Siehe Aufgaben zum Zifferrechnen, erstes Heft, S. 1)

Auf dieser Stufe tritt dem mündlichen Rechnen das schriftliche an die Seite und begleitet es von Zahl zu Zahl und bei jeder Zahl allmählich wieder von Uebung zu Uebung. Beides fällt hier der Ausführung nach völlig zusammen. Deßhalb ist für das schriftliche Rechnen eine besondere Anweisung auch nicht nöthig. Nur die Art und Weise, wie der Schüler in den Gebrauch des Aufgabenheftchens einzuführen ist, sei kurz bemerkt.

Der Lehrer schreibe aus dem Büchlein die Aufgaben über die Zahlen oder die Zahl, die so eben anschaulich und frei im Kopfe behandelt worden ist, an die Wandtafel, spreche sie ausführlich mit den Kindern durch, erkläre diesen dabei die arithmetischen Zeichen und setze die Ergebnisse hinzu. Dann lösche er die Resultate wieder ab, lasse einen Schüler an die Tafel treten und von ihm dasselbe wiederholen. Gleiches geschehe von einem zweiten, dritten rc., bis es geht. Hierauf nehmen die Schüler selbst das Aufgabenheft zur Hand, und einer nach dem andern liest und rechnet eine von denselben Aufgaben daraus vor. Dann wird es von ihnen auf den Schiefertafeln ausgeführt. — So verfahre man immer, so oft im Aufgabenhefte eine Uebung zum Erstenmal erscheint. Auch kann das, was so in der Schule schriftlich gerechnet worden ist, nochmal als Hausaufgabe gegeben werden.

Die Sechs.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • •

$$5 + 1 = 6.$$

b.

• | • | • | • | • | •

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;\ 6 = 6 \times 1.$$

$$6 \times 1 = 6$$
$$1 : 6 = 6\,\text{mal}$$
$$1 = \tfrac{1}{6} \times 6.\ (\tfrac{1}{6}\ \text{v.}\ 6.)$$

(Zeige mir $\frac{1}{6}$ von 6! $\frac{2}{6}$ von 6! $\frac{3}{6}$ von 6! $\frac{5}{6}$ von 6!)

Für 1 Kreuzer bekommt man 1 Bleistift, wie viel für 6 kr.?

Für 1 kr. erhält man 1 Bleistift; für 1 kr. + 1 kr. erhält man 1 Blst. + 1 Blst., für 2 × 1 kr. also 2 × 1 Blst.; für 1 + 1 + 1 kr. erhält man 1 + 1 + 1 Blst., für 3 × 1 kr. also 3 × 1 Blst. 2c. Für 6 × 1 kr. erhält man also 6 × 1 Blst. oder 6 Bleistifte.

6 Knaben bekommen 6 Ostereier; wie viel kommt auf einen?

Wie viel Knaben sind's? Und wie viel Eier bekommen sie miteinander? Darf Einer allein die 6 Ostereier behalten? Was müssen sie also damit thun? (Theilen.) Wie viel Theile müssen sie daraus machen? (Sechs.) Warum? (Weil es sechs Knaben sind.) Wie viel kommt auf einen Theil, wenn man 6 Eier in 6 gleiche Theile theilt? (Ein Ei.) Wie viel bekommt also jeder von den 6 Knaben? (Jeder bekommt ein Ei.)

• • | • • | • •

6 = 2 + 2 + 2; 6 = 3 × 2.

3 × 2 = 6

2 : 6 = 3mal

2 = $\frac{1}{3}$ = 6.

(Zeige mir $\frac{1}{3}$ von 6! $\frac{2}{3}$ von 6!)

1 Loth Kaffee kostet 2 Kreuzer; was kosten 3 Loth?

Kaufe ich 1 Loth, so zahle ich 2 kr.; kaufe ich noch 1 Loth, so zahle ich nochmal 2 kr., für 2 × 1 Loth zahle ich also 2 × 2 kr.; und kaufe ich noch 1 Loth, so zahle ich nochmal 2 kr., für 3 × 1 Loth zahle ich also 3 × 2 kr. oder 6 kr. Die 3 Loth kosten also 6 kr.

Für 2 Kreuzer erhält man 1 Muskatnuß, wie viel für 6 kr.?

Für 2 kr. erhalte ich 1 Muskatnuß; 6 kr. sind 2 + 2 + 2 kr., und dafür bekomme ich 1 + 1 + 1 Muskatnuß; für 6 oder 3 × 2 kr. erhalte ich also 3 × 1 Muskatnuß oder 3 Muskatnüsse.

3 Knaben bekommen 6 Nüsse; wie viel erhält einer davon?

Wie viel Knaben sind es? Und wie viel Nüsse erhalten sie miteinander? Darf Einer allein die 6 Nüsse nehmen? Was müssen sie also damit thun? Wie viel Theile müssen sie daraus machen? Wie viel kommt auf 1 Theil, wenn man 6 Nüsse in 3 gleiche Theile zerlegt? Wie viel Nüsse bekommt also jeder der 3 Knaben?

• • • | • • •

6 = 3 + 3; 6 = 2 × 3.

2 × 3 = 6

3 : 6 = 2mal

3 = $\frac{1}{2}$ × 6.

2 Gr., wie viele kr.? — Wie viele Schreibhefte kann man aus 6 Bogen Papier machen, wenn man zu einem Hefte 3 Bogen nimmt? In 2 Tg. verzehrt ein Mann 6 fl.; wie viel in 1 Tag?

• • • • | • •

6 = 4 + 2; 6 = 1 × 4 + 2.

• • • • • | •

6 = 5 + 1; 6 = 1 × 5 + 1.

In meinen 2 Händen habe ich 6 Bohnen, wie viel in jeder?
In welche zwei Theile läßt sich 6 zerlegen?
(In 5 + 1, 4 + 2, 3 + 3, 2 + 4, 1 + 5).

II. Zuzählen, Abziehen und Unterscheiden.

a.		b.
5 + ? = 6	● ● ● ● ● ● ·	6 — 1 = 5.
4 + ? = 6	● ● ● ● ● · ·	6 — 2 = 4.
3 + ? = 6	● ● ● ● · · ·	6 — 3 = 3.
ꝛc.		ꝛc.

c.

6 > 5 um 1 ⁚ ⁚ ⁚ ⁚ ⁚ · 5 < 6 um 1.

(6 ist größer als 5 um 1.) (5 ist kleiner als 6 um 1.)

6 > 4 um 2 ⁚ ⁚ ⁚ ⁚ · · 4 < 6 um 2.

6 > 3 um 3 ⁚ ⁚ ⁚ · · · 3 < 6 um 3.

Anm. Daß die einzelnen Sätze im Addiren, Subtrahiren und Unterscheiden auch außer der Ordnung durchzunehmen sind, versteht sich wohl von selbst.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 4 + 2, die Hälfte, + 1, 2 ab, 3 mal, $^1/_3$, + 4, 5 ab ꝛc.

Man spricht so, daß die Schüler nach jeder genannten Zahl sogleich die Antwort geben können. Doch muß es rasch von Statten gehen.

2) Zu welcher Zahl muß man 2 legen, um 6 zu erhalten? **3)** Wie viel muß man von 6 wegnehmen, wenn 3 übrig bleiben soll? **4)** Wie viel ist 2 × 2? 3 × 2? **5)** Wie viel ist 3 × 2 mehr, als 2 × 2? **6)** Wie oft muß man 1 nehmen, um 6 zu erhalten? **7)** Wie viel ist 3 × 1? 4 × 1? 5 × 1? **8)** Wie heißt die Zahl: wenn man sie 2 mal nimmt, so erhält man 6? **9)** Was für ein Theil ist 2 von 4? von 6? **10)** Wie sucht man $^2/_3$ von 6? $^5/_6$ von 6? **11)** Von welcher Zahl ist 1 die Hälfte? Wovon ist Eins $^1/_6$? **12)** Von welcher Zahl ist 2 die Hälfte? $^1/_3$? **13)** Wie vielmal so groß ist 6, als 3? als 2? als 1? **14)** Welche Zahl muß man 2 mal nehmen, um 6 zu erhalten? **15)** 6 kr. machen 1 Sechser; wie viel ist ein Sechser mehr, als 1 Gr.? **16)** Hier liegen 6 einzelne Kreuzer, hier 2 Gr. und hier 1 Sechserstück; wo liegt am meisten? **17)** Wilhelm hat 1 Sechser; Fritz hat 1 Gr. und 2 kr.; welcher von beiden hat mehr Geld, als der andere? **18)** 1 Elle kostet 1 Pfennig; was kosten 6 Ellen? **19)** 1 Pfund Kirschen kostet 3 kr.; was kosten 2 Pfund? **20)** Für 1 kr. erhält man 2 Bogen Papier, wie viel für 3 kr.? **21)** Für 2 kr. gibt der Bäcker 1 Weck, wie viel für 6 kr. **22)** Wie viele Groschenkipfe erhält man für 1 Sechser? **23)** 3 Knaben theilen 6 Nüsse mit einander; wie viel bekommt einer? **24)** 6 pf., wie viele Zweier? 6 Seidel, wie viele Maas? ꝛc.

Die Sieben.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • •

$6 + 1 = 7.$

b.

• | • | • | • | • | • | •

$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;\ 7 = 7 \times 1.$

$7 \times 1 = 7$

$1 : 7 = 7$ mal

$1 = \frac{1}{7} = 7.$

(Zeige mir $\frac{1}{7}$ von 7! $\frac{2}{7}$ von 7! $\frac{3}{7}$ von 7! ꝛc.)

Ein Schüler lernt täglich 1 Liedervers; wie viel in 1 Woche? 7 Mädchen theilen sich in 7 Bilderbogen; wie viel bekommt eines?

• • | • • | • • | •

$7 = 2 + 2 + 2 + 1;\ 7 = 3 \times 2 + 1.$

• • • | • • • | •

$7 = 3 + 3 + 1;\ 7 = 2 \times 3 + 1.$

• • • • | • • •

$7 = 4 + 3;\ 7 = 1 \times 4 + 3.$

• • • • • | • •

$7 = 5 + 2;\ 7 = 1 \times 5 + 2.$

• • • • • • | •

$7 = 6 + 1;\ 7 = 1 \times 6 + 1.$

7 pf., wie viel Zweier? 7 Groschen, wie viel Sechser? 7 Kreuzer, wie viel Groschen? 7 pf., wie viel Kreuzer? 7 Schoppen, wie viel Maas? 7 Kreuzer, wie viel Sechser?

Ein Vater hat 7 Kinder, Knaben und Mädchen; wie viel Knaben und wie viele Mädchen mögen es wohl sein?

In welche zwei verschiedenen Theile läßt sich 7 zerlegen? (In $6 + 1$, $5 + 2$, $4 + 3$, $3 + 4$, $2 + 5$, $1 + 6$.)

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.		b.
$6 + ? = 7$	• • • • • • •	$7 - 1 = 6.$
$5 + ? = 7$	• • • • • • •	$7 - 2 = 5.$
$4 + ? = 7$	• • • • • • •	$7 - 3 = 4.$
ꝛc.		ꝛc.

c.

7 > 6 um 1 : : : : : : . 6 < 7 um 1.

7 > 5 um 2 : : : : : . . 5 < 7 um 2.

7 > 4 um 3 : : : : . . . 4 < 7 um 3.

ꝛc. ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2 × 3 + 1 — 2 — 2 — 2 + 4 + 2 — 3 + 2, die Hälfte, + 4 ꝛc. 2) Zu welcher Zahl muß ich 3 legen, um 7 zu erhalten? 3) Was ist mehr: 2 × 3, oder 7? Um wie viel? 4) Wie viel 7 — 2? 7 — 4? 7 — 6? 5) Von 7 Aufgaben hat Karl noch 3 zu rechnen; wie viele hat er schon gerechnet? 6) Theodor macht eine Reise zu seinem Pathen; nachdem er 5 Stunden Wegs gegangen ist, hat er noch 2 Stunden zu machen; wie weit muß er im Ganzen gehen? (| | | | | | |) 7) Wie oft kann 2 von 7 hinweg genommen werden? 8) Wie oft ist 2 in 7 enthalten? 9) In welcher Zahl ist 3 zweimal enthalten? 10) Wie oft ist 3 in 7? 11) Wie heißt die Zahl, welche um 3 kleiner ist, als 7? 12) Wie heißt die Zahl: 7 ist um 2 größer, als sie? 13) 7 Tage nennt man eine Woche. Wie heißen die 7 Wochentage? Wie heißt der erste Wochentag? der 2te? der 3te? ꝛc. 14) Wer alle Tage 1 Gulden braucht, wie viel braucht der in 1 Woche?

Die Acht.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • •

7 + 1 = 8.

b.

• | • | • | • | • | • | • | •

8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1; 8 = 8 × 1.

8 × 1 = 8

1 : 8 = 8 mal

$1 = \frac{1}{8} \times 8.$

(Zeige mir $\frac{1}{8}$ von 8! $\frac{3}{8}$ von 8! $\frac{5}{8}$ von 8! $\frac{7}{8}$ von 8!)

1 Elle Zeug kostet 1 fl.; wie viel kosten 8 Ellen?

8 Kinder theilen 8 Ostereier miteinander; wie viel bekommt eines?

. . | . . | . . | . .

$8 = 2 + 2 + 2 + 2;\ 8 = 4 \times 2.$

$4 \times 2 = 8$

$2 : 8 = 4$mal

$2 = \frac{1}{4} \times 8.$

(Wie viel beträgt $\frac{1}{4}$ von 8? Wie viel sind $\frac{3}{4}$ von 8?)

Wie viele Hände haben 4 Knaben mit einander? — Aus einem Vogelneste schauen 8 Aeuglein heraus; wie viele Vögelein sind darinnen? — 4 Paar Semmeln kosten 8 kr.; was wird ein Paar kosten?

. . . | . . . | . .

$8 = 3 + 3 + 2;\ 8 = 2 \times 3 + 2.$

8 kr. =? Groschen.

. . . . | . . . .

$8 = 4 + 4;\ 8 = 2 \times 4.$

$2 \times 4 = 8$

$4 : 8 = 2$mal

$4 = \frac{1}{2} \times 8.$

Ein Laib Brod ist 4 Pfd. schwer; wie viel wiegen 2 Laib Brod? 4 Ellen Leinwand geben 1 Hemd; wie viel Hemden geben 8 Ellen Leinw.? 2 Taglöhner bekommen 8 Pfd. Brod; wie viel erhält einer?

. . . . . | . . . $8 = 5 + 3$ od. $1 \times 5 + 3.$

. . . . . . | . . $8 = 6 + 2$ od. $1 \times 6 + 2.$

. . . . | . $8 = 7 + 1$ od. $1 \times 7 + 1.$

8 kr., wie viele Sechser? 8 Tage, wie viele Wochen? In meinen 2 Händen habe ich 8 Bohnen, wie viel in jeder? Welche 2 Zahlen, zusammen genommen, geben 8?

II. Zusammenzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.		b.
7 +? = 8	. . . .	8 — 1 = 7.
6 +? = 8	. . . .	8 — 2 = 6.
5 +? = 8	. . . .	8 — 3 = 5.
2c.		2c.

c.

$8 > 7$ um 1 : : : : : : : . $7 < 8$ um 1.

$8 > 6$ um 2 : : : : : : . . $6 < 8$ um 2.

$8 > 5$ um 3 : : : : : . . . $5 < 8$ um 3.

2c. 2c.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2 × 3 + 2, die Hälfte, 3 dazu, 5 ab, 4mal, 1 Viertel ꝛc. **2)** Wie heißt die Zahl: legt man noch 3 dazu, so erhält man 8? **3)** Wie viel ist 1 × 2? 2 × 2? 3 × 2? 4 × 2? **4)** Welche Zahl muß man 2mal nehmen, um 8 zu erhalten? **5)** Wie heißt die Zahl, die in 8 viermal liegt? **6)** Was für ein Theil ist 1 von 3? von 6? von 8? **7)** Von welcher Zahl ist 2 der halbe Theil? der dritte Theil? der vierte Theil? **8)** Wie viel beträgt die Hälfte von 2, 4, 6, 8? **9)** Wie viel machen $^3/_4$ von 8? **10)** Um wie viel ist 2 × 4 mehr, als 2 × 3? **11)** Um wie viel ist die Hälfte von 6 kleiner, als die Hälfte von 8? **12)** Wie heißt die Zahl, welche um 3 kleiner ist, als 8? **13)** Von 8 Aepfeln hat August nur noch 2; wie viele hat er gegessen? **14)** Wie viele Pfennige machen 2 kr.? **15)** Wie viele Groschen erhält man für 4 Sechser? **16)** 8 halbe Gulden machen wie viele ganze? **17)** Von 2 Kühen gibt die eine 3 Maas Milch und die andere 5; wie viel Milch geben beide zusammen? **18)** 6 Maas davon verbraucht die Bäuerin selbst; die übrige Milch verkauft sie, die Maas zu 4 kr.; wie viel löst sie daraus? **19)** Ein Seidlein Milch kostet 2 kr.; was kosten 2 Seidlein? 3 Sdl.? 4 Sdl.? **20)** Für 4 kr. erhält man 8 Pfirsiche; wie viel für 1 kr.? **21)** 2 Schüler theilen 8 Schieferstifte miteinander; wie viele wird einer erhalten?

Die Neun.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • •

8 + 1 = 9.

b.

• | • | • | • | • | • | • | • | •

9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1; 9 = 9 × 1.

9 × 1 = 9

1 : 9 = 9 mal

1 = $^1/_9$ × 9.

Der kleine Fritz lernt täglich 1 Buchstaben kennen; wie viel in 9 Tg.? Für 9 kr. kauft sich Karl 9 Federkiele; was kostet einer?

• • | • • | • • | • • | •

9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1; 9 = 4 × 2 + 1.

9 pf. = ? Zweier.

9 Stücke = ? Paare ꝛc.

• • • | • • • | • • •

$9 = 3 + 3 + 3$; $9 = 3 \times 3$.

$3 \times 3 = 9$

$3 : 9 = 3$ mal

$3 = \frac{1}{3} \times 9$.

(Zeige mir $\frac{1}{3}$ von 9! $\frac{2}{3}$ von 9!)

Ein Schäfer verkauft 3 Schäfchen, jedes zu 3 fl.; wie viel löst er? Wie viele Groschenstücke erhält man für 9 einzelne Kreuzer? 3 Kinder theilen unter sich 9 Kirschen; wie viel bekommt eines?

• • • • | • • • • | •

$9 = 4 + 4 + 1$; $9 = 2 \times 4 + 1$.

9 pf. = ? kr.

9 Qt. = ? Loth.

9 Schoppen = ? Maas.

• • • • • | • • • • $9 = 5 + 4$ od. $1 \times 5 + 4$.

• • • • • • | • • • $9 = 6 + 3$ od. $1 \times 6 + 3$.

• • • • • • • | • • $9 = 7 + 2$ od. $1 \times 7 + 2$.

• • • • • • • • | • $9 = 8 + 1$ od. $1 \times 8 + 1$.

In meinen 2 Händen habe ich 9 Bohnen, wie viel in jeder?

In einem Garten stehen 9 Bäume, Birn- und Aepfelbäume; wie viel können es von jeder Sorte sein?

Welche zwei Zahlen machen zusammen 9?

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.		b.
8 + ? = 9	• • • • • • • • •	9 — 1 = 8.
7 + ? = 9	• • • • • • • • •	9 — 2 = 7.
6 + ? = 9	• • • • • • • • •	9 — 3 = 6.
ꝛc.		ꝛc.

c.

9 > 8 um 1	• • • • • • • • • • • • • • • • •	8 < 9 um 1.
9 > 7 um 2	• • • • • • • • • • • • • • • •	7 < 9 um 2.
9 > 6 um 3	• • • • • • • • • • • • • • •	6 < 9 um 3.
ꝛc.		ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 5 — 2 + 4 — 3 + 2 + 3 — 6 + 2 + 4 — 5 + 3 + 2 ꝛc. **2)** Wie heißt die Zahl: lege ich 4 dazu, so erhalte ich 9? **3)** Wie viel ist 2×3? 3×3? **4)** Um wie viel ist 3×3 mehr, als 2×4? **5)** Welche Zahl muß ich 3 mal nehmen, um 9 zu

bekommen? 6) Wie oft ist 3 in 3? 3 in 6? 3 in 9? 7) Wie heißt die Zahl, welche in 9 dreimal enthalten ist? 8) Wer sucht mir, wie viel $^2/_3$ von 9 betragen? 9) Von welcher Zahl ist 3 der halbe Theil? der dritte Theil? 10) Was für ein Theil ist 1 von 3? von 5? von 7? von 9? 11) Um wie viel ist die Zahl 9 größer als 3×2? 12) Welche Zahl ist es, welche um 4 kleiner ist, als 9? 13) In welche gleichen Theile läßt sich 9 zerlegen? In welche zwei ungleichen? 14) 9 Seidlein, wie viele Maas? 9 kr., wie viele Gr.? 9 Qt., wie viele Loth? 9 kr., wie viele Sechser? 9 Tg., wie viele Wch.? 15) Marie bekommt 1 Sechser und 1 Gr., um für 8 kr. Brod zu holen; wie viel Geld muß sie wiederbringen? 16) Emilie ist 9 Jahre alt, ihre Schwester Auguste ist um 3 Jahre jünger; wie alt ist diese? 17) Die fleißige Louise fängt Nachmittags um 4 Uhr an zu stricken und hört um 9 Uhr Abends wieder auf; wie viele Stunden lang hat sie gestrickt? 18) Eugen und Fritz theilen 9 Kirschen mit einander so, daß Eugen eine mehr erhält, als Fritz; wie viel bekommt jeder auf seinen Theil? 19) Anton hat 9 Bg. Papier und will Schreibhefte daraus machen, jedes zu 3 Bogen; wie viele Schreibhefte wird er bekommen? 20) Ein Bauer pflügt täglich 3 Morgen Ackerland, wie viel in 2 Tg.? in 3 Tg.?

Die Zehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • • • • •

$9 + 1 = 10.$

$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1;\ 10 = 10 \times 1.$

$10 \times 1 = 10$

$1 : 10 = 10$ mal

$1 = {}^1/_{10} \times 10.$

(Zeige mir $^1/_{10}$ von 10! $^3/_{10}$ von 10! $^7/_{10}$ von 10!)

Karl holt 10 Kreuzerkipfe; wie viel muß er dafür zahlen?

In 10 Stahlfedern theilten sich 10 Schüler; wie viel bekam einer?

• • | • • | • • | • • | • •

$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2;\ 10 = 5 \times 2.$

$5 \times 2 = 10$

$2 : 10 = 5$ mal

$2 = {}^1/_5 \times 10.$

(Zeige mir $^1/_5$ von 10! $^2/_5$ von 10! etc.)

Eine Frau verkauft 5 Gänse, jede für 2 fl.; was ist ihr Erlös?

Wie viele zweispännige Chaisen kann man mit 10 Pferden bespannen?

5 Ellen Tuch kosten 10 fl.; wie viel kostet 1 Elle? 2 Ellen?

• • • | • • • | • • • | •

$10 = 3 + 3 + 3 + 1;\ 10 = 3 \times 3 + 1.$

10 kr., wie viel Groschen?

• • • • | • • • • | • •

$10 = 4 + 4 + 2$; $10 = 2 \times 4 + 2$.

10 pf. = ? kr.

10 Qt. = ? Lth.

10 Schp. = ? Ms.

• • • • • | • • • • •

$10 = 5 + 5$; $10 = 2 \times 5$.

$2 \times 5 = 10$

5 : 10 = 2 mal

$5 = \frac{1}{2} \times 10$.

1 Ms. Bier kostet 5 kr.; wie viel muß man für 2 Ms. zahlen? Von 10 Birnen ißt Anna täglich 5; wie viele Tg. hat sie daran? Für 2 Gr. erhielt man 10 Trauben, wie viel für 1 Gr.?

$10 = 6 + 4$; $10 = 1 \times 6 + 4$.

$10 = 7 + 3$; $10 = 1 \times 7 + 3$.

$10 = 8 + 2$; $10 = 1 \times 8 + 2$.

$10 = 9 + 1$; $10 = 1 \times 9 + 1$.

10 kr. = ? Sechser; 10 Tg. = ? Wch.

10 Kinder, Knaben und Mädchen, gehen mit einander in die Schule; wie viele Knaben und wie viele Mädchen können es sein?

In welche zwei Theile, gleiche und ungleiche, kann man die Zahl 10 zerlegen? (9 + 1, 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4, 5 + 5, 4 + 6 ꝛc.)

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.
9 + ? = 10	10 — 1 = 9.
8 + ? = 10	10 — 2 = 8.
7 + ? = 10	10 — 3 = 7.
ꝛc.	ꝛc.

c.

10 > 9 um 1; 9 < 10 um 1.

10 > 8 um 2; 8 < 10 um 2.

10 > 7 um 3; 7 < 10 um 3.

ꝛc. ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) $2 \times 5 - 4 + 3 - 2 + 3 - 5 + 3 + 2 - 7 + 2 + 3$ ꝛc. **2)** Wie viel muß ich zu 3 legen, um 10 zu erhalten? **3)** Wie heißt die Zahl, zu der man noch 4 legen muß, um 10 zu bekommen? **4)** Wie viel muß ich von 10 wegnehmen, wenn 7 übrig bleiben soll? **5)** Wie viel ist 2×2? 2×3? 2×4? 2×5? **6)** Wie heißt die Zahl: wenn man sie 2 mal nimmt, so gibt es 10? **7)** Wie oft muß man 2 nehmen, um 10 zu erhalten? **8)** Wie oft ist 1 in 10? 2 in 10? 5 in 10? **9)** In welcher Zahl ist 5 zweimal enthalten? **10)** Welche Zahl ist in 10 fünfmal? **11)** Wie groß

ist die Hälfte von 2? 4? 6? 8? 10? **12)** Was für ein Theil ist 5 von 10? **13)** Wovon ist 1 der 4te Theil? der 7te Theil? der 10te Theil? **14)** Um wie viel ist 4 kleiner als 10? **15)** Welche Zahl ist um 4 kleiner, als 10? **16)** Um wie viel ist 10 größer, als 5? **17)** 10 ist um 2 größer, als welche Zahl? **18)** Um wie viel ist die Hälfte von 10 größer, als die Hälfte von 6? **19)** Welche 3 Geldstücke machen zusammen 10 kr.? **20)** Von 10 kr. gibt Karl 1 Gr. einem Armen; wie viel Geld hat er noch? **21)** 1 Loth Kaffee kostet 2 kr.; was kosten 2 Loth? 3 Loth? 4 Loth? 5 Loth? **22)** Ein Metzger kauft 2 Kälber, jedes um 5 fl.; wie viel muß er zahlen? **23)** Wie viele Kleidchen lassen sich aus 10 Ellen Zeug machen, wenn man zu jedem nimmt 5 Ellen? 2 Ellen? **24)** 2 Pfund Salz kosten 10 kr.; was kostet 1 Pfd.? **25)** 5 Muskatnüsse zu 10 kr.; was kostet eine?

Uebersicht und Wiederholung.

Die bereits vorgekommenen Operationen werden nun zur möglichst großen Fertigkeit gebracht. Dabei steht die äußere Anschauung im Hintergrunde. Sie tritt nur dann hervor, wenn sich hin und wieder bei einem oder dem andern Schüler findet, daß seinem Bewußtsein etwas entwichen ist. Außerdem muß derselbe jede Zahl mit der Menge ihrer Einer im Geiste sich vorstellen; er muß sie also innerlich anschauen und so zu dem verlangten Resultate kommen.

I. Zählen und Zerlegen.

a. Zählen.

Frei im Kopfe.

1) Auf- und Abwärtszählen zwischen 1 und 10.
2) Welche Zahl steht vor 4? nach 4? vor 7? nach 7? 2c.
3) Zwischen welchen 2 Zahlen steht 6? 9? 4? 2c.
4) Welche Zahlen stehen zwischen 2 und 6? zwischen 5 und 8? 2c.

b. Zerlegen.

Frei im Kopfe.

$2 = 1 + 1$	$3 = 2 + 1$	$4 = 3 + 1$	$5 = 4 + 1$	$6 = 5 + 1$
	$= 1 + 2$	$= 2 + 2$	$= 3 + 2$	$= 4 + 2$
		$= 1 + 3$	$= 2 + 3$	$= 3 + 3$
			$= 1 + 4$	2c.

So fort bis 10.

Folgendes wird an die Wandtafel geschrieben und dann so lange geübt, bis jeder Schüler fest und sicher darin ist.

5=1+	7=6+	10=2+	9=3+	8=1+	4=1+
10=9+	5=2+	9=6+	10=1+	6=5+	9=8+
6=3+	8=6+	5=3+	7=5+	9=2+	7=4+
8=7+	6=1+	8=5+	5=4+	7=1+	10=8+
10=5+	9=4+	6=2+	10=3+	4=3+	8=2+
7=3+	4=2+	10=4+	8=4+	10=7+	6=4+
9=5+	10=6+	7=2+	9=7+	8=3+	9=1+

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a. Zuzählen.

Frei im Kopfe.

Mit 1.

1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1, 5 + 1, 6 + 1, 7 + 1, 8 + 1, 9 + 1.

Ich nenne Zahlen, und ihr zählt immer Eins dazu.

6! (6 + 1 = 7). 4! (4 + 1 = 5). 8! (8 + 1 = 9) ꝛc.

Mit 2.

1 + 2, 3 + 2, 5 + 2, 7 + 2; 2 + 2, 4 + 2, 6 + 2, 8 + 2.

Nun zählt ihr zu jeder Zahl, die ich nenne, immer 2.

6! (6 + 2 = 8.) 3! (3 + 2 = 5.) 7! (7 + 2 = 9) ꝛc.

Ebenso mit 3, 4, 5 ꝛc. Nur sehe man darauf, daß die Summe nie mehr als 10 betrage.

Hierauf wird an die Wandtafel geschrieben und bis zur Sicherheit geübt:

3 + 2	6 + 3	9 + 1	3 + 4	6 + 1	1 + 7
7 + 3	4 + 2	2 + 6	1 + 3	5 + 3	2 + 4
5 + 4	3 + 5	5 + 1	8 + 2	2 + 7	5 + 5
4 + 6	2 + 8	6 + 4	4 + 1	1 + 6	2 + 2
8 + 1	5 + 2	1 + 8	3 + 7	3 + 3	1 + 4
2 + 5	4 + 4	4 + 3	2 + 3	7 + 1	4 + 5
1 + 9	3 + 6	7 + 2	6 + 2	1 + 2	1 + 5

b. Abziehen.

Frei im Kopfe.

Mit 1.

10 — 1, 9 — 1, 8 — 1, 7 — 1, 6 — 1, 5 — 1, 4 — 1 ꝛc.

Ich nenne Zahlen, und ihr zieht 1 davon ab.

5! (5 — 1 = 4.) 8! (8 — 1 = 7.) 6! (6 — 1 = 5) ꝛc.

Mit 2.

Nun zieht ihr von jeder Zahl, die ich nenne, immer 2 ab.

9! 9 — 2 = 7.) 5! (5 — 2 = 3.) 10 — 2 = 8) ꝛc.

Ebenso mit 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

An die Wandtafel geschrieben, wird nun auch Folgendes bis zur Sicherheit geübt.

3 — 2	5 — 4	5 — 1	9 — 8	9 — 6	8 — 6
7 — 3	10 — 3	10 — 4	6 — 2	6 — 6	10 — 10
10 — 5	7 — 6	5 — 3	9 — 4	8 — 2	7 — 2
9 — 2	5 — 2	9 — 9	5 — 1	10 — 8	9 — 7
5 — 5	8 — 7	8 — 1	8 — 4	9 — 1	10 — 2
6 — 4	9 — 5	6 — 3	7 — 5	6 — 5	4 — 4
10 — 8	8 — 3	3 — 1	10 — 2	4 — 2	7 — 4
8 — 5	3 — 3	10 — 7	4 — 3	9 — 3	10 — 1

Zuzählen in Verbindung mit Abziehen.

4 + 5 — 8	3 + 3 — 4	5 — 3 + 6	10 — 7 + 4
6 + 2 — 5	7 + 3 — 6	8 — 4 + 2	9 — 5 + 2
4 + 6 — 3	3 + 5 — 2	10 — 8 + 7	8 — 6 + 7
7 + 2 — 6	2 + 7 — 5	7 — 6 + 5	8 — 4 + 7
2 + 5 — 7	4 + 2 — 3	6 — 4 + 3	5 — 2 + 5

Die Form für die mündliche und schriftliche Ausrechnung dieser Aufgaben ist folgende:

4 + 5 = 9	5 — 3 = 2
9 — 8 = 1	2 + 6 = 8
4 + 5 — 8 = 1	5 — 3 + 6 = 8

Das sind kurze und einfache Schlüsse, wodurch nicht nur das Nachdenken, sondern auch das Sprechvermögen der Kinder außerordentlich geübt wird. Darum halte man darauf. Der Unterricht im Rechnen muß auch sprachbildend sein. Und er kann es sein, wie nicht leicht ein anderer. Auf keinem andern Gebiete des Unterrichts ist es möglich, die Kinder Alles, was sie angeschaut, aufgefaßt und sich klar vorgestellt haben, in dem Maße genau sprachlich darstellen zu lehren, wie auf dem Gebiete des Rechenunterrichts. Auf keinem andern Gebiete des Unterrichts können schon die kleinsten Schulkinder so selbstständig Vorstellungen, Urtheile und Schlüsse bilden und die ganze Thätigkeit ihrer noch so unentwickelten Denkkraft so zusammenhängend und erschöpfend darstellen lernen, als auf diesem; denn ihre sprachliche Mittheilung besteht hier lediglich in einem Beschreiben oder Erzählen dessen, was sie gleichzeitig wirklich thun oder so eben gethan haben.

---

c. Unterscheiden.

Zwei gerade Linien von einerlei Länge, zwei Kugeln von einerlei Größe, die Zahlen 3 und 3 rc. sind einander gleich. Eine kleinere und eine größere gerade Linie, eine kleinere und eine größere Kugel, die Zahlen 2 und 3 rc. sind nicht einander gleich; sie unterscheiden sich von einander.

Wodurch unterscheiden sich diese zwei (ungleich langen) Schieferstifte von einander? Wodurch sich diese zwei Linien? Wodurch können sich zwei Häuser von einander unterscheiden? Wodurch zwei Bäume? Wodurch zwei Zahlen? Wodurch unterscheiden sich z. B. die Zahlen 5 und 8 von einander? (8 ist um 3 größer als 5, und 5 ist um 3 kleiner als 8. Die Zahlen 5 und 8 unterscheiden sich also um 3 von einander. Der Unterschied zwischen 5 und 8 ist 3.)

Um wie viel unterscheiden sich von einander die Zahlen

3 u. 9?	9 u. 6?	10 u. 3?	2 u. 3?	4 u. 7?
2 u. 6?	6 u. 5?	2 u. 5?	4 u. 1?	6 u. 10?
5 u. 7?	4 u. 2?	6 u. 1?	3 u. 7?	9 u. 5?
8 u. 10?	5 u 4?	2 u. 9?	10 u. 5?	2 u. 8?
2 u. 7?	10 u. 7?	8 u. 6?	8 u. 9?	6 u. 4?

III. Messen und Theilen.

Frei im Kopfe.

1) Angabe, aus wie vielmal 1, 2, 3 :c. jede Zahl besteht.

$1=1\times1$	$2=2\times1$	$3=3\times1$	$4=4\times1$	$5=5\times1$
	$2=1\times2$	$3=1\times2+1$	$4=2\times2$	$5=2\times2+1$
		$3=1\times3$	:c.	$5=1\times3+2$
				$5=1\times4+1$
				$5=1\times5$

So fort bis 10.

2) Wie viel ist

1×2?	$4\times2+1$?	$5\times2-1$?	1×3?	$2\times3+2$?	2×4?
2×2?	$2\times2+1$?	$3\times2-1$?	2×3?	$3\times3-2$?	$2\times4+2$?
3×2?	$5\times2+1$?	$1\times2-1$?	3×3?	$2\times3-1$?	$2\times4-3$?
4×2?	$1\times2+1$?	$4\times2-1$?	$1\times3+2$?	$1\times3-2$?	2×5?
5×2?	$3\times2+1$?	$2\times2-1$?	$3\times3+1$?	$2\times3-2$?	$2\times5-4$?

Wie viel ist $4\times2+1$? Antwort: $4\times2=8$, $8+1=9$.

3) Wie oft ist enthalten

1 in 3?	2 in 2?	2 in 3?	3 in 3?	3 : 4?	4 : 4?	5 : 5?
1 in 5?	2 in 8?	2 in 7?	3 in 9?	3 : 7?	4 : 8?	5 : 10?
1 in 4?	2 in 4?	2 in 5?	3 in 6?	3 : 5?	4 : 5?	5 : 8?
:c.	:c.	:c.		:c.	:c.	:c.

4) Was für ein Theil ist

1 von 2?	1 von 8?	2 von 4?	3 von 6?
1 „ 5?	1 „ 4?	2 „ 8?	3 „ 9?
1 „ 3?	1 „ 7?	2 „ 6?	4 „ 8?
1 „ 9?	1 „ 10?	2 „ 10?	5 „ 10?

5) Wie viel ist

die Hälfte von 2? 6? 4? 10? 8?	$^1/_3$ von 6? $^2/_3$ von 6?
der 3. Theil von 3? 6? 9?	$^1/_3$ von 9? $^2/_3$ von 9?
der 4. Theil von 4? 8?	$^1/_4$ von 8? $^3/_4$ von 8?
der 5. Theil von 5? 10?	$^1/_5$ von 10? $^4/_5$ von 10?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) Zu welcher Zahl muß man 5 legen, um 9 zu erhalten?
2) Welche Zahl ist um 3 größer als 4? um 3 kleiner als 4?
3) Wie heißt die Zahl: nehme ich 6 davon weg, so bleibt 4 übrig?
4) Um wie viel ist 3 + 2 weniger, als 7 + 2?
5) Zerlege 10 in 2 gleiche und 1 ungleichen Theil! (4 + 4 + 2.)
6) Wie heißt die Zahl: wenn ich sie 4mal nehme, so erhalte ich 8?
7) Wie heißt die Zahl, welche in 10 weniger 1 dreimal liegt?
8) In welcher Zahl ist 5 zweimal enthalten?
9) Von welcher Zahl ist 2 der vierte Theil?
10) Um wie viel sind $^2/_3$ von 9 größer, als $^2/_3$ von 6?
11) Wie viele Zweier (Doppelpfennige) sind 5 kr.? 3 kr.?
12) Ein Mann kauft eine Ziege für 4 fl., ein Schaf für 3 fl. und eine Gans für 2 fl.; wie viel muß er im Ganzen zahlen? Er hat aber nur 6 fl.; wie viel bleibt er schuldig?
13) Ein Kaufmann fordert für die Elle 8 kr.; es werden aber 2 kr. abgehandelt; wie theuer hat er nun die Elle verkauft?
14) Wie viele Kreuzer machen 4 pf.? 5 pf.? 6 pf.? 2c.
15) Eine Bäuerin hat drei Kühe; jede gibt des Morgens 3 Maas Milch; wie viel Milch geben die 3 Kühe mit einander? — Von den 9 Maas Milch behält die Frau 7 für sich; die andere Milch verkauft sie, die Maas für 4 kr.; wie viel macht ihr Erlös?
16) Ich weiß eine Zahl, die um 5 kleiner ist als 8; wie heißt sie?
17) 2 Loth 2 Quint sind zusammen wie viel Quint?
18) Anton war 1 Wch. und 2 Tg. krank, wie viel Tag lang also?
19) Ein Herr ladet 10 Gäste; es bleiben ihrer jedoch 4 aus; wie viele kommen?
20) Eine Henne hat 9 Eier gelegt; 5 davon nimmt die Hausfrau zu einem Eierkuchen; die andern verkauft sie, jedes zu 2 pf.; wie viel nimmt sie dafür ein?
21) August ist 7 Jahr alt; Hermann um 3 Jahre jünger; wie alt ist Hermann?
22) Emma spricht: „Rathe, wie viel Nüsse habe ich?" Theodor antwortet: 4. Darauf sagt Emma: „Ich habe 2mal so viel, weniger eine." Wie viel Nüsse hat sie also?
23) Wie viele Loth machen 7 Quint? 10 Quint?
24) In einem Strauße sind 3 Nelken, 3 Rosen und 4 Narzissen; 2 Rosen und 2 Narzissen fallen ab; wie viele Blumen sind noch in dem Strauß?
25) Von einer Stadt zur andern sind 10 Meilen; wie lange braucht

ein Mann, um diesen Weg zu gehen, wenn er jeden Tag 5 Meilen macht?

26) Wie viele Vögel sitzen auf einem Dache, wenn sie zusammen 6 Füße haben?

27) Ein Sechser, 1 Gr. und 1 kr. machen im Ganzen wie viel kr.?

28) Wie viele Groschen machen 6 kr.? 9 kr.? 10 kr.?

29) Eine Maas Bier kostet 8 kr.; wie viel kostet 1 Seidlein?

30) Ein Knabe hat 9 Bohnen und will daraus 3 Häuflein machen; wie viel muß er zu 1 Häuflein nehmen?

31) Zwei Männer verzehren miteinander 6 Grsch.; wie viel muß jeder davon bezahlen?

32) Drei Ellen Band kosten 6 kr., was kostet 1 Elle?

33) Eine Frau hatte 10 Gänse; 2 davon hat sie geschlachtet, 3 hat sie verkauft, und eine wurde vom Fuchse gestohlen; wie viele sind noch übrig?

34) Wer zerlegt mir die 6 in drei ungleiche Zahlen? (1 + 2 + 3.)

35) In welche 4 ungleichen Zahlen läßt sich 10 zerlegen? (1+2+3+4.)

36) Anton kauft 3 Schieferstifte, von denen jeder 1 pf. kostet; er gibt 1 kr. hin; wie viel Geld muß ihm der Kaufmann zurückgeben?

37) Heinrich bekommt vom Vater 1 Sechser und 1 Groschen, um 1 Maas Bier für 7 kr. zu holen; wie viel Geld muß er wiederbringen.

38) 1 Ei kostet 2 kr; was kosten 2 Eier? 3 Eier? 4? 5?

39) 1 Kipf kostet 3 kr.; wie viel kosten 2 Kipfe? 3 K.?

40) Für 1 kr. erhält man 4 Aepfel; wie viel für 2 kr.?

41) Für 1 Groschen erhält man 4 Aprikosen; wie viel für 2 Gr.?

42) 2 Seidlein machen 1 Maas; wie viel Ms. machen 4 Seidlein? 6 Seidlein? 8 Seidlein? 10 Seidlein?

43) Für 3 Kreuzer erhält man 1 Elle; wie viel Ellen bekommt man für 6 kr.? für 9 kr.?

44) Eine Mutter nimmt zum Kleide für ihr Töchterchen 4 Ellen Zeug; wie viele solche Kleider kann sie aus 8 Ellen machen?

45) Für 5 kr. bekommt man 1 schönen Bilderbogen; wie viele solche Bilderbogen kann man für 10 kr. kaufen?

46) Was kostet 1 Bleistift, wenn 2 Bleistifte 4 kr. kosten?

47) Ein Mann geht in 2 Tagen 10 Meilen weit; wie weit geht er in 1 Tag?

48) Eine Frau braucht in 3 Wochen 9 Pfd. Zucker; wie viel in einer Woche?

49) 4 Brüder haben unter sich 8 Aepfel zu theilen; wie viel bekommt einer?

50) Für 5 Ms. Kartoffeln muß man 10 kr. bezahlen; wie viel kostet 1 Maas?

Der Zehner.

4 Quint zusammen heißen 1 Loth; 4 Pfennige zusammen heißen 1 Kreuzer; 3 Kreuzer = 1 Groschen; 6 kr. = 1 Sechser. So nennt man zehn Eins oder zehn Einer, zusammen genommen, einen Zehner.

Sind 9 Einer auch 1 Zehner? Wie viel fehlt daran? Wie viel fehlt an 8 Einern zu 1 Zehner? Wie viel an 7 Einern? ꝛc.

| . . . . | ist = 1 Zehner und 0 Einer, geschrieben 10.

Was bedeutet die Ziffer 1, wenn sie allein (1) steht? Was bedeutet sie, wenn sich zu ihrer Rechten eine Null befindet? (10) Schreibt 1 Einer! 1 Zehner!

Der zweite Zehner.

Der zweite Zehner wird dem Wesen nach gerade so behandelt, wie der erste. Nur insofern tritt eine Aenderung ein, als jetzt der Schüler, mit dem Gange sowie mit dem Verfahren bekannt, am Unterricht mehr selbstthätig Antheil nimmt und über das, was er thut und erkennt, sich mehr im Zusammenhange ausspricht, als bisher.

Die Elf.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

In die erste oder oberste Stange der Rechenmaschine thut man 10, in die nächste darunter 1 Kugel.

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
●

Wie heißen die 10 Einer zusammen genommen? Zu welchem Zehner gehört der einzelne Einer (in der zweiten Stange)? Wie viele Einer fehlen noch am zweiten Zehner?

1 Zehner und 1 Einer, Zehn und Eins, nennt man mit einem Worte Elf und setzt dafür die Ziffern 11. — Die Ziffer 1 zur Linken bedeutet 1 Zehner, die Ziffer 1 zur Rechten 1 Einer. Beide zusammen also gelten 1 Zehner und 1 Einer, 10 + 1 oder Elf.

b.

$11 = 11 \times 1$	$11 = 1 \times 6 + 5.$
$= 5 \times 2 + 1.$	$= 1 \times 7 + 4.$
$= 3 \times 3 + 2.$	$= 1 \times 8 + 3.$
$= 2 \times 4 + 3.$	$= 1 \times 9 + 2.$
$= 2 \times 5 + 1.$	$= 1 \times 10 + 1$ (1 Z. + 1 E.)

Lehrverfahren.

Die Veranschaulichung geschieht am Rechenbrette oder durch Punkte oder Striche. A tritt vor! Zerlege die 11 Kugeln so, daß auf jeden

Theil **eine** kommt! Wie vielmal 1 Kugel gibt es? 11 ist also wie vielmal 1?

aa. Zähle die 11 × 1 K. zusammen! Wie viel ist 11 × 1? Wie oft muß man 1 nehmen, um 11 zu erhalten? 11 ist also wie vielmal 1? 11 ist das Wievielfache von 1?

bb. Untersuche, wie oft 1 K. von 11 K. weggenommen werden kann! (1mal, 2mal, 3mal 2c.) Wie oft kann 1 von 11 weggenommen werden? Wie oft ist daher 1 in 11 enthalten?

cc. In wie viel Theile muß man 11 zerlegen, damit auf jeden Theil 1 kommt? 1 ist also was für ein Theil von 11? (Was für ein Theil ist 1 von 2? von 7? von 10?)

Nun thue von den 11 K. immer **zwei** zusammen! 11 = 5 × 2 + 1.

aa. Wie viel ist 5 × 2? Wie viel ist 5 × 2 + 1? Rechne es! (5 × 2 = 10, 10 + 1 = 11.)

bb. Untersuche, wie oft 2 von 11 hinweg genommen werden kann! Wie oft ist also 2 in 11 enthalten? (5mal, Rest 1.)

Anmerk. Da 11 sich nicht so theilen läßt, daß auf jeden Theil 2 kommt, so ist 2 auch kein einfacher Theil von 11; 2 ist von 11 weder 1 Fünftel, noch 1 Sechstel.

Auf dieselbe Weise wird verfahren, wenn gesucht wird, aus wie vielmal 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 die Zahl 11 besteht.

Hierauf werden die Schüler durch Vormachen an der Wandtafel angeleitet, dieselbe Operation mit Punkten oder Strichen auf der Schiefertafel auszuführen. Nämlich so:

| | | | | | | | | |
                  |

11 = 11 × 1.

|| || || || ||
             |

11 = 5 × 2 + 1.

||| ||| |||
          ||

11 = 3 × 3 + 2.

u. s. w.

Am folgenden Tage muß dann jeder von ihnen im Stande sein, die einzelnen Zerfällungen in der Reihenfolge vor- und rückwärts, sowie auf Befragen außer der Ordnung anzugeben.

Zuletzt wird die Zahl 11 in ihre Posten zerlegt.

11 = 10 + 1
   = 9 + 2
   = 8 + 3 2c.

II. Zuzählen, Abziehen und Unterscheiden.

Zur Veranschaulichung dient wieder die Rechenmaschine. Der Lehrer nennt eine Aufgabe, oder einer der Schüler liest sie aus dem

Aufgabenheftchen vor, und ein zweiter führt dieselbe am Rechenbrette, das Nöthige dazu sprechend, vor den Augen Aller aus. In diesem Falle hat der Lehrer die Schüler nur zu überwachen und von Zeit zu Zeit einen andern an das Rechenbrett zu berufen.

Sind mehrere Klassen zugleich zu unterrichten, so kann sich hier der Lehrer schon nach kurzer Zeit durch einen der größern Schüler vertreten lassen.

a.

10 + ? = 11
9 + ? = 11
8 + ? = 11 ꝛc.

Lehrverfahren.

8 + ? = 11.

Nachdem die Kugeln mit einem Wurfe auf eine Seite gebracht worden sind, nennt der Lehrer die Zahl 8, und ein Schüler schiebt am Rechenbrette von der obersten Stange sofort 8 Kugeln auf die entgegengesetzte Seite. Dann kommt die Frage: Wie viel muß man zu 8 thun, um 11 zu erhalten? Die Antwort ist: Noch 2 + 1 oder 3. Indem nun derselbe Schüler die 2 übrigen Kugeln von der obern Stange und die eine von der nächsten Stange zu den 8 Kugeln hinüber rückt, spricht er zugleich: 8 + 2 = 10, 10 + 1 = 11; 8 + 3 = 11.

So geschieht auch in den übrigen Fällen.

Sind die Schüler im Stande, die Operation am Rechenbrette fertig auszuführen; so üben sie sich dann in derselben frei im Kopfe. Einer von ihnen liest die Aufgaben aus dem Rechenbüchlein einzeln vor, indem er z. B. fragt: 8 und wie viel ist 11? Und ein anderer antwortet: 8 + 2 = 10, + 1 = 11; 8 + 3 = 11. (Mit Betonung der 3.)

Geht auch dieses fest und sicher, so nehmen alle Schüler Aufgabenheft und Schiefertafel zur Hand und rechnen eben dasselbe mit Ziffern.

b.

11 — 1 = ?
11 — 2 = ?
11 — 3 = ? ꝛc.

Lehrverfahren.

11 — 3 = ?

Auf die Frage: Wie viel ist 11 weniger 3? schafft der Schüler am Rechenbrett die 11 Kugeln auf eine Seite und antwortet: Zuerst nehme ich von 11 den einzelnen Einer weg, dann noch 2 Einer von dem Zehner. Und indem er nun dieses ausführt, spricht er weiter: 11 — 1 = 10, 10 — 2 = 8; 11 — 3 = 8.

Sind so alle Fälle in und außer der Reihenfolge wiederholt behandelt; so tritt, wie bei der vorhergehenden Uebung, das freie Kopfrechnen ein, und auf dieses folgt wieder das Rechnen mit Ziffern.

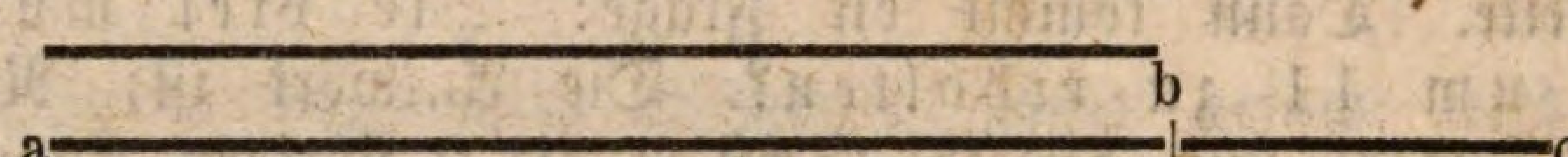
c.

$11 > 10$ um 1; $10 < 11$ um 1.
$11 > 9$ um 2; $9 < 11$ um 2.
$11 > 8$ um 3; $8 < 11$ um 3.
u. s. w.

Beispiel. Wie groß ist der Unterschied zwischen 8 und 11?

a. Um wie viel ist 8 kleiner als 11? Ich sehe zu, wie viel ich zu 8 legen muß, um 11 zu erhalten. $8 + 2 = 10$, $+ 1 = 11$. Zu 8 muß ich also noch $2 + 1$ oder 3 legen, um 11 zu erhalten. 8 ist daher um 3 kleiner als 11.

b. Um wie viel ist 11 größer als 8? Um dem Schüler zum Bewußtsein zu bringen, daß dieß gefunden wird, wenn man die kleinere Zahl von der größeren abzieht; so machen wir zwei Linien von ungleicher Länge und messen sie miteinander.



So viel die längere Linie über die kürzere hinausragt, um so viel ist sie größer als diese, d. i. um b c. Was müssen wir aber thun, damit wir das Stück b c für sich allein haben? (Wir müssen das Stück a b vom Ganzen wegnehmen; dann bleibt b c übrig.) Wir müssen also von der größeren Linie gerade so viel wegnehmen, als die kleinere beträgt.

Eben so machen wir es bei den Zahlen. Um zu finden, wie viel 11 größer ist als 8; so nehmen wir 8 von 11 weg.

• • • • • • • •
• • • • • • • • • • •

8 von 11 bleibt 3; 11 ist daher um 3 größer als 8.

11 ist um 3 größer als 8, und 8 ist um 3 kleiner als 11; der Unterschied zwischen 8 und 11 ist also 3.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) Wie viel ist $5 + 5 + 1 - 4 - 1 + 5 - 3 - 4 + 7 - 5$ rc. **2)** In welche Zahlenpaare läßt sich 11 zerlegen? **3)** Zwei Zahlen machen zusammen 11; die eine heißt 6; wie heißt die andere? Die eine heißt 4, wie die andere? rc. **4)** Um wie viel ist 11 mehr, als 7? **5)** Um wie viel ist 6 kleiner, als 11? **6)** Wie groß ist der Unterschied zwischen $2 \times 4 + 1$ und $2 \times 5 + 1$? **7)** Wie viel Nüsse hat Karl: bekäme er noch 5 dazu, so hätte er dann 11? **8)** Wie viel muß ich von 11 wegnehmen, wenn 9 übrig bleiben soll? **9)** Wie heißt die Zahl: nimmt man davon 3 weg, so bleibt 8 übrig? **10)** Wie rechnest du $3 \times 3 + 2$? **11)** Zwei Knaben theilen 11 Aepfel mit-

einander, wie thun sie das? **12)** Wie viel mal so groß als 1 ist 11? **13)** Was für ein Theil ist 1 von 7? von 9? von 11? **14)** In welcher Zahl ist 1 elfmal enthalten? **15)** 11 Zweier, wie viele Kreuzer? **16)** 11 kr., wie viele Groschen? **17)** 11 Quint, wie viele Loth? **18)** 11 kr., wie viele Sechser? **19)** 11 Tage, wie viel Wochen? **20)** Hermann hat 5 kr., seine Schwester hat nochmal so viel und noch 1 kr.; wie viel Geld hat diese?

Die Zwölf.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • • •
• •

1 Zehner 1 Einer + 1 Einer = 1 Zehner 2 Einer. Die 2 Einer gehören zum zweiten Zehner. Zu den 2 Einern gehören noch 8 Einer, bis der zweite Zehner voll ist.

1 Zehner und 2 Einer, 10 + 2, heißen zusammen Zwölf.

1 Zehner, mit Ziffern geschrieben = 10.
1 Z.+1 E., „ „ „ = 11.
1 Z.+2 E., „ „ „ = 12.

b.

12 = 12 × 1	12 = 2 × 6
= 6 × 2	= 1 × 7 + 5
= 4 × 3	= 1 × 8 + 4
= 3 × 4	= 1 × 9 + 3
= 2 × 5 + 2	= 1 × 10 + 2.

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.
11 + ? = 12	12 − 1 = ?
10 + ? = 12	12 − 2 = ?
9 + ? = 12 rc.	12 − 3 = ? rc.

Wie nimmt man 11 von 12 weg? Man nimmt von 12 erst 10, dann 1; 12 − 10 = 2, 2 − 1 = 1; 12 − 11 = 1.

c.

12 > 11 um 1; 11 < 12 um 1.
12 > 10 um 2; 10 < 12 um 2.
12 > 9 um 3; 9 < 12 um 3.
u. s. w.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 12 — 5 + 4 — 5 + 6 — 7 + 3 — 5 + 8 — 3 + 2 — 8 ꝛc. ꝛc. 2) Wie heißt die Zahl, zu der man noch 3 legen muß, um 12 zu erhalten? 3) Wie viel muß ich von 12 wegnehmen, wenn 8 übrig bleiben soll? 4) Wie viel ist 5 × 2? 3 × 2? 6 × 2? 4 × 2? 5) Wie viel 3 × 3? 2 × 3? 4 × 3? 6) Wie oft muß man 4 nehmen, um 12 zu bekommen? 7) Wie heißt die Zahl: wenn man sie 2 mal nimmt, so erhält man 12? 8) Wie oft ist 2 in 6? in 10? in 8? in 12? 9) In welcher Zahl liegt 3 zweimal? dreimal? viermal? 10) Wie heißt die Zahl, welche in 12 dreimal enthalten ist? 11) Wie groß ist die Hälfte von 8? von 4? von 12? von 6? 12) Von welcher Zahl ist 3 die Hälfte? 1 Drittel? 1 Viertel? 13) Was für ein Theil ist 4 von 8? von 12? 14) Wie viel betragen $^2/_3$ von 12? $^3/_4$ von 12? $^5/_6$ von 12? 15) 12 Stück nennt man ein Dutzend. Welcher Theil vom Dutzend sind 6 Stück? 4 Stück? 3 Stück? 2 Stück? 1 Stück? 16) Wie viele Stücke sind $^1/_2$ Dutzend? $^1/_3$ Dutzend? $^2/_3$ Dutzend? $^1/_4$ Dutzend? $^3/_4$ Dutzend? 17) 12 Monate nennt man 1 Jahr. Was für ein Theil vom Jahre sind 6 Monate? 4 Monate? 3 Monate? 2 Monate? 1 Monat? 18) Wie viele Monate sind $^1/_2$ Jahr? $^1/_3$ Jahr? $^2/_3$ Jahr? $^1/_4$ Jahr? $^3/_4$ Jahr? 19) Wie heißen die 12 Monate des Jahres? 20) Von 1 Dutzend Bleistifte verkauft ein Handelsmann 7 Stück; wie viel bleiben ihm davon übrig? 21) Marie hat ein Schwesterchen; wenn es am Leben bleibt, so ist es nach 4 Monat 1 Jahr alt; wie alt ist es jetzt? 22) Was kostet $^1/_2$ Dutzend Stühle, das Stück zu 2 fl.? 23) 3 Ms. Essig kosten 12 kr., was kostet 1 Ms.? 24) Von 1 Dutzend Eier braucht 1 Bauersfrau 8 Stück für sich; die andern verkauft sie, das Stück zu 3 pf.; wie viel wird sie dafür lösen? 25) Ein Landmann hat 12 Stück Schafe; den dritten und vierten Theil davon verkauft er; wie viel bleiben ihm?

Die Dreizehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •

• • •

1 Zehner 2 Einer + 1 Einer = 1 Z. 3 E. = 10 + 3 oder Dreizehn, geschrieben 13. Die 3 Einer gehören ꝛc.

b.

13 = 13 × 1	13 = 2 × 6 + 1
= 6 × 2 + 1	= 1 × 7 + 6
= 4 × 3 + 1	= 1 × 8 + 5
= 3 × 4 + 1	= 1 × 9 + 4
= 2 × 5 + 3	= 1 × 10 + 3

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
$12 + ? = 13$	$13 - 1 = ?$	$13 > 12$ um 1.
$11 + ? = 13$	$13 - 2 = ?$	$11 < 13$ um 2.
$10 + ? = 13$ 2c.	$13 - 3 = ?$ 2c.	$13 > 10$ um 3.
		$9 < 13$ um 4 2c.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) $2 \times 6 + 1 - 4 + 3 - 4 + 5 - 6 + 4 - 5 + 7 - 8$ 2c. **2)** In welche zwei verschiedenen Theile läßt sich 13 zerlegen? **3)** Wie weit ist 13 von 8 entfernt? **4)** Wie zählt man 4 zu 9? wie 5 zu 8? wie 6 zu 7? **5)** Wie zieht man 5 von 13 ab? **6)** Zu welcher Zahl muß man 6 legen, um 13 zu erhalten? **7)** Wie viel muß man von 13 wegthun, damit 11 übrig bleibt? **8)** Wie oft muß ich 1 nehmen, um 13 zu bekommen? **9)** Was für ein Theil ist 1 von 8? von 11? von 13? **10)** Um wie viel ist 2×6 weniger, als 13? **11)** 13 halbe Gulden, wie viele ganze? 13 kr., wie viele Groschen? 13 Quint, wie viel Loth? 13 kr., wie viele Sechser? 13 Tag, wie viele Wochen? 13 fl., wie viele Karolin? 13 Stück, wie viel Dutzend? **12)** Ein Taubenhändler kauft das Paar um 9 kr., und verkauft es wieder um 13 kr.; wie viele Kreuzer hat er übrig? **13)** Wilhelm hat 1 Sechser, 2 Groschen und 1 kr., wie viel im Ganzen? **14)** Davon gibt er 4 kr. in die Missionsbüchse, und für 1 Groschen kauft er sich ein Schreibheft; wie viel Geld bleibt ihm übrig?

Die Vierzehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • • • • •
• • • •

1 Zehner 3 Einer + 1 Einer = 1 Z. 4 Einer = 10 + 4 oder Vierzehn, geschrieben 14. — Die 4 Einer gehören 2c.

b.

$14 = 14 \times 1$	$14 = 2 \times 6 + 2$
$= 7 \times 2$	$= 2 \times 7$
$= 4 \times 3 + 2$	$= 1 \times 8 + 6$
$= 3 \times 4 + 2$	$= 1 \times 9 + 5$
$= 2 \times 5 + 4$	$= 1 \times 10 + 4$

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
13 + ? = 14	14 — 1 = ?	14 > 13 um 1.
12 + ? = 14	14 — 2 = ?	12 < 14 um 2.
11 + ? = 14 ꝛc.	14 — 3 = ? ꝛc.	14 > 11 um 3. ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2 × 7 — 5 + 4 — 6 + 4 — 7 + 10 — 3 + 2 — 8 ꝛc. **2)** Von 14 nehme ich 4 + 5 weg; wie viel bleibt übrig? **3)** Wie viel ist 14 mehr, als 3 × 4? **4)** Wie heißt die Zahl: nehme ich sie 2mal, so erhalte ich 14? **5)** Wie oft muß ich aber 2 nehmen, um 14 zu bekommen? **6)** Welche Zahl ist in 14 zweimal enthalten? **7)** Wie oft ist 2 in 14? **8)** Was für ein Theil ist 7 von 14? **9)** Wie viel beträgt der 7. Theil von 14? **10)** Suche $^6/_7$ von 14! **11)** 14 Tage, wie viele Wochen? **12)** 14 Monate, wie viele Jahre? **13)** 14 Groschen, wie viele Sechser? **14)** Karl hat 14 Nüsse; 3 davon ißt er, und 3 gibt er seiner Schwester; wie viel hat er noch? **15)** August hat 1 Sechser, 1 Gr. und 1 kr.; wie viel fehlt ihm noch auf 14 kr.? **16)** Wie viele Hände haben 7 Kinder miteinander? **17)** Wie viele Tage sind 2 Wochen? **18)** 2 Trauben kosten 14 kr.; was kostet eine?

Die Fünfzehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ●

1 Zehner 4 Einer + 1 Einer = 1 Z. 5 E. = 10 + 5 oder Fünfzehn, geschrieben 15. — Die 5 Einer gehören ꝛc.

b.

15 = 15 × 1	15 = 2 × 6 + 3
= 7 × 2 + 1	= 2 × 7 + 1
= 5 × 3	= 1 × 8 + 7
= 3 × 4 + 3	= 1 × 9 + 6
= 3 × 5	= 1 × 10 + 5

II. Zusammenzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
14 + ? = 15	15 — 1 = ?	15 > 14 um 1.
13 + ? = 15	15 — 2 = ?	13 < 15 um 2.
12 + ? = 15 ꝛc.	15 — 3 = ? ꝛc.	15 > 12 um 3 ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 3 × 5 — 3 — 3 + 6 — 4 — 4, 2mal, + 1, weniger 7 ꝛc. 2) Wie viel ist 15 mehr, als 2 × 6? 3) Was ist mehr: 3 × 5, oder 4 + 5 + 6? 4) Wie viele Liederverse kann Hermann schon, wenn er noch 3 dazu lernt, so kann er 15? 5) Wie viel ist 2 × 3? 3 × 3? 4 × 3? 5 × 3? 6) Wie viel einzelne Kreuzer erhält man für 5 Groschen? 7) Welche Zahl muß man 3mal nehmen, um 15 zu erhalten? 8) Was für ein Theil ist 3 von 6? von 9? von 12? von 15? 9) Wie oft kann man 3 Ellen von 15 Ellen wegnehmen? 10) Wie viel Hemden kann eine Mutter aus 15 Ellen Leinwand machen, wenn sie zu 1 Hemde 3 Ellen braucht? 11) 3 Brüder bekommen am heiligen Christfeste 15 vergoldete Nüsse miteinander, wie viel erhält einer davon? 12) 15 kr., wie viele Gr.? Sechser? 13) 15 Qt., wie viele Loth? 14) 15 Tg., wie viele Wochen? 15) Ein Knabe erhält vom Vater 6 kr., von der Mutter 5 kr. und von seinem Pathen 4 kr.; wie viel Geld hat er bekommen? 16) Davon gibt er täglich 1 kr. aus; wie viele Tage hat er daran? 17) Auguste hat 2 Sechser und 1 Gr.; davon gibt sie 1 Sechser und 2 kr. einer armen Frau; wie viel Geld hat sie noch? 18) 5 Ellen Band kosten 15 kr.; was kostet 1 Elle?

Um zu finden, was eine Elle kostet, so muß man die 15 kr. auf die 5 Ellen so vertheilen, daß auf eine Elle so viel kommt, als auf die andere. Man muß daher die 15 kr. in 5 gleiche Theile zerlegen. Auf 1 Elle kommt also der fünfte Theil von 15 kr.; der 5. Theil von 15 kr. = 3 kr. So viel kostet die Elle.

Die Sechszehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • •
• • • • • •

1 Zehner 5 Einer + 1 Einer = 1 Z. 6 E. = 10 + 6 oder Sechszehn, geschrieben 16. — Die 6 Einer gehören ꝛc.

b.

16 = 16 × 1	15 = 2 × 6 + 4
= 8 × 2	= 2 × 7 + 2
= 5 × 3 + 1	= 2 × 8
= 4 × 4	= 1 × 9 + 7
= 3 × 5 + 1	= 1 × 10 + 6

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
15 + ? = 16	16 — 1 = ?	16 > 15 um 1.
14 + ? = 16	16 — 2 = ?	14 < 16 um 2.
13 + ? = 16 ꝛc.	16 — 3 = ? ꝛc.	16 > 13 um 3 ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2 × 8 — 4 + 3 — 6 + 7 — 10, 2 mal, + 4, weniger 8 ꝛc. 2) 16 ist um 4 mehr, als welche Zahl? 3) Ich lege zu 8 noch eine Zahl und erhalte 16; wie heißt sie? 4) Wie oft muß ich 4 nehmen, um 16 zu erhalten? 5) Um wie viel sind 16 fl. mehr, als 1 Karolin? 6) Welche Zahl muß ich 2 mal nehmen, damit ich 16 bekomme? 7) Wie oft ist 2 in 16 enthalten? 8) Welche Zahl ist 4 mal in 16? 9) In welche gleichen Theile kann man 16 zerlegen? (In 16 × 1, 8 × 2, 4 × 4, 2 × 8.) 10) Wie viel ist $^1/_4$ von 16? $^3/_4$ von 16? 11) 8 Kinder erhalten 16 Aprikosen miteinander; wie viel kommt auf eines? 12) Wie viele Pfennige erhält man für 4 kr.? 13) 16 Qt., wie viel Loth? 14) Eine Muskatnuß kostet 4 kr.; was kosten 4? 15) Ein Mann verdient in 1 Tag 2 fl.; wie viel in 8 Tg.? 16) 16 Maas (Dreiling oder Sechszehntel) machen 1 Mtz.; wie viel ist 1 Mtz. mehr, als 11 Ms.? 17) Wie viel Maas hat $^1/_2$ Mtz.? $^1/_4$ Mtz.? 18) 6 Mtz. = 1 Scheffel; wie viel Scheffel machen 16 Mtz.? 19) Was kosten 2 Maas Mehl, die Maas zu 8 kr.? 20) 4 Loth Gewürz kosten 16 kr.; was kostet 1 Loth?

Die Siebenzehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • •
• • • • • • •

1 Zehner 6 Einer + 1 Einer = 1 Zehner 7 Einer = 10 + 7 oder Siebenzehn, geschrieben 17. — Die 7 Einer gehören ꝛc.

b.

17 = 17 × 1	17 = 2 × 6 + 5
= 8 × 2 + 1	= 2 × 7 + 3
= 5 × 3 + 2	= 2 × 8 + 1
= 4 × 4 + 1	= 1 × 9 + 8
= 3 × 5 + 2	= 1 × 10 + 7

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
16 + ? = 17	17 — 1 = ?	17 > 16 um 1.
15 + ? = 17	17 — 2 = ?	15 < 17 um 2.
14 + ? = 17 ꝛc.	17 — 3 = ?	17 > 14 um 3 ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 3 × 5 + 2 — 4 + 3 — 8, 2 mal, + 1, 9 ab, + 5 ꝛc. 2) Wie viel muß ich zu 9 legen, um 17 zu erhalten? 3) Wie viel

muß man von 17 wegnehmen, wenn 12 übrig bleiben soll? **4)** Um wie viel ist 17 mehr, als 2 × 7? **5)** Ich weiß eine Zahl; füge ich 7 dazu, so erhalte ich 17; wie heißt die Zahl? **6)** Um wie viel ist 2 × 8 weniger, als 7? **7)** 17 pf., wie viel Zweier? wie viele kr.? **8)** 17 kr., wie viel Gr.? Sechser? Zwölfer? **9)** 17 Tg., wie viele Wochen? **10)** Heinrich hatte 17 Aepfel; jetzt hat er nur noch 9; wie viele hat er gegessen? **11)** Adolph hat 17 Kirschen, Gustav 13; wie viel Kirschen hat Adolph mehr, als Gustav? **12)** Ein Holzhändler kauft die Klafter Buchenholz um 14 fl. und verkauft sie wieder um 17 fl.; wie viel Gulden gewinnt er dabei? **13)** Ein Wort hat 9 Buchstaben, ein anderes hat 8; wie viele Buchstaben haben beide Wörter zusammen? **14)** Sophie bekam 17 kr., um 1 Elle Zeug zu holen; als sie aber zum Kaufmann kam, hatte sie nur noch 15 kr.; wie viel Geld hat sie unterwegs verloren?

Die Achtzehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • • •
• • • • • • •

1 Zehner 7 Einer + 1 Einer = 1 Z. 8 E. = 10 + 8 oder Achtzehn, geschrieben 18. — Die 8 Einer gehören 2c.

b.

18 = 18 × 1	18 = 3 × 6
= 9 × 2	= 2 × 7 + 4
= 6 × 3	= 2 × 8 + 2
= 4 × 4 + 2	= 2 × 9
= 3 × 5 + 3	= 1 × 10 + 8

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
17 + ? = 18	18 — 1 = ?	18 > 17 um 1.
16 + ? = 18	18 — 2 = ?	16 < 18 um 2.
15 + ? = 18 2c.	18 — 3 = ? 2c.	18 > 15 um 3 2c.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 3 × 6 — 5 + 4 — 5 + 6 — 7 — 2, 2mal, 11 ab, + 7 2c. **2)** Um wie viel ist 18 mehr, als 2 × 5 + 1? **3)** Wie oft ist 6 zu nehmen, um 18 zu erhalten? **4)** Wie viel muß ich von 18 wegthun, wenn 9 übrig bleiben soll? **5)** Wie oft ist 3 in 18? **6)** Wie viele halbe Guldenstücke erhalte ich für 9 ganze fl.? **7)** 6 Groschen, wie viele einzelne Kreuzer? **8)** Wie viele einzelne Kreuzer be-

kommt man für 3 Sechser? **9)** Ein Lesebüchlein kostet 9 kr.; was kosten 2? **10)** 2 Dutzend Knöpfe kosten 18 kr.; was kostet 1 Dutzend? **11)** Was kostet 1 Rechenbüchlein, wenn drei 18 kr. kosten? **12)** 6 Schreibhefte kosten 18 kr.; wie theuer ist eines? **13)** Wie viel Schreibhefte kann man aus 18 Bogen Papier machen, jedes zu 3 Bg.? **14)** Eine Mutter kauft 18 Ellen Zeug; wie viele Kleider kann sie daraus machen, wenn sie zu jedem Kleide 6 Ellen nimmt? **15)** Wie viel beträgt $^1/_3$ von 18 Ms.? $^2/_3$ von 18 Ms.? **16)** Suche $^1/_6$ von 18 Loth! $^5/_6$ von 18 Loth! **17)** Adolph hat 3 Sechser und gibt 2 Sechser und 1 Gr. davon aus; wie viel Geld bleibt ihm übrig? **18)** Wie viel Sechserkipfe kann man für 18 kr. kaufen?

Die Neunzehn.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • •

1 Zehner 8 Einer + 1 Einer = 1 Z. 9 E. = 10 + 9 oder Neunzehn, geschrieben 19. — Die 9 Einer gehören ꝛc.

b.

$19 = 19 \times 1$	$19 = 3 \times 6 + 1$
$= 9 \times 2 + 1$	$= 2 \times 7 + 5$
$= 6 \times 3 + 1$	$= 2 \times 8 + 3$
$= 4 \times 4 + 3$	$= 2 \times 9 + 1$
$= 3 \times 5 + 4$	$= 1 \times 10 + 9$

II. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
18 + ? = 19	19 — 1 = ?	19 > 18 um 1.
17 + ? = 19	19 — 2 = ?	17 < 19 um 2.
16 + ? = 19 ꝛc.	19 — 3 = ? ꝛc.	19 > 16 um 3 ꝛc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2 × 9 + 1 — 7 + 3 + 4 — 6 — 7, 3mal, 5 ab ꝛc. **2)** In welche zwei Zahlen läßt sich 19 zerlegen? **3)** Wie viel muß man zu 15 fügen, um 19 zu erhalten? **4)** Um wie viel muß ich 19 kleiner machen, damit sich 12 ergibt? **5)** 19 Stücke, wie viel Paar? **6)** 19 kr., wie viele Groschen? **7)** 19 Qt., wie viele Loth? **8)** 19 kr., wie viele Sechser? **9)** Um wie viel ist 19 größer, als 3 × 6? **10)** Gestern hatte ich 19 kr, heute habe ich noch 5; wie viel Kreuzer habe ich davon ausgegeben? **11)** Von 19 Nüssen, die ich habe, sind 11 versilbert; die anderen sind übergoldet; wie viel also? **12)** Mit

welchen Geldstücken kann man 19 kr. zahlen? **13)** 19 Tag, wie viele Wochen? **14)** Wie nimmt man 12 von 19 weg? (19 — 10 = 9, 9 — 2 = 7.) **15)** Karl hat in seinem Schlage 19 Tauben; 8 davon tödtet ihm der Marder; wie viele Tauben hat er noch? **16)** Gottlob fährt mit dem Vater zu seinem Pathen, der 19 Stunden weit entfernt wohnt; am ersten Tag legen sie 12 St. zurück; wie viele Stunden müssen sie noch am andern Tage machen?

Die Zwanzig.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • • •

Legt man zu 1 Zehner und 9 Einern noch 1 Einer, so ist der zweite Zehner voll. 2 Zehner oder 2 × 10 = Zwanzig, geschrieben 20.

b.

20 = 20 × 1	20 = 3 × 6 + 2
= 10 × 2	= 2 × 7 + 6
= 6 × 3 + 2	= 2 × 8 + 4
= 5 × 4	= 2 × 9 + 2
= 4 × 5	= 2 × 10

III. Zuzählen, Abziehen, Unterscheiden.

a.	b.	c.
19 + ? = 20	20 — 1 = ?	20 > 19 um 1.
18 + ? = 20	20 — 2 = ?	18 < 20 um 2.
17 + ? = 20 rc.	20 — 3 = ? rc.	20 > 17 um 3 rc.

20 — 3 =? 20 besteht aus 2 Zehnern; die 3 Einer nimmt man daher von 1 Zehner weg. Anstatt 2 Zehner hat man dann noch 1 Z. + 7 E. oder 17. Also rc.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) 20 — 8 + 4 — 5 + 9 — 7 — 5, 2mal, + 4, die Hälfte rc. **2)** In welche zwei Zahlen läßt sich 20 zerlegen? **3)** Um wie viel ist 2 × 10 mehr, als 12 + 8? **4)** Um wie viel ist 6 + 8 weniger, als 2 × 8? **5)** Um wie viel ist 20 von 15 entfernt? **6)** Wie heißt die Zahl, die um 7 kleiner ist als 20? **7)** Wie oft können 4 pf. von 20 pf. weggenommen werden? **8)** 20 pf., wie viele kr.? **9)** 2 × 10 ist wie viel mal 5? **10)** Wer sagt mir die Zahl, welche $^1/_4$ von 20 ist? **11)** Wie viel ist 1 × 4? 2 × 4? 3 × 4? 4 × 4? 5 × 4? **12)** Wie oft muß ich 5 nehmen, um 10 zu erhalten? um 15 zu erhalten? um 20 zu erhalten? **13)** Wie heißt die

Zahl: wenn man sie 2mal nimmt, so bekommt man 20? **14)** Was für ein Theil von 20 ist 10? 5? 4? 2? 1? **15)** Wer sagt mir, wie viel $^3/_4$ von 20 betragen? **16)** Karl hatte 20 kr. und kaufte sich für zwei Sechser ein Buch; wie viel Geld behält er noch? **17)** 20 Zweier, wie viele Kreuzer? **18)** 20 kr., wie viele Gr.? **19)** 20 Quint, wie viel Loth? **20)** Bekäme Emil zu seinem Gelde noch 4 kr., so würde er 20 kr. haben; wie viel Geld hat er also? **21)** Wie viel Kleider lassen sich von 20 Ellen Zeug machen, wenn man zu jedem Kleide 5 Ellen nimmt? **22)** Anton soll 20 Liederverse lernen; 13 kann er schon davon; wie viele hat er noch zu lernen? **23)** Eine Citrone kostet 4 kr.; was kosten 5? **24)** Ein Reisender macht jeden Tag 10 Std. Wegs; wie weit kommt er in 2 Tg.? **25)** Zwei Pfd. Fleisch kosten 20 kr., was kostet 1 Pfd.? **26)** 4 Ms. Essig zu 20 kr.; wie theuer ist 1 Ms.?

Übersicht und Wiederholung.

Vorbemerkung.

Die äußere oder sinnliche Anschauung tritt nur im Nothfalle ein. Der Schüler muß nun mit den durch die äußere Anschauung gewonnenen Zahlvorstellungen frei im Kopfe operiren und es darin zur Sicherheit und Fertigkeit bringen. Das Vermögen, die Zahlengeschäfte in der Weise auszuführen, daß die Zahl blos gedacht oder innerlich angeschaut wird, soll dadurch seine besondere Uebung erhalten. Leider gibt es immer noch Schulen, wo selbst jede sinnliche Anschauung fehlt, wo man den Lehrstoff ohne Weiteres und mit Gewalt dem Gedächtnisse der Schüler aufzudringen sucht. Daß da auch von der innern Anschauung der Zahlen keine Spur sein kann, versteht sich von selbst. Was die Kinder in diesem Falle beim Rechnen, auch mit den kleinsten Zahlen, sich vorstellen, ist nicht die Zahl mit ihrem Inhalte, sondern das Zeichen für die Zahl, die Ziffer. Das Kind ist zur Maschine, der Unterricht zur Dressur herabgewürdigt.

Durch die nun folgenden Uebungen muß das, was einzelnen Schülern entschwunden ist, erneut, was andere durch unregelmäßigen Schulbesuch versäumt haben, nachgeholt, überhaupt alles bis jetzt Behandelte bei sämmtlichen Schülern befestigt und zum Abschlusse gebracht werden. Die später von Stufe zu Stufe stattfindende Wiederkehr gewisser Uebungen soll der Lehrer benützen, um bei einzelnen Schülern die erforderliche Nachhilfe eintreten zu lassen, damit die ganze Klasse im gleichmäßigen Fortschritt erhalten werde. Wer aber meint, eben darum, weil sich Manches wiederholt, auf keiner Stufe vollständig aufräumen zu müssen, der täuscht sich sehr. Wird z. B. das Zuzählen und Abziehen mit Uebergang von einem Zehner in den andern jetzt, d. i. beim ersten und zweiten Zehner, nicht so durchgenommen, daß die Schüler völlig sicher und fertig darin werden; so wird dieß auch auf den spätern Stufen nicht geschehen, wo sich die Operationen mit immer größern Zahlen wiederholen. Die Schüler werden stets daran laboriren. Was daher

dem Lehrer hier nochmal recht dringend an's Herz gelegt wird, das ist, **von einer Uebung zur andern nicht eher fortzuschreiten, als bis sämmtliche Schüler vollkommen sicher und fertig darin sind, und zur schriftlichen Darstellung niemals überzugehen, bevor die Kinder geläufig frei im Kopfe operiren und sich dabei klar und verständig ausdrücken können.**

I. Bilden und Zerlegen.

a. Zählen.

1) Auf- und Abwärtszählen zwischen 1 und 20.
2) Welche Zahl steht vor 12? nach 12? vor 15? nach 15? ꝛc.
3) Zwischen welchen zwei Zahlen steht 11? 17? 14? u. s. w.
4) Welche Zahlen liegen zwischen 7 und 12? zwischen 9 und 13? ꝛc.

b. Zerlegen.

1. Angabe, aus wie vielmal 1, 2, 3 ꝛc. jede Zohl besteht.

1 = 1 × 1		20 = 20 × 1
2 = 2 × 1	So mit allen	= 10 × 2
= 1 × 2	Zahlen bis	= 6 × 3 + 2
3 = 3 × 1		= 5 × 4
= 1 × 2 + 1		= 4 × 5
= 1 × 3		= 3 × 6 + 2
4 = 4 × 1		= 2 × 7 + 6
= 2 × 2		= 2 × 8 + 4
= 1 × 3 + 1		= 2 × 9 + 2
= 1 × 4		= 2 × 10

Jedoch mit Unterbrechung. In der einen halben Stunde etwa die Zahlen von 1 bis 8 und zwar zuerst frei im Kopfe, dann als Selbstbeschäftigung auf der Schiefertafel. In einer andern halben Stunde eben so die Zahlen von 9 bis 12. Dann wieder eben so die Zahlen von 13 bis 16, und zuletzt die Zahlen von 17 bis 20.

2. Das Zerlegen der Zahlen in zwei Posten.

11=9+	18=9+	18=8+	15=8+	17=9+	14=5+
12=8+	20=5+	11=6+	12=5+	13=7+	20=8+
13=6+	15=9+	17=8+	14=7+	14=6+	11=3+
14=9+	12=7+	19=9+	20=4+	20=7+	13=5+
15=7+	14=8+	13=4+	11=7+	12=8+	19=8+
16=9+	13=8+	16=7+	16=8+	15+6+	16=3+

Das Vorstehende wird an die Wandtafel notirt und durchgesprochen, dann von den Schülern abgeschrieben und ausgeführt.

II. Zusammenzählen, Abziehen, Unterscheiden.

Beim Zuzählen und Abziehen unterscheiden wir von jetzt an dreierlei Arten von Aufgaben:

1) Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen **ohne** Uebergang von einem Zehner in den andern;

2) Zuzählen und Abziehen der Grundzahlen **mit** Uebergang von einem Zehner in den andern;

3) Zuzählen und Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

In allen diesen Fällen wird die Sache zuerst möglichst ausführlich und klar behandelt, fast so, als sei sie den Schülern noch ganz unbekannt. Dann zieht sich die Form der Ausrechnung mehr und mehr zusammen, so daß sie zuletzt nur noch in den nothwendigsten Ausdrücken besteht.

a. Zuzählen.

1) Zuzählen der Grundzahlen, ohne Uebergang.

Beispiel: 13 + 4 = ?

Ausführlich:

13 = 1 Zehner + 3 Einer. Dazu sollen noch 4 Einer kommen. Wohin werden wir sie thun: zu dem Zehner, oder zu den 3 Einern? Antwort: Zu den 3 Einern. Thut es! (3 E. + 4 E. = 7 E.) Wie viel haben wir jetzt anstatt 1 Z. + 3 E.? Antwort: 1 Z. + 7 E. oder 17 E. Wie viel ist also 13 + 4? Antwort: 13 + 4 = 17.

Kürzere Weise.

13+4=? 1 Z. 3 E. + 4 E. = 1 Z. + 7 E. oder 17 E.; 13+4=17.
12+3=? 1 Z. 2 E. + 3 E. = 1 Z. + 5 E. oder 15 E.; 12+3=15.

Bei den schwächern Schülern kann man sich auch mit folgender Ausrechnung begnügen:

13 + 4 = ? 3 + 4 = 7, 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 2 + 3 = 5, 12 + 3 = 15.

Zuletzt:

13 + 4 = ? 13 + 4 = 17.
12 + 3 = ? 12 + 3 = 15.

Stoff hiezu s. Aufg. z. Zifferr. S. 9 und 10, Uebung 2 und 3.

2) Zuzählen der Grundzahlen, mit Uebergang.

Da diese Uebung besonders wichtig ist, so bedarf sie besonderer Aufmerksamkeit und Pflege. Zur Vorübung werde daher Folgendes an die Wandtafel notirt und, wie unten angegeben, durchgenommen.

9+?=11	8+?=11	9+?=12	5+?=13	7+?=13	3+?=11
8+?=12	6+?=12	7+?=14	8+?=14	5+?=11	7+?=12
7+?=15	9+?=15	4+?=15	7+?=11	9+?=16	5+?=14
6+?=11	4+?=11	8+?=16	3+?=12	6+?=14	9+?=18
9+?=14	7+?=16	6+?=15	9+?=17	4+?=12	2+?=11
5+?=12	8+?=12	9+?=13	6+?=13	8+?=15	8+?=17

Denk- und Sprechweise:

$9 + ? = 11.$ $9 + 1 = 10, + 1 = 11; 9 + (1 + 1) = 11; 9 + 2 = 11.$
$8 + ? = 12.$ $8 + 2 = 10, + 2 = 12; 8 + (2 + 2) = 12; 8 + 4 = 12.$
$7 + ? = 15.$ $7 + 3 = 10, + 5 = 15; 7 + (3 + 5) = 15; 7 + 8 = 15.$

Ist das Ganze in dieser Weise mündlich durchgenommen, so geschieht es dann von den Schülern auch schriftlich. Sie schreiben die Aufgaben ab und setzen für das Fragezeichen die entsprechende Zahl.

Hierauf wird zur eigentlichen Additionsübung übergegangen.

Beispiel: $9 + 3 = ?$

Ausführlich.

Wie viel muß ich zu 9 legen, um den ersten Zehner voll zu machen? Noch 1. Wovon nehme ich die 1? Von 3. Wie viel ist dann von 3 noch da? Noch 2. Wie zählst du also 3 zu 9? Zuerst 1, dann noch 2. Thue es! $9 + 1 = 10$, $10 + 2 = 12$; $9 + 3 = 12$.

Kürzere Weise:

$9 + 3 = ?$ $9 + 1 = 10, + 2 = 12; 9 + 3 = 12.$
$8 + 7 = ?$ $8 + 2 = 10, + 5 = 15; 8 + 7 = 15.$

Noch kürzer.

$9 + 3 = ?$ $9 + (1 + 2) = 12; 9 + 3 = 12.$
$8 + 7 = ?$ $8 + (2 + 5) = 15; 8 + 7 = 15.$

Zuletzt:

$9 + 3 = ?$ $9 + 3 = 12.$
$8 + 7 = ?$ $8 + 7 = 15.$

Bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit!

Stoff hiezu s. Aufg. z. Zifferr. S. 10, Uebung 3 und 4.

3) Zuzählen zusammengesetzter Zahlen.

Beispiel: $5 + 11 = ?$

Hier werden die Schüler rechnen wollen wie bei der vorhergehenden Uebung, nämlich $5 + 5 = 10$, $10 + 6 = 16$. Man lasse es geschehen. Dann aber sage man, daß die Zahl 11 noch auf eine andere, bequemere Weise zu 5 gezählt werden könne. Diese wird jedoch nicht geradezu mitgetheilt, sondern nur angedeutet. Etwa so: Woraus besteht 11? (Aus $10 + 1$.) Das Hinzuzählen der 10 ist, wie ihr wißt, sehr leicht. Wie werden wir also rechnen? Antwort: Wir zählen zu 5 erst 10 und dann noch 1. Thut's! $5 + 10 = 15, + 1 = 16$; $5 + 11 = 16$.

$7 + 12 = ?$ $7 + 10 = 17, + 2 = 19; 7 + 12 = 19.$
$6 + 14 = ?$ $6 + 10 = 16, + 4 = 20; 6 + 14 = 20.$

Stoff hiezu s. Aufg. z. Zifferr. S. 10, Uebung 5.

b. Abziehen.

1) Abziehen der Grundzahlen, ohne Uebergang.

Beispiel: $17 - 3 = ?$

Ausführlich.

17 = 1 Z. + 7 E. Davon sollen 3 E. weggenommen werden. Wovon können wir sie wegnehmen? (Von dem Zehner oder von den 7 E.) Wovon werden wir sie wegnehmen? Antwort: Von den 7 Einern. Thut's! (3 E. von 7 E. bleiben 4 E.) Wie viel haben wir jetzt noch von 1 Z. + 7 E.? Antwort: Noch 1 Z. + 4 E. oder 14 Einer. Wie viel ist also 17 — 3? Antwort: 17 — 3 = 14.

Kürzere Weise.

17—3=? 17=10+7; 10+7—3=10+4 od. 14; 17—3=14.
18—5=? 18=10+8; 10+8—5=10+3 od. 13; 18—5=13.

Zuletzt:

17 — 3 =? 17 — 3 = 14.
18 — 5 =? 18 — 5 = 13.

Stoff hiezu s. Aufg. z. Zifferr. S. 11, Stufe 7 und 8.

2) Abziehen der Grundzahlen, mit Uebergang.

Beispiel: 15 — 7 =?

Ausführlich.

Wie nimmt man 7 von 15 weg? Antwort: Zuerst 5, dann noch 2. Thut es! 5 von 15 bleibt 10, und 2 von 10 bleibt 8; 7 von 15 bleibt 8.

Kürzere Weise.

15 — 7 =? 15 — 5 = 10, 10 — 2 = 8; 15 — 7 = 8.
11 — 2 =? 11 — 1 = 10, 10 — 1 = 9; 11 — 2 = 9.

Noch kürzer:

15 — 7 =? 15 — (5 + 2) = 8; 15 — 7 = 8.
11 — 4 =? 11 — (1 + 3) = 7; 11 — 4 = 7.

Zuletzt:

15 — 7 =? 15 — 7 = 8.
13 — 6 =? 13 — 6 = 7.

Bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit!

Stoff hiezu s. Aufg. z. Zifferr. S. 11, Uebung 9 und 10.

3) Abziehen zusammengesetzter Zahlen.

Beispiel: 15 — 11 =?

Wie viel soll von 15 weggenommen werden? Woraus besteht die Zahl 11? Wie nimmt man also 11 von 15 weg? (Man nimmt zuerst 10 weg und dann noch 1.) Thut's! (10 von 15 bleibt 5, und 1 von 5 bleibt 4; also ist 15 — 11 = 4.)

18 — 12 =? 18 — 10 = 8, und 8 — 2 = 6; 18 — 12 = 6.
20 — 16 =? 20 — 10 = 10, und 10 — 6 = 4; 20 — 16 = 4.

Stoff hiezu s. Aufg. z. Zifferr. S. 12, Uebung 11.

c. Unterscheiden.

(Bestimmen des Unterschiedes.)

Beispiel: Um wie viel unterscheiden sich die Zahlen 8 und 15 von einander?

a. Ich sehe zu, wie viel ich zu 8 legen muß, um 15 zu erhalten. 8 + 2 = 10, + 5 = 15. Zu 8 muß man also noch 2 + 5 oder 7 legen, um 15 zu erhalten. 8 ist daher um 7 kleiner, als 15.

b. Ich ziehe 8 von 15 ab und sehe zu, was übrig bleibt. 8 von 15 bleibt 7; 15 enthält also außer 8 noch 7; mithin ist 15 um 7 größer, als 8.

8 ist um 7 kleiner als 15, und 15 ist um 7 größer als 8; 8 und 15 unterscheiden sich also um 7 von einander.

Eben so auch mit den Zahlen

9 u. 11	4 u. 17	14 u. 17	17 u. 19.
9 u. 12	2 u. 19	16 u. 19	4 u. 20.
8 u. 11	5 u. 20	13 u. 18	16 u. 20.
7 u. 12	3 u. 18	15 u. 20	3 u. 17.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1 bis 20 durch 2.

a.

1+2, 3+2, 5+2 . . . 17+2; 19−2, 17−2, 15−2, 13−2 ꝛc.
2+2, 4+2, 6+2 . . . 18+2; 20−2, 18−2, 16−2, 14−2 ꝛc.

$$2 = 2;\ 1 \times 2 = 2$$
$$2 + 2 = 4;\ 2 \times 2 = 4$$
$$2 + 2 + 2 = 6;\ 3 \times 2 = 6$$
$$2 + 2 + 2 + 2 = 8;\ 4 \times 2 = 8$$

u. s. w.

Das Vervielfachen an dieser Stelle, in und außer der Reihenfolge, ist jedesmal so fest und sicher einzuüben, daß hierin nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Ist das geschehen, dann gehe man auf folgende Fragen über:

1) Welche Zahlen von 1 bis 20 lassen sich aus der 2 zusammensetzen?
2) Wie heißt das Zweifache von 2? das 4fache von 2? das 6fache von 2? das 3fache von 2? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 2 ist 6? 10? 4? 12? 8? ꝛc.
4) Verwandeln der Gulden von 1 bis 10 in halbe Gulden.

Beispiel: Wie viele halbe Gulden erhalte ich für 5 ganze?

Aufl. Ich gebe dem Wechsler 1 ganzen Gulden; dafür gibt er mir 2 halbe Gulden. Dann gebe ich ihm wieder 1 g. Gulden, und er gibt mir dafür wieder 2 halbe. So oft ich ihm 1 ganzen Gulden gebe, so oft erhalte ich von ihm 2 halbe Gulden. Für 5 × 1 ganzen Gulden bekomme ich 5 × 2 halbe Gulden. 5 × 2 halbe Gulden = 10 h. Gulden. Also erhalte ich für 5 g. Gulden 10 h. Gulden. 5 g. Gulden = 10 h. Gulden.

b.

1) Aus wie vielmal 2 besteht 8? 6? 10? 14? ꝛc.
2) Wie oft ist 2 in 2? in 6? in 4? in 10? in 16? in 12? ꝛc.
" " " 2 in 3? in 7? in 5? in 11? in 17? in 13? ꝛc.
3) In welcher Zahl ist 2 dreimal enthalten? in welcher 5mal? ꝛc.
4) Verwandeln der halben Gulden von 2 bis 20 in ganze.
Beispiel: Wie viele ganze Gulden machen 16 halbe Gulden?

Aufl. 2 halbe Gulden machen 1 ganzen. Gebe ich also dem Wechsler 2 halbe Gulden, so erhalte ich dafür 1 ganzen Gulden. Gebe ich ihm nochmal 2 halbe Gulden, so erhalte ich nochmal 1 g. Gulden. So oft ich dem Wechsler 2 h. Gulden gebe, eben so oft erhalte ich 1 g. Gulden. 16 h. Gulden sind 8 × 2 h. Gulden; für 8 × 2 h. Gulden bekomme ich 8 × 1 g. Gulden. 16 halbe Gulden = 8 g. Gulden.

c.

1) Zerlege die Zahl 4 in zwei gleiche Theile! Ebenso 6! 10! 8! ꝛc.
2) Welches ist der halbe Theil von 2? von 6? von 4? von 10? ꝛc.
3) Wovon ist 4 die Hälfte? Wovon ist 6 die Hälfte? Wovon 3? 7? ꝛc.
4) 2 Schwestern theilen 8 Ellen Band miteinander; wie viel kommt auf eine? Wie aber, wenn sie 10 kr. unter sich zu theilen haben?
5) Wie theuer ist 1 Elle, wenn 2 Ellen 16 (12, 18) kr. kosten?

Aufl. 2 Ellen kosten 16 kr. Will man wissen, was 1 Elle kostet; so muß man die 16 kr. auf die 2 Ellen so vertheilen, daß auf eine Elle so viel kommt, als auf die andere. Man muß also die 16 kr. in 2 × 8 kr. theilen. Demnach kommen auf jede Elle 8 kr. Eine Elle ist der halbe Theil von 2 Ellen; daher kostet sie auch den halben Theil von 16 kr., nämlich 8 kr.

6) A und B (2 Schüler), theilt diese Nuß hier miteinander!
M und N (2 andere Schüler), theilt diese 3 Nüsse unter euch!
Wie werden 2 Knaben 5 Nüsse unter sich theilen? 7 Aepfel? ꝛc.

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 6 kr. + 5 kr. + 4 kr. + 3 kr. — 6 kr. — 5 kr. — 4 kr. — 3 kr.? **2)** Von 8 und 9 Bäumchen, welche Heinrich pflanzte, sind nur 14 gewachsen; wie viele sind ihm verdorrt? **3)** Von 18 Ellen werden einmal 7 und dann wieder 6 Ellen abgeschnitten; wie viele Ellen sind davon noch vorhanden? **4)** Drei Knaben haben zusammen 20 Nüsse; der eine hat 6, der andere 9; wie viel hat der dritte? **5)** Wie viel Groschen erhält man für 3 Sechser? Wie viel für 9 Sechser? **6)** Wie viele Sechser erhalte ich aber für 8 Gr.? Wie viel für 16 Gr.? **7)** Wie viel ist $^1/_2$ Dutzend? (1 ganzes Dutzend = 12 Stück; $^1/_2$ Dutzend beträgt die Hälfte von 12 Stück = 6 Stück.) **8)** Wie viel ist $^1/_2$ Loth? **9)** Eine Elle zu 6 kr.; was kosten 2 Ellen? **10)** Ein Pfund Kirschen kostet 2 kr.; wie viel kosten 3 Pfd.? 5 Pfd.? 7 Pfd.? 9 Pfd.? **11)** Für 1 kr. erhalte ich 2 Aepfel; wie viel bekomme ich für 4 kr.? für 6 kr.? 8 kr.? 10 kr.? **12)** 2 Ellen Band kosten 12 kr.; was kostet

1 Elle? **13**) Zwei Knaben theilen 19 Nüsse unter sich; wie viel kommt auf einen? **14**) Emilie hat 16 Aepfel; alle Tage ißt sie 2 davon; wie viel Tage lang hat sie daran? **15**) Karl hat 2 Sechser, 1 Gr. und 1 kr.; er kauft 5 Bleistifte, jeden zu 2 kr.; wie viel Geld bleibt ihm übrig? **16**) Ein reicher Herr theilte unter Arme 20 fl. aus; jedem gab er 2 fl.; wie viel wurden von ihm beschenkt?

Von jetzt an stellen wir es dem Lehrer frei, die einzelnen Zahlen des zur Behandlung kommenden Zehners sogleich alle nacheinander zu bilden und hierauf wieder eben so zu zerlegen, oder bei jeder Zahl unmittelbar nach dem Bilden das Zerlegen derselben vorzunehmen. Wir selbst entscheiden uns hier der kürzeren und leichteren Darstellung wegen für das Erstere.

Der dritte Zehner.

I. Bilden und Zerlegen.

a.

2 Zehner + 1 E. = 20 + 1 oder Einundzwanzig, geschrieben 21.
2 Z. 1 E. + 1 E. = 20 + 2 oder Zweiundzwanzig, „ 22.
2 Z. 2 E. + 1 E. = 20 + 3 oder Dreiundzwanzig, „ 23.

So fort bis 30.

Die Veranschaulichung geschieht an der Rechenmaschine.

Fragen: Wie viel muß man zu 29 legen, um 30 zu erhalten? Wie viel zu 28? zu 25? zu 27? ꝛc.

b.

Lehrverfahren.

Das Zerlegen der Zahlen wird von den Schülern nun ganz allein ausgeführt. Sie bekommen die Aufgabe, zu untersuchen und aufzuschreiben, aus wie viel mal 1, aus wie vielmal 2, aus wie vielmal 3 u. s. f. die Zahl besteht, die an der Reihe ist. Wie sie dabei zu Werke gehen, ist ihnen ganz und gar zu überlassen. Die Fähigeren werden ihre Untersuchung auf die innere Anschauung der Zahl und auf das ihnen bereits Bekannte gründen. Sie denken: 20 = 20 × 1, also ist 21 = 20 × 1 und 1 × 1 oder 21 × 1; 20 = 10 × 2, also ist 21 = 10 × 2 und 1; 18 = 6 × 3, also ist 21 (oder 18 + 3) = 6 × 3 + 1 × 3 oder 7 × 3 ꝛc. Die Minderfähigen halten sich zunächst noch an die äußere Anschauung. Sie stellen die Zahl durch Punkte dar, welche sie in Reihen von 10 zu 10 untereinander setzen und dann zerlegen. Die einzelnen Ergebnisse werden werden dabei sogleich notirt und stehen zuletzt bei der Zahl 21 so:

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • • •
•

$$\begin{aligned}21 &= 21 \times 1\\ &= 10 \times 2 + 1\\ &= 7 \times 3\\ &= 5 \times 4 + 1\\ &= 4 \times 5 + 1\\ &= 3 \times 6 + 3\\ &= 3 \times 7\\ &= 2 \times 8 + 5\\ &= 2 \times 9 + 3\\ &= 2 \times 10 + 1 = 2\text{ Z.} + 1\text{ Z.}\end{aligned}$$

Die Aufschriebe der Schüler werden später vorgelesen, vorkommende Fehler, nach Veranschaulichung und Beleuchtung, berichtigt und die einzelnen Zerfällungen frei aus dem Kopfe angegeben.

Hierauf werden die Fälle, wo die Zahl in lauter gleiche Theile, in Faktoren, zerlegt erscheint, noch besonders ins Auge gefaßt, hier also 7×3 und 3×7.

Man fragt:

Aus wie vielmal 3 besteht 21? Zähle 7×3 zusammen! ($3 + 3 = 6$, $6 + 3 = 9$ ꝛc.) Wie viel ist also 7×3? — Aus wie vielmal 7 besteht 21? Zähle 3×7 zusammen! ($7 + 7 = 14$, $14 + 7 = 21$.) Wie viel ist also 3×7?

Wie oft liegt 3 in 21? Warum? Wie oft liegt 7 in 21? Warum? In welcher Zahl ist 3 5 mal enthalten? In welcher Zahl liegt 7 2 mal?

In wie viel Theile muß man 21 zerlegen, damit auf jeden Theil 7 kommt? Was für ein Theil von 21 ist also 7? Wie viel betragen $^2/_3$ von 21? — In wie viel Theile ist 21 zu theilen, damit auf jeden Theil 3 kommt? Was für ein Theil von 21 ist also 3? Wie viel betragen $^3/_7$ von 21? $^5/_7$ von 21?

Ganz in derselben Weise behandle man auch die übrigen Zahlen. Von einer Rechenstunde zur andern werde eine Zahl absolvirt. Nur bei der Reduktionszahl 24 halte man sich länger auf. Eben so auf den späteren Stufen bei 32, 60, 64 und 100.

II. Zuzählen und Abziehen.

Das **Unterscheiden** oder eigentlicher das Unterschiedsuchen wird jetzt nicht mehr als **stehende** Uebung aufgeführt, sondern bei den **Aufgaben verschiedener Art** vertreten.

In Bezug auf das hier einzuschlagende Verfahren berufen wir uns auf das, was Seite 52 ff. bemerkt worden ist.

24 + 3	24 — 3	19 + 6	22 — 5	10 + 15	30 — 12
21 + 7	27 — 5	18 + 4	24 — 6	16 + 10	30 — 15
23 + 6	30 — 6	15 + 8	27 — 8	12 + 12	27 — 13
25 + 5	30 — 9	17 + 7	53 — 9	15 + 13	24 — 16

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—30 durch 3.

a.

1+3, 4+3, 7+3 . . . 25+3; 28 — 3, 25 — 3, 22 — 3 2c.
2+3, 5+3, 8+3 . . . 26+3; 29 — 3, 26 — 3, 23 — 3 2c.
3+3, 6+3, 9+3 . . . 27+3; 30 — 3, 27 — 3, 24 — 3 2c.

$$3 = 3;\ 1 \times 3 = 3$$
$$3 + 3 = 6;\ 2 \times 3 = 6$$
$$3 + 3 + 3 = 9;\ 3 \times 3 = 9$$
$$3 + 3 + 3 + 3 = 12;\ 4 \times 3 = 12$$

u. s. w.

Ist Vorstehendes in und außer der Ordnung vollständig eingeprägt; dann folgende Fragen und Aufgaben:

1) Welche Zahlen von 1 bis 30 lassen sich aus der 3 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 2fache von 3? das 5fache von 3? 2c.
3) Das Wievielfache von 3 ist 6? 12? 9? 18? 15? 2c.
4) Das Verwandeln der Groschen von 1 bis 10 in Kreuzer.

b.

1) Aus wie vielmal 3 besteht 9? 15? 6? 12? 18? 2c.
2) Wie oft liegt 3 in 6? in 15? in 9? in 21? 2c.
   „ „ „ 3 in 4? in 10? in 8? in 20? 2c.
3) In welcher Zahl ist 3 2mal enthalten? in welcher 6mal? 2c.
4) Verwandeln der Kreuzer von 3 bis 30 in Groschen.

c.

1) Zerlege die Zahl 6 in 3 gleiche Theile! Eben so 15! 9! 2c.
2) Wie viel ist der dritte Theil von 3? von 9? von 24? 2c.
3) Suche $^2/_3$ von 9! $^2/_3$ von 21! von 27! von 18! 2c.
4) Wovon ist 5 der 3te Theil? Wovon ist 8 der 3te Theil? 2c.
5) Was kostet 1 Pfund Mehl, wenn 3 Pfd. 18 (15, 21, 27) kr. kosten?

Aufl. 3 Pfd. kosten 18 kr. Will ich wissen, was 1 Pfd. kostet; so muß ich die 18 kr. auf die 3 Pfd. Mehl so vertheilen, daß auf ein Pfd. so viel kommt, als auf das andere. Ich muß also die 18 kr. in 3 gleiche Theile, in 3 × 6 kr. theilen. Mithin kommen auf jedes Pfd. 6 kr. „Ein Pfd. ist der 3te Theil von 3 Pfd.; daher kostet 1 Pfd. auch den 3ten Theil von 18 kr., nämlich 6 kr.

6) 3 Brüder haben 2 Aepfel unter sich zu theilen; wie werden sie es thun? Wie aber, wenn sie 4 (10, 20) Aepfel mit einander zu theilen haben?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 12 + 6 — 9 + 7 + 8 — 6 + 9 — 12 + 9 — 12 ꝛc. 2) Wie groß ist der Unterschied zwischen 21 und 15? zwischen 26 und 12? zwischen 30 und 18? 3) Suche, wie oft 2 enthalten ist in 24? in 26? in 28? in 30? 4) Wie findest du den halben Theil von 22? von 24? von 26? von 28? von 30? 5) Von einer Zahl ist die eine Hälfte 13; wie groß ist die andere Hälfte? 6) Ich habe 18; wie viel muß ich dazu legen, um 30 zu erhalten? 7) Was ist mehr: die Hälfte von 18, oder $^1/_3$ von 24? 8) Um wie viel ist das Doppelte von 11 mehr, als $^2/_3$ von 27? 9) Zerlegt 25 so oft als möglich in 2 ungleiche Theile. (24 + 1, 23 + 2 ꝛc.) 10) Vervielfacht die 2 mit jeder Zahl von 1 bis 10! 11) 27 kr., wie viel Gr.? 12) 7 Gr., wie viel Kreuzer? 13) In welcher Zahl ist 3 fünfmal enthalten? in welcher 8mal? 14) Von welcher Zahl ist 4 ein Drittel? Von welcher Zahl ist 10 ein Drittel? 15) 24 Bogen Papier nennt man 1 Buch; welcher Theil von 1 Buch Papier sind 12 Bg.? 8 Bg.? 6 Bg.? 16) Wie viel Bogen beträgt $^1/_2$ Buch? $^1/_4$ Buch? 17) 2 Dutzend, wie viele Stücke? 18) 1 Elle Tuch kostet 3 fl.; was kosten 2 Ellen? 5 Ellen? 8 Ellen? 19) Für 3 Pfd. bezahle ich 21 kr.; wie viel kostet 1 Pfd.? 2 Pfd.? 20) 3 Ms. Wein zu 30 kr.; was kostet 1 Ms.? 2 Ms.? 21) Wie viele Schreibhefte lassen sich aus 1 Bch. Papier machen, jedes zu 3 Bg.?

Der vierte Zehner.

(31 bis 40.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie bei dem dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Zifferr. S. 16, Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—40 durch 4.

a.

1+4, 5+4, 9+4 . . . 33+4; 37 — 4, 33 — 4, 29 — 4 ꝛc.
2+4, 6+4, 10+4 . . . 34+4; 38 — 4, 34 — 4, 30 — 4 ꝛc.
3+4, 7+4, 11+4 . . . 35+4; 39 — 4, 35 — 4, 31 — 4 ꝛc.
4+4, 8+4, 12+4 . . . 36+4; 40 — 4, 36 — 4, 32 — 4 ꝛc.

$$4 = 4;\ 1 \times 4 = 4$$
$$4 + 4 = 8;\ 2 \times 4 = 8$$
$$4 + 4 + 4 = 12;\ 3 \times 4 = 12$$
$$4 + 4 + 4 + 4 = 16;\ 4 \times 4 = 16$$

u. s. w.

Geht Vorstehendes in und außer der Ordnung sicher und fertig, dann folgende Fragen und Aufgaben:

1) Welche Zahlen bis 40 lassen sich aus der 4 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 2fache von 4? das 6fache von 4? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 4 ist 12? 20? 16? 8? 32? ꝛc.
4) Zu 1 Hemde braucht man 4 Ellen Leinwand; wie viel zu 3 H.?

Aufl. Zum ersten Hemde, das gemacht wird, braucht man 4 Ellen; zum andern Hemde braucht man wieder 4 Ellen; zu 2 Hemden braucht man also 2 × 4 Ellen; zum dritten Hemde braucht man wieder 4 Ellen; zu 3 Hemden braucht man also 3 × 4 Ellen; 3 × 4 Ellen = 12 Ellen. Zu 3 Hemden braucht man 12 Ellen Leinwand.

5) Wie viel Pfennige machen 3 kr.? 4 kr.? 6 kr.? 8 kr.? 10 kr.?

b.

1) Aus wie vielmal 4 besteht die Zahl 12? 32? 24? 40? ꝛc.
2) Wie oft liegt 4 in 16? in 28? in 12? in 32? ꝛc.
" " " 4 in 5? in 10? in 15? in 23? ꝛc.
3) In welcher Zahl ist 4 3mal? in welcher 5mal? 8mal? ꝛc.
4) Wie viel Kreuzer machen 16 pf.? 28 pf.? 12 pf.? 32 pf.?

c.

1) Zerlege 8 in 4 gleiche Theile! Eben so 20! 32! 16! ꝛc.
2) Wie viel ist der 4te Theil von 8? von 20? von 12? ꝛc.
3) Wie suchst du $^3/_4$ von 24? $^3/_4$ von 32? $^3/_4$ von 40?
4) A erspart sich in 4 Jahren 36 (24, 32) fl.; wie viel in 1 J.?
5) 4 Brüder theilen 3 Aepfel miteinander; wie werden sie es thun?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2 × 2 × 2 × 2 × 2 + 4 − 8 + 6 − 8 + 6, $^1/_4$, 3mal ꝛc. **2)** Um wie viel unterscheiden sich von einander 32 und 24? 35 und 21? 36 und 18? **3)** Was ist mehr: $^2/_3$ von 36, oder $^3/_4$ von 32? **4)** Wie suchst du den halben Theil von 26? von 32? von 36? **5)** Wie suchst du den dritten Theil von 39? **6)** In welche 2 Zahlen läßt sich 37 zerlegen? **7)** Ich zähle 2 Zahlen zusammen und erhalte 35; die eine Zahl heißt 24, wie die andere? **8)** Wie viel muß ich von 37 nehmen, wenn 21 übrig bleiben soll? **9)** Wie viel beträgt der Unterschied zwischen dem 8fachen von 3 und dem 10fachen von 4? **10)** Wie oft sind 6 kr. in 36 kr. enthalten? **11)** Wie viele Kreuzer erhalte ich für 40 Pfennige? **12)** Wie viele Pfennige machen 8 kr. 3 pf.? **12)** Wie viel Quint sind 9 Loth 2 Quint? **14)** 32 Loth = 1 Pfd.; welcher Theil von 1 Pfd. sind 16 Loth? 8 Loth? **15)** Wie viel Loth beträgt $^1/_2$ Pfd.? $^1/_4$ Pfd.? $^3/_4$ Pfd.? **16)** Eine Elle zu 4 kr.; was kosten 3 Ellen? 6 Ellen? 8 Ellen? 10 Ellen? **17)** Was kostet 1 Pfd. Mehl, wenn 2 (3, 4) Pfd. 24 kr. kosten? **18)** 4 Kinder theilen sich in 36 Pfirsiche; wie viel erhält eines? wie viel 3 derselben? **19)** Für 4 fl. kauft man 1 Pfd. Gewürz; wie viel Loth für 1 fl.? für 3 fl.? **20)** Ich habe 1 halben Gulden, 1 Sechser, 1 Gr. und 1 kr.; wie viele Schreibhefte kann ich dafür kaufen, wenn 1

Schreibheft 4 kr. kostet? 21) Nehmt jede Zahl von 10 bis 20 zweimal!

Anm. Fortan lasse man immer unmittelbar nach den „Aufgaben verschiedener Art" diejenigen Theile von dem Einmaleins, welche bereits eingeübt worden sind, recht tüchtig wiederholen, so daß die Schüler am Schlusse dieses Curses das ganze vollständig im Kopfe haben. Hier erstreckt sich die Wiederholung auf folgende Sätze:

1×2	1×3	1×4
2×2	2×3	2×4
3×2	3×3	3×4
|	|	|
10×2	10×3	10×4

Der fünfte Zehner.

(41 bis 50.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie beim dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Zifferr. S. 19, Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—50 durch 5.

a.

1+5, 6+5, 11+5 . . . 41+5; 46 — 5, 41 — 5, 36 — 5 ꝛc.
2+5, 7+5, 12+5 . . . 42+5; 47 — 5, 42 — 5, 37 — 5 ꝛc.
3+5, 8+5, 13+5 . . . 43+5; 48 — 5, 43 — 5, 38 — 5 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

$5 = 5$; $1 \times 5 = 5$
$5 + 5 = 10$; $2 \times 5 = 10$
$5 + 5 + 5 = 15$; $3 \times 5 = 15$
$5 + 5 + 5 + 5 = 20$; $4 \times 5 = 20$
u. s. w.

1) Welche Zahlen von 1—50 lassen sich aus 5 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das Doppelte von 5? das 4fache von 5? ꝛc.
5) Das Wievielfache von 5 ist 10? 25? 15? 40? ꝛc.
6) Für 1 Gr. kauft man 5 Eier; wie viel für 3 (6, 8, 10) Gr.?

b.

1) Aus wie vielmal 5 besteht 15? 10? 25? 20? ꝛc.
2) Wie oft liegt 5 in 10? in 20? in 35? in 25? ꝛc.
„ „ „ 5 in 8? in 12? in 16? in 24? ꝛc.

3) In welcher Zahl ist 5 3mal enthalten? in welcher 5mal? ꝛc.
4) 5 Schieferstifte kosten 1 kr.; was kosten 10? 25? 40?

c.

1) Zerlegt die Zahl 10 in 5 gleiche Theile! Ebenso 15! 20! 25 ꝛc.
2) Wie heißt der 5te Theil von 10? 15? 25? 20? ꝛc.
3) Sucht $^3/_5$ von 15! $^3/_5$ von 30! $^4/_5$ von 40!
4) 5 Mann verdienen 15 (20, 30 ꝛc.) fl.; was verdient 1 Mann?
5) 5 Arme erhalten 4 Laib Brod; wie viel kommt auf einen?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) Wie viel muß ich zu 26 legen, um 45 zu erhalten? 2) Wie viel muß man von 50 wegnehmen, wenn 32 übrig bleiben soll? 3) Rechne 2 × 11; 3 × 11; 4 × 11! 4) Wie viel ist 2 × 12? 3 × 12? 4 × 12? 5) Wie oft muß man 5 nehmen, um 45 zu erhalten? 6) In welche 2 Zahlen läßt sich 48 zerlegen? (47 + 1, 46 + 2 ꝛc.) 7) Wie viel betragen $^2/_3$ von 48? $^3/_4$ von 48? 8) Wovon ist 8 der 5te Theil? 9) Wie groß ist der Unterschied zwischen 42 und 36? zwischen 45 und 30? zwischen 48 und 24? zwischen 50 und 18? 10) Wie oft ist enthalten 11 in 44? 15 in 45? 12 in 48? 16 in 48? 11) Welche Zahl ist um 17 größer, als 32? 12) Wie viel betragen $^4/_5$ von 45 mehr, als $^2/_5$ von 45? 13) Mit welchen Geldsorten kann ich 48 kr. zahlen? 14) 5 kr. = 1 Batzen; wie viel Batzen sind 10 kr.? 25 kr.? ꝛc. 15) 49 Tage, wie viele Wochen? 16) 1 Pomeranze kostet 5 kr.; was kosten 2? 3? 4? ꝛc. 17) 5 Ellen kosten 35 fl.; was kostet 1 Elle? was kosten 4 Ellen? 18) Für 5 kr. erhalte ich 50 Nüsse, wie viel für 1 kr.? für 3 kr.? 19) Für 5 kr. erhält man 1 Citrone, wie viel für 15 kr.? 20) Fritz bekommt 1 Halbguldenstück und 2 Sechser, um 8 neue Schiefertafeln zu holen, jede zu 5 kr; wie viel Geld muß er wiederbringen?

Der sechste Zehner.

(51 bis 60.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie beim dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Zifferr. S. 21 ꝛc., Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—60 durch 6.

a.

1+6, 7+6, 13+6 . . . 49+6; 55 — 6, 49 — 6, 43 — 6 ꝛc.
2+6, 8+6, 14+6 . . . 50+6; 56 — 6, 50 — 6, 44 — 6 ꝛc.
3+6, 9+6, 15+6 . . . 51+6; 57 — 6, 51 — 6, 45 — 6 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

$$6 = 6;\ 1 \times 6 = 6$$
$$6 + 6 = 12;\ 2 \times 6 = 12$$
$$6 + 6 + 6 = 18;\ 3 \times 6 = 18$$
$$6 + 6 + 6 + 6 = 24;\ 4 \times 6 = 24$$
u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 60 lassen sich aus der 6 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 4fache von 6? das 7fache von 6? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 6 ist 12? 30? 18? 42? 36? ꝛc.
4) Wie viel Kreuzer machen 2 Sechser? 3 Sechser? 7 Sechser? ꝛc.

b.

1) Aus wie vielmal 6 besteht 18? 30? 12? 54 ꝛc.
2) Wie oft liegt 6 in 24? in 42? in 18? in 60? in 48? ꝛc.
„ „ „ 6 in 9? in 16? in 20? in 25? in 41?
3) In welcher Zahl liegt 6 2mal? 8mal? 5mal? 3mal? ꝛc.
4) Wie viel Sechser machen 18 kr.? 30 kr.? 12 kr.? 54 kr.? ꝛc.

c.

1) Zerlege in 6 gl. Theile die Zahl 6! 12! 18! 24! ꝛc.
2) Wie heißt der 6. Theil von 6? von 18? von 30? 12? ꝛc.
3) Wie viel betragen $^5/_6$ von 18? von 30? von 48? ꝛc.
4) Was kostet 1 Pfd., wenn 6 Pfd. 36 (48, 54) kr. kosten?
5) Wie viel ist der 6. Theil von 1 Elle? von 5 Ellen?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 2×12, 1 Drittel, + 22, 2mal, $^5/_6$, + 10, $^2/_3$ ꝛc. **2)** Suche den Unterschied von 54 und 45! von 53 und 35! ꝛc. **3)** Sucht das Zweifache aller Zahlen von 20 bis 30! **4)** Wie oft ist 2 enthalten in 44? in 48? 52? 58? **5)** Nehmt jede Zahl von 10 an bis 20 dreimal! **6)** Wie oft liegt 3 in 39? in 45? in 54? in 60? **7)** Um wie viel sind $^5/_6$ von 60 mehr, als $^5/_6$ von 36? **8)** Welcher Theil von 1 fl. sind 30 kr.? 20 kr. 15 kr.? 12 kr.? **9)** Wie viel Kreuzer beträgt $^1/_2$ fl.? $^1/_3$ fl.? $^2/_3$ fl.? $^1/_4$ fl.? $^3/_4$ fl.? **10)** In welche 2 Theile lassen sich 60 kr. zerlegen? **11)** Wie viel muß man zu 48 kr. legen, um 1 fl. zu erhalten? wie viel zu 42 kr.? zu 36 kr.? zu 28 kr.? ꝛc. **12)** Wie viel ist 1 fl. — 6 kr.? 1 fl. — 12 kr.? 1 fl. — 15 kr.? ꝛc. **13)** Macht die Groschen von 1 bis 20 zu Kreuzer! **14)** Wie viel Gulden geben 20 Gr.? 40 Gr.? 60 Gr.? 32 G.? ꝛc. **15)** Verwandelt die Sechser von 1 bis 10 in Kreuzer! **16)** 20, 30, 40, 50, 60; 15, 24 ꝛc. Sechser, wie viele Gulden? **17)** 1 Schff. = 6 Mtz.; wie viele Metz. sind 2 Schff.? 4 Schff.? ꝛc. **18)** 6 Mtz. = 1 Schff.; wie viel Schff. sind 12 Mtz.? 24 Mtz.? ꝛc. **19)** 1 Pfd. kostet 6 kr.; was kosten 2 Pfd.? 4 Pfd.? 6 Pfd.? 8 Pfd.? **20)** Für 1 fl. erhalte ich 6 Ellen, wie viel für 3 fl.? für 7 fl.? **21)** 6 Ms. Bier kosten 36 kr.; was kostet 1 Ms.? 5 Ms.? **22)** Wie viel Fäßchen lassen sich mit 54 Ms. Essig füllen, jedes zu 6 Ms.? **23)** Für 10 kr. erhält man 1 Maas

Wein, wie viel für 1 fl.? **24)** 1 Scheffel Leinsamen zu 42 fl.; wie hoch kommt 1 Mtz.?

Der siebente Zehner.

(61 bis 70.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie beim dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Zifferr. S. 24 ꝛc., Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—70 durch 7.

a.

1+7, 8+7, 15+7 . . . 57+7; 64 — 7, 57 — 7, 50 — 7 ꝛc.
2+7, 9+7, 16+7 . . . 58+7; 65 — 7, 58 — 7, 51 — 7 ꝛc.
3+7, 10+7, 17+7 . . . 59+7; 66 — 7, 59 — 7, 52 — 7 ꝛc.
u. s. w. u. s. w.

$7 = 7;\ 1 \times 7 = 7$
$7 + 7 = 14;\ 2 \times 7 = 14$
$7 + 7 + 7 = 21;\ 3 \times 7 = 21$
$7 + 7 + 7 + 7 = 28;\ 4 \times 7 = 28$
u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 70 lassen sich aus 7 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 3fache von 7? das 5fache von 7? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 7 in 14? 35? 21? 49? 28? ꝛc.
4) Wie viel Tage sind 3 Wochen? 8 Wch.? 5 Wch.? ꝛc.

b.

1) Aus wie vielmal 7 besteht die Zahl 21? 63? 35? ꝛc.
2) Wie oft liegt 7 in 14? in 35? in 21? in 70? 49? ꝛc.
" " " 7 in 8? in 16? in 24? in 32? ꝛc.
3) In welcher Zahl liegt 7 4mal? 7mal? 3mal? 5mal? ꝛc.
4) Wie viel Wochen sind 21 Tg.? 49 Tg.? 70 Tg.? 35 Tg?

c.

1) Zerlegt in 7 gleiche Theile die Zahl 21! 35! 14! 28! ꝛc.
2) Wie heißt der 7. Theil von 14? 49? 70? 56? ꝛc.
3) Suche $^2/_7$ von 14! $^3/_7$ von 21! $^4/_7$ von 42! $^5/_7$ von 35! ꝛc.
4) Jemand verdient in 7 Tg. 63 (42, 70) fl.; wie viel in 1 Tg.?
5) Ihrer Sieben haben 6 Mrg. Wiesen gemäht, wie viel Einer?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 8×6 halbirt, $^3/_4$, $+ 18 - 12 + 30 - 50 + 60$, $^1/_4$ ꝛc

2) Wie groß ist der Unterschied von 64 und 46? von 63 und 36? 3) Welcher Theil von 1 Eimer sind 32 Ms.? 16 Ms.? 8 Ms.? 4) Wie viel Ms. betragen $^3/_4$ Eimer? $^3/_8$ Eimer? $^7/_8$ Eimer? 5) 68 Sechser, wie viele Gulden und Kreuzer? 6) Ein Landmann pflanzte 64 Bäumchen; ein Sturmwind knickte 15 derselben ab; wie viel stehen noch? 7) David war 30 Jahre alt, als er König wurde, und regierte 40 Jahre lang; wie alt ist er geworden? 8) Bis zum Dache hat ein Haus 35 Fuß; das Dach hat noch 24 Fuß, und auf demselben steht ein Thürmchen, 8 Fuß hoch. Auf diesem sitzt ein Storch. Wie hoch sitzt der, vom Erdboden aus gerechnet? 9) Von 65 Schafen werden einmal 18 und wieder 16 geschlachtet; wie viele derselben freuen sich noch ihres Lebens? 10) Ein Bauer läßt 3 Wägen mit Getreide zur Schranne fahren; auf dem ersten sind 24 Säcke, auf dem zweiten 20 und auf dem dritten 18. Wie viele Säcke sind's im Ganzen? 11) Eine Elle kostet 7 kr.; was kosten 2 Ellen? 5 Ell.? 8 Ell.? rc.? 12) Konrad verdient in 1 Tg. 7 Sechser, wie viel fl. in 10 Tg.? 13) In 1 Woche braucht man 35 fl.; wie viel kommt auf 1 Tag? 14) 7 Arbeiter verdienen 63 fl.; wie viel einer? wie viel fünf?

Der achte Zehner.

(71 bis 80.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie beim dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Ziffern. S. 27, Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—80 durch 8.

a.

1+8, 9+8, 17+8 . . . 65+8; 73 — 8, 65 — 8, 57 — 8 rc.
2+8, 10+8, 18+8 . . . 66+8; 74 — 8, 66 — 8, 58 — 8 rc.
3+8, 11+8, 19+8 . . . 67+8; 75 — 8, 67 — 8, 59 — 8 rc.
u. s. w. u. s. w.

8 = 8; 1 × 8 = 8
8 + 8 = 16; 2 × 8 = 16
8 + 8 + 8 = 24; 3 × 8 = 24
8 + 8 + 8 + 8 = 32; 4 × 8 = 32
u. s. w.

1) Welche Zahlen von 1—80 lassen sich aus der 8 zusammensetzen?
2) Wie heißt das 4fache von 8? das 7fache von 8? rc.
3) Das Wievielfache von 8 ist 24? 42? 18? 64? rc.
4) Das Pfd. Fleisch zu 8 kr.; was kosten 2 Pfd.? 3 Pfd.? rc.

b.

1) Aus wie vielmal 8 besteht 16? 40? 24? 56? ꝛc.
2) Wie oft ist 8 enthalten in 16? in 32? in 48? in 24? ꝛc.
„ „ „ 8 „ „ 11? in 25? in 37? in 45? ꝛc.
3) In welcher Zahl liegt 8 2mal? 5mal? 3mal? ꝛc.
4) 8 Ellen geben 1 Kleid; wie viel Kleider geben 16 Ellen? 40 Ellen? 64 Ellen? 80 Ellen?

c.

1) Zerlege in 8 gleiche Theile die Zahl 8! 16! 24! 32! ꝛc.
2) Welches ist der 8. Theil von 24? von 40? von 16? von 32? ꝛc.
3) Wie viel betragen $^3/_8$ von 24? $^5/_8$ von 48? $^7/_8$ von 32? ꝛc.
4) Was kostet 1 Schff., wenn 8 Schff. 32 (48, 72) fl. kosten?
5) Wie viel ist der 8. Theil von 1 Elle? von 3 Ellen? 5 Ellen?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 3 × 2, die Hälfte, 4mal, 1 Drittel, 6mal, 1 Viertel, 8mal, 1 Sechstel, 10mal, $^5/_8$ u. s. w. **2)** Wie groß ist der Unterschied von 76 und 67? von 75 und 57 ꝛc. **3)** Um wie viel ist 9 × 8 mehr, als 5 × 8? **4)** Auf einem Baume sitzen 72 Sperlinge; 4 Jäger schießen auf sie, und 18 fallen; wie viele bleiben sitzen (fliegen fort)? **5)** Nimm jede Zahl von 30 an bis 40 zweimal! **6)** Suche das 4fache aller Zahlen von 10 bis 20! (4 × 10, 4 × 11 ꝛc.) **7)** Eine Elle kostet 8 Gr.; was kosten 3 Ellen? 5 Ellen? 9 Ellen? **8)** 75 kr., wie viele Gulden? 72 kr., wie viele Gulden? **9)** 80 Ms., wie viele Eimer? 75 Ms., wie viele Eimer? **10)** Von 72 Negersclaven starben auf der Reise $^3/_8$; wie viel derselben blieben am Leben? **11)** In welcher Zahl ist 8 dreimal enthalten? in welcher 7mal? **12)** Von welcher Zahl ist 8 die Hälfte? $^1/_3$? $^1/_6$? $^1/_8$? **13)** Fritz hat 74 Seiten zu wiederholen; mit 47 hat er es bereits gethan; wie viele hat er noch durchzunehmen? **14)** In einer Schule von 80 Kindern ist Karl der 36ste; wie viele Schüler sitzen unter ihm? **15)** 1 Pfd. Zucker kostet 4 Sechser; was kosten 5 Pfd.? 10 Pfd.? **16)** Für 8 fl. erhält man 64 Ellen; wie viel für 1 fl.? **17)** 8 Ellen kosten 1 fl.; was kosten 24 Ellen? 72 Ellen? 18) Welche Zahl muß man 3mal nehmen, um 75 zu erhalten?

Der neunte Zehner.

(81 bis 90.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie beim dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Zifferr. S. 30, Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1 — 90 durch 9.

a.

1+9, 10+9, 19+9 . . . 73+9; 82 — 9, 73 — 9, 64 — 9 ꝛc.
2+9, 11+9, 20+9 . . . 74+9; 83 — 9, 74 — 9, 65 — 9 ꝛc.
3+9, 12+9, 21+9 . . . 75+9; 84 — 9, 75 — 9, 66 — 9 ꝛc.
u. s. f. u. s. f.

$9 = 9;\ 1 \times 9 = 9$
$9 + 9 = 18;\ 2 \times 9 = 18$
$9 + 9 + 9 = 27;\ 3 \times 9 = 27$
$9 + 9 + 9 + 9 = 36;\ 4 \times 9 = 36$
u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 90 lassen sich aus der 9 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 3fache von 9? das 7fache von 9? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 9 ist 18? 45? 81? 27? 72? ꝛc.
4) In einem Hause gehen jeden Tag 9 Pfd. Brod auf; wie viel in 2 Tg.? in 4 Tg.? in 7 Tg? in 10 Tg?

b.

1) Aus wie vielmal 9 besteht die Zahl 27? 72? 18? 81? ꝛc.
2) Wie oft ist 9 enthalten in 18? in 45? in 72? in 63? ꝛc.
" " " 9 " in 11? in 23? in 32? in 48? ꝛc.
3) In welcher Zahl ist 9 4mal? 7mal? 3mal? 10mal? ꝛc.
4) Für 9 kr. erhält man 1 Lesebuch; wie viel für 18 kr.? 45 kr.?

c.

1) Zerlegt in 9 gleiche Theile die Zahl 9! 18! 27! 45! 63! ꝛc.
3) Wie groß ist der 9te Theil von 18? von 36? von 9? ꝛc.
3) Suche $^2/_9$ von 27! $^4/_9$ von 45! $^5/_9$ von 54! ꝛc.
4) Was kostet 1 Pfd., wenn 9 Pfd. 27 (45, 36) kr. kosten?
5) 9 Soldaten empfangen 7 Laibe Brod; wie viel kommt auf einen?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 9 × 9 + 9, 1 Drittel, 2mal, + 24, die Hälfte, + 44 ꝛc. **2)** Um wie viel unterscheiden sich 86 und 68? 85 und 58? 84 und 49? **3)** Wie viel ist 9 × 9 mehr, als 8 × 8? **4)** Um wie viel sind $^4/_9$ von 54 weniger, als $^4/_9$ von 81? **5)** Wie viel fl. und kr. machen 80, 83, 87, 90 Sechser? **6)** 80 (84, 66, 90) Gr., wie viel fl. und kr.? **7)** Nehmt jede Zahl von 20 bis 30 dreimal! (3×20, 3×21 ꝛc.) **8)** Wie oft ist 3 enthalten in 60? in 69? in 75? in 81? in 90? **9)** 1 Buch Papier kostet 9 kr.; was kosten 4 Buch? 7? 10? **10)** Von 84 Ellen werden 9 × 2 Ellen abgeschnitten; wie viel bleibt Rest? **11)** Karl hat von 90 Haselnüssen noch $^2/_3$ derselben; wie viel also? **12)** 9 Geschwister theilen 63 Aepfel miteinander; wie viel bekommt eines? Wie viel erhalten drei? **13)** Für 9 Thlr. 27 Pfd.; wie viel für 1 Thlr.? für 7 Thlr.?

Der zehnte Zehner.

(9 bis 100.)

I. Bilden und Zerlegen.

Wie beim dritten Zehner.

II. Zuzählen und Abziehen.

Aufg. z. Zifferr. S. 33, Uebung 3—8.

III. Messen und Theilen der Zahlen von 1—100 durch 10.

a.

1+10, 11+10, 21+10 . . . 81+10; 100—10, 90—10, 80—10 ꝛc.
2+10, 12+10, 22+10 . . . 82+10; 99—10, 89—10, 79—10 ꝛc.
3+10, 13+10, 23+10 . . . 83+10; 98—10, 88—10, 78—10 ꝛc.
u. s. f. u. s. f.

$10 = 10;\ 1 \times 10 = 10$
$10 + 10 = 20;\ 2 \times 10 = 20$
$10 + 10 + 10 = 30;\ 3 \times 10 = 30$
$10 + 10 + 10 + 10 = 40;\ 4 \times 10 = 40$

u. s. w.

1) Welche Zahlen bis 100 lassen sich aus der 10 zusammensetzen?
2) Welche Zahl ist das 5fache von 10? das 3fache von 10? ꝛc.
3) Das Wievielfache von 10 ist 40? 20? 70? 50? ꝛc.
4) Wie viel Sechser machen 3 fl.? 8 fl.? 5 fl.? 7 fl.?

b.

1) Aus wie vielmal 10 besteht 20? 50? 100? 80? ꝛc.
2) Wie oft ist 10 enthalten in 30? in 70? in 40? in 60? ꝛc.
„ „ „ 10 enthalten in 13? in 41? in 77? in 66? ꝛc.
3) In welcher Zahl liegt 10 3mal? 5mal? 2mal? ꝛc.
4) Wie viel Gulden machen 20 Sechser? 50 Sechser? 30 S.? ꝛc.

c.

1) Zerlegt in 10 gleiche Theile die Zahl 10! 30! 60! 20! ꝛc.
2) Wie heißt der 10te Theil von 20? von 50? von 30? ꝛc.
3) Was verdient 1 Mann, wenn 10 M. 30 (50, 80) fl. verdienen?
4) Zehn Mann theilen sich in 9 Laib Brod; wie thun sie das?

IV. Aufgaben verschiedener Art.

1) 3 × 2, die Hälfte, 4mal, 1 Drittel, 5mal, 1 Viertel, 8mal, 10 dazu, 1 Fünftel, 10mal, 7 Zehntel ꝛc. 2) Wie heißt der Unterschied von 98 und 89? von 97 und 79? ꝛc. 3) Sucht das Doppelte aller Zahlen von 40 an bis 50! 4) Nehmt jede Zahl von 10 an bis 20 fünfmal! 5) Welche Zahl ist um 45 kleiner, als 100? 6) Ein

Zehntel von 100 ist was für ein Theil von 50? **7)** Nennt mir zwei Zahlen, welche zusammen 100 machen? **8)** Zur Zeit, als Joseph in Aegypten war, hatte die Stadt Theben daselbst 100 Thore; das alte Rom hatte deren 37; wie viele Thore hatte Theben mehr, als Rom? **9)** Der Dom zu Mailand hat 2 $\times$ 49 Thürme und Thürmchen; wie viel also? **10)** Ich habe 100 neue Guldenstücke; 45 davon sind bayrische; unter den andern befinden sich $^2/_5$ würtembergische und $^3/_5$ badische; wie viel würtembergische und wie viel badische Gulden habe ich? **11)** Von 100 Schülern treten 32 aus; wie viele bleiben? **12)** 100 kr., wie viel Gulden? **13)** 100 Groschen (Sechser, Zwölfer); wie viel Gulden? **14)** 1 Eimer Wein zu 10 fl.; was kosten 2 Eimer ꝛc. **15)** 10 Ellen kosten 40 (50, 30 ꝛc.) fl.; was kostet 1 Elle? **16)** Für 10 Thlr. bekommt man 1 Ctr.; wie viel für 20 Thlr.? ꝛc. **17)** Welcher Theil vom Ctr. sind 50 Pfd.? 25 Pfd.? 20 Pfd.? 10 Pfd.? ꝛc. **18)** Wie viel Pfd. macht $^1/_2$ Ctr.? $^1/_4$ Ctr.? $^3/_4$ Ctr.? $^4/_5$ Ctr.? ꝛc.

Übersicht und Wiederholung.

I. Zuzählen und Abziehen.

1) Mit den Grundzahlen.

Auf- und Abwärtszählen, bald einzeln, bald im Chor.

Mit 1.	1, 2, 3, 4, 5 . . . 100;	100, 99, 98, 97 ꝛc.
Mit 2.	1, 3, 5, 7, 9 . . . 99;	99, 97, 95, 93 ꝛc.
	2, 4, 6, 8, 10 . . . 100;	100, 98, 96, 94 ꝛc.
Mit 3.	1, 4, 7, 10, 13 . . . 100;	100, 97, 94, 91 ꝛc.
	2, 5, 8, 11, 14 . . . 98;	98, 95, 92, 89, ꝛc.
	3, 6, 9, 12, 15 . . . 99;	99, 96, 93, 90 ꝛc.

Eben so auch mit 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Anm. Ist bisher in unserm Sinne verfahren worden; so sind die Schüler im Zu- und Abzählen mit den Grundzahlen bereits so sicher und fertig, daß es überflüssig ist, mit jeder derselben alle möglichen Reihen zu durchlaufen, mit 4 also viermal hinauf und herunter zu zählen. Es genügt dann, wenn solches mit jeder Zahl nur ein oder einigemal geschieht. Im entgegengesetzten Falle aber sind nicht nur alle möglichen Fälle zu erschöpfen, sondern es ist bei dieser Uebung überhaupt so lange zu verweilen, bis die erforderliche Sicherheit und Fertigkeit erworben ist.

2) Mit zusammengesetzten Zahlen.

a.	11+11	12+12	13+13	14+14	15+15	fort bis	20+20
	22+11	24+12	26+13	28+14	30+15		40+20
	33+11	36+12	39+13	42+14	45+15		60+20
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.		ꝛc.

Der Schüler spricht: 11 + 10 = 21, + 1 = 22; 11 + 11 = 22;
22 + 10 = 32, + 1 = 33; 22 + 11 = 33;
33 + 10 = 43, + 1 = 44; 33 + 11 = 44;
u. s. f.

b.	10 + 10	70 + 26	75 + 20	43 + 22	25 + 28
	10 + 50	70 + 21	72 + 20	54 + 41	36 + 37
	10 + 30 .c.	70 + 28	78 + 20	36 + 23	48 + 38
	20 + 20	60 + 21	63 + 20	25 + 34	54 + 29
	20 + 50	60 + 32	65 + 30	62 + 25	39 + 46
	20 + 40 ꝛc.	60 + 36	68 + 30	44 + 54	48 + 48
	30 + 20	50 + 25	51 + 20	75 + 21	64 + 27
	30 + 50	50 + 34	55 + 30	56 + 32	57 + 35
	30 + 30 ꝛc.	50 + 45	57 + 40	84 + 13	39 + 53
	40 + 20	40 + 24	42 + 20	33 + 45	45 + 47
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

c.	100 — 11	100 — 12	100 — 13	100 — 14	so fort bis	100 — 20
	89 — 11	88 — 12	87 — 14	86 — 14		80 — 20
	78 — 11	76 — 12	74 — 13	72 — 13		60 — 20
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.		ꝛc.

Der Schüler spricht: 100 — 10 = 90, — 1 = 89; 100 — 11 = 89.
89 — 10 = 79, — 1 = 78; 89 — 11 = 78.
78 — 10 = 68, — 1 = 67; 78 — 11 = 67. ꝛc.

d.	100 — 40	100 — 48	94 — 20	95 — 34
	100 — 70	100 — 36	98 — 60	97 — 56
	100 — 30 ꝛc.	100 — 54 ꝛc.	96 — 40 ꝛc.	93 — 48
	90 — 50	90 — 25	83 — 20	88 — 24
	90 — 20	90 — 52	89 — 70	85 — 52
	90 — 70 ꝛc.	90 — 36 ꝛc.	84 — 50 ꝛc.	83 — 36
	80 — 40	80 — 24	78 — 30	79 — 55
	80 — 60	80 — 58	75 — 50	76 — 43
	80 — 30 ꝛc.	80 — 37 ꝛc.	72 — 20 ꝛc.	72 — 24
	70 — 20	70 — 21	64 — 40	68 — 45
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

II. Vervielfältigen und Theilen.

a.

Das Einmaleins.

Von den Schülern zusammengestellt und tüchtig wiederholt.

1 × 1	1 × 2	1 × 3	1 × 4	1 × 5	1 × 6
2 × 1	2 × 2	2 × 3	2 × 4	2 × 5	2 × 6
3 × 1	3 × 2	3 × 3	3 × 4	3 × 5	3 × 6
|	|	|	|	|	|
10 × 1	10 × 2	10 × 3	10 × 4	10 × 5	10 × 6

1 × 7	1 × 8	1 × 9	1 × 10
2 × 7	2 × 8	2 × 9	2 × 10
3 × 7	3 × 8	3 × 9	3 × 10
|	|	|	|
10 × 7	10 × 8	10 × 9	10 × 10

2×1	3×1	4×1	5×1	6×1	7×1	8×1	9×1
2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2	9×2
2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	7×3	8×3	9×3
2×4	3×4	4×4	5×4	6×4	7×4	8×4	9×4
|	|	|	|	|	|	|	|
2×50;	3×33;	4×25;	5×20;	6×16;	7×14;	8×12;	9×11

Die Fälle bei vorstehender Uebung, wo einer der Faktoren eine zusammengesetzte Zahl ist, werden theilweise am Rechenbrette gerechnet. Z. B.

{ • • • • • • • • • • { •	{ • • • • • • • • • • { • •
{ • • • • • • • • • • { •	{ • • • • • • • • • • { • •
2 × 11 = 2 × 10 + 2 × 1 = 20 + 2 oder 22.	2 × 12 = 2 × 10 + 2 × 2 = 20 + 4 oder 24

und so weiter.

b.

Verwechselung der Faktoren.

• • • • = 4
• • • • = 4
• • • • = 4
‖ ‖ ‖ ‖
3 3 3 3

Betrachte ich die vorstehenden Punkte als drei wagrechte Reihen, so erscheinen sie mir als 4 + 4 + 4, nämlich als 3 × 4. Betrachte ich sie als vier senkrechte Reihen, so erscheinen sie mir als 3 + 3 + 3 + 3 oder 4 × 3. In dem einen Falle sind es aber eben so viele Punkte, als in dem andern; in beiden Fällen sind es 12. Also ist 3 × 4 gerade so viel als 4 × 3.

Eben so mit

2 × 3 = 3 × 2	4 × 6 = 6 × 4
3 × 5 = 5 × 3	3 × 8 = 8 × 3
4 × 5 = 5 × 4	5 × 6 = 6 × 5

c.

Das Zerlegen der Zahlen in gleiche Theile.

2 = 2 × 1	5 = 5 × 1	8 = 8 × 1	10 = 10 × 1
3 = 3 × 1	6 = 6 × 1	= 4 × 2	= 5 × 2
4 = 4 × 1	= 3 × 2	= 2 × 4	= 2 × 5
= 2 × 2	= 2 × 3	9 = 9 × 1	
	7 = 7 × 1	= 3 × 3	

Ebenso mit allen folgenden Zahlen bis 100, aber nicht ununterbrochen fort, sondern auf einmal immer nur 10 Zahlen. Zuerst frei im Kopfe, wobei ein Schüler um den andern eine Zahl übernimmt, dann mit Ziffern.

d.

Das Messen und Theilen der Zahlen.

(Mündlich.)

Mit 2. In welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 auf?
Wie oft liegt 2 in 4? in 10? in 16? in 12? rc.
Wie heißt die Hälfte von 6? von 10? von 8? rc.

Mit 3. In welchen Zahlen von 1 bis 30 geht 3 auf?
Wie oft liegt 3 in 9? in 15? in 21? in 12? rc.
Wie heißt der dritte Theil von 12? 18? 9? rc.

Mit 4. In welchen Zahlen von 1 bis 40 geht 4 auf?
Wie oft liegt 4 in 12? in 28? in 16? in 24? rc.
Wie heißt der vierte Theil von 8? 20? 12? rc.

So auch mit 5, 6, 7, 8, 9, 10.

III. Aufgaben verschiedener Art.

1) In welcher Zahl liegt 8 fünfmal? 7 sechsmal? 9 achtmal? rc. 2) Wovon ist 3 der sechste Theil? 7 der dritte Theil? 3) Wie viele Gulden sind 10 Sechser? 30 Sechser? 80 Sechser? 50 Sechser rc. 4) Wie viel Gulden und Kreuzer sind 24 Sechser? 36 Sechser? rc. 5) Wie viel Gulden und Kreuzer sind 72 kr.? 84 kr.? 95 kr.? 6) 1 fl. 17 kr., wie viel Kreuzer? 1 fl. 32 kr. =? kr. 7) Ein Landmann hat 8 Pferde, 20 Kühe, 12 Ochsen und 24 Schweine, wie viel Stück Vieh im Ganzen? 8) Drei Schwestern spinnen 24 Pfd. Flachs. Die eine spinnt 8 Pfd, die andere 9 Pfd.; wie viel spinnt die dritte? 9) Aus 6 Pfd. Flachs erhalten sie 5 Pfd. Garn; wie viel Garn bekommen sie im Ganzen?

(Die 24 oder 4 × 6 Pfd. Flachs geben 4 × 5 oder 20 Pfd. Garn.)

10) Jedes Pfd. Garn gibt 5 Ellen Leinwand; wie groß wird das Stück? 11) Aus je 4 Ellen Leinwand machen sie ein Hemd. Wie viele Hemden werden sie im Ganzen erhalten? 12) Jedes Hemd verkaufen sie um 2 fl.: wie groß ist ihr Erlös? 13) Für Flachs, Weben und Bleichen bezahlten sie 18 fl.; wie viel haben sie durch ihr Spinnen und

Nähen verdient? 14) Louise hatte auf ihrem Beete 35 Blumen. Da sie dieselben aber schlecht begoß, so verwelkten $^2/_5$ davon. Wie viele Blumen hatte sie dann noch? 15) Eine arme Frau hat 1 fl. 24 kr. und braucht täglich 6 kr. davon. Wie lange reicht sie mit ihrem Gelde aus? 16) Ich denke mir eine Zahl. Lege ich das 3fache von 8 dazu, so erhalte ich 32. Wie heißt die Zahl?

(Das 3fache von 8 = 24; von 24 bis auf 32 ist 8. Die Zahl, wozu ich noch 24 legen muß, um 32 zu erhalten, heißt also 8.)

17) Ein Mann machte ohnlängst eine Reise. Täglich gab er 3 fl. aus und brauchte im Ganzen 54 fl. Wie lange war er verreist? 18) Wie groß ist der Unterschied zwischen $^7/_8$ und $^7/_{10}$ von 80? 19) Emilie kauft 5 Ellen Zeug, die Elle zu 17 kr., und legt 1 ganzes und 1 halbes Guldenstück dafür hin. Wie viel muß sie zurückerhalten? 20) Ein Vater sagt zu seinem 8jährigen Sohne: Ich bin 7 mal so alt als du und noch um 5 Jahre älter. Wie alt ist der Vater? 21) Wie theuer ist 1 Elle Tuch, wenn 2 Ellen 1 fl. 20 kr kosten? 22) Von 48 Aepfeln werden die Hälfte, 1 Viertel und 1 Achtel gegessen; wie viel sind noch vorhanden? 23) Herman bekam 12 Ostereier, August $^2/_3$ mal so viel und Karl $^3/_4$ mal so viel; wie viele Eier erhielten sie zusammen? 24) Fritz hat 3 halbe Gulden. Wie viele Sechser wird er dafür erhalten? 25) Ein Taglöhner bekommt jeden Tag 12 kr. In welcher Zeit verdient er 1 fl.? 26) Christiana zahlt für 9 Loth Baumwolle 45 kr.; wie viel kostet 1 Loth? 27) Eugen kaufte das Schreibheft um 6 kr. und zahlte im Ganzen 42 kr.; wie viele Hefte hat er gekauft? 28) 1 Pfd. Fleisch kostet 11 kr.; wie viel kosten 8 Pfd.? 29) 1 Loth Seide kostet 32 kr.; wie hoch kommt das Quint? 30) In 7 Tagen verdient Jemand 1 fl. 3 kr., wie viel in 1 Tag? 31) Marie schreibt täglich 3 Seiten, wie viel in 1 Woche? 32) Wie viele Sechser bekommt man für 90 einzelne Kreuzer? 33) Wie viele Loth kann man für 48 kr. kaufen, wenn 1 Loth 12 kr. gilt? 34) Welche Zahl ist um 3 Zehner größer als 24? 35) Ein Blumenbeet hat 5 Reihen; in jeder Reihe stehen 8 Blumenstöcke; wie viele dergleichen stehen auf dem ganzen Beete? 36) Ein Bauer löste für 8 Scheffel Korn 72 fl.; wie theuer hat er den Scheffel verkauft? 37) Von 100 fl. bezahlt Jemand 9 Schff. Getreid; für jeden Scheffel gibt er 9 fl. Wie viel Geld bleibt ihm übrig? 38) Ein Mann hat 45 fl. und kauft 7 Ctr., den Ctr. zu 8 fl.; wie viel Geld fehlt ihm zur vollständigen Bezahlung? 39) Von 45 fl. gebe ich $^4/_9$ aus; wie viel Geld habe ich noch? 40) Wie viel ist 3 mal 30 + $^3/_{10}$ von 30 + 1?

Das Folgende gehört zunächst nicht für die Volksschule, sondern für Präparanden-Anstalten und Seminarien.

Nimmt man die Eins, die absolute Einheit, wiederholt zu sich selbst; so entstehen die Zahlen in ihrer Reihenfolge. 1, $2 \times 1 = 2$, $3 \times 1 = 3$, $4 \times 1 = 4$ u. s. f.

Man kann aber auch jede andere Zahl als Einheit setzen und, indem man sie wiederholt zu sich nimmt, Vielfache von ihr bilden. Daher gibt es auch Zahlen, welche noch aus andern Zahlen entstehen

können, als aus Eins. Z. B. 4 und 6. Die Zahl 4 kann auch entstehen aus 2×2, und die Zahl 6 aus 3×2 und 2×3.

Diejenigen Zahlen, welche sich aus keiner andern Zahl erzeugen lassen, als aus Eins, heißen Primzahlen. Diejenigen Zahlen dagegen, welche auch durch Vervielfachung einer andern Zahl entstehen können, werden Produktzahlen genannt.

Die Zahl 5 läßt sich nur bilden, indem die Eins wiederholt zu sich genommen wird. Sie ist daher eine Primzahl. Die Zahl 6 hingegen, die nicht nur aus 6×1, sondern auch aus 3×2 und 2×3 entstehen kann, ist eine Produktzahl.

Jede Zahl (außer Eins), durch deren Vervielfachung eine andere gewisse Zahl entstehen kann, ist ein Faktor derselben. Die 2, 3 mal genommen, gibt 6. Mithin ist 2 ein Faktor von 6. Da aber $3 \times 2 = 2 \times 3$, und 6 also auch aus 2×3 entstehen kann; so ist nicht nur 2, sondern auch 3 ein Faktor von 6, woraus überhaupt folgt, daß jede Produktzahl wenigstens zwei Faktoren hat.

Zwei Faktoren einer Zahl, von denen der eine den andern bedingt, nennt man ein Faktorenpaar. Manche Produktzahlen haben nur ein Faktorenpaar, andere haben deren mehr. Die Zahl 6 hat nur das Faktorenpaar 2×3 oder 3×2; die Zahl 12 hat zwei, nämlich 2×6 und 3×4.

Eine Zahl, welche in einer andern ohne Rest enthalten ist, von derselben also mehrmals, ohne daß ein Rest bleibt, weggenommen oder weggemessen werden kann, nennt man das Maß derselben. Und eine Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile eine andere Zahl ohne Rest getheilt werden kann, nennt man den Theiler derselben.

3 ist in 15 5mal, und 5 ist in 15 3mal ohne Rest enthalten. 3 und 5, die Faktoren von 15, sind also auch die Maße von 15.

Zerlegt man 15 in 3 gleiche Theile, so kommt auf jeden Theil 5; zerlegt man 15 in 5 gleiche Theile, so kommt auf jeden Theil 3. Man mag also 15 in 3 oder in 5 gleiche Theile zerlegen, so entfällt auf den Theil eine ganze Zahl. 15 ist durch 3 und 5 theilbar.*)

3 und 5, die Faktoren von 15, sind also zugleich die Maße und Theiler von 15.

Die Faktoren von 12 sind 2, 3, 4, 6. Alle diese Zahlen sind daher auch in 12 ohne Rest enthalten, und 12 ist durch sie theilbar. Sie sind die Maße und die Theiler von 12.

Hieraus geht zugleich hervor, daß in den Primzahlen keine andere Zahl (außer der Eins) aufgeht, und daß sie, da 1 nicht theilt, nur durch sich selbst theilbar sind.

---

*) Theilbar, im weitern Sinne des Wortes, ist 15 durch jede Zahl. 15 durch 2 getheilt $= 7\frac{1}{2}$, 15 durch 16 getheilt $= \frac{15}{16}$. Theilbar, im engern Sinne des Worts, sind Zahlen nur dann, wenn die Theile weder Brüche, noch gemischte Zahlen, sondern ganze Zahlen sind. Und in diesem Sinne ist 15 außer durch sich selbst nur noch theilbar durch 3 und 5.

Da aus einer Zahl durch ihre Vervielfachung eine ganze Reihe anderer Zahlen entstehen kann; so muß es auch Zahlenreihen und demnach auch Zahlenpaare geben, in denen eine und dieselbe Zahl ohne Rest enthalten ist, und die eben darum eine und dieselbe Zahl als Maß oder Theiler gemeinschaftlich haben.

Die Zahlen 4, 6, 8, 10 z. B. sind Vielfache von 2; 2 geht daher auch in allen diesen Zahlen auf. Mithin ist 2 das gemeinschaftliche Maß, der gemeinschaftliche Theiler derselben.

21 und 35 sind Produktzahlen von 7; 7 geht daher sowohl in 21, als in 35 auf; 21 und 35 haben 7 zum gemeinschaftlichen Maße oder Theiler.

Sehr häufig haben zwei oder mehrere gegebene Zahlen mehr als ein gemeinschaftliches Maß. In 8 und 12 geht nicht nur 2 auf, sondern auch 4; die Zahlen 8 und 12 haben also zwei gemeinschaftliche Maße oder Theiler. In 24, 36 und 60 sind 2, 3, 4, 6 und 12 ohne Rest enthalten. Hier gibt es also fünf gemeinschaftliche Theiler. Der größte davon ist 12.

Anm. Wie überaus wichtig es ist, das größte gemeinschaftliche Maß gegebener Zahlen schnell, wie mit einem Blick, zu erkennen, wird sich später hundertmal zeigen. Hier nur ein Beispiel. 39 Ellen kosten 28 fl.; wie hoch kommen 52 Ellen? Die Aufgabe sei im Kopfe zu rechnen. Kennt man die gemeinschaftlichen Maße von 39 und 52 nicht, so muß man zuerst berechnen, was 1 Elle kostet. Man muß also den 39. Theil von 28 fl. suchen und ihn dann 52mal nehmen. Wie schwierig! Wie leicht rechnet sich's dagegen, wenn man das größte gemeinschaftliche Maß von 39 und 52 kennt! Dasselbe ist 13. Man geht daher von 39 Ellen auf 13 Ellen und von 13 Ellen auf 52 Ellen. Also hat man in diesem Falle nur den 3. Theil von 28 fl. zu suchen und denselben 4mal zu nehmen.

Fragen und Aufgaben.

1) Was sind Primzahlen? 2) Wie heißen alle Primzahlen zwischen 1 und 100? 3) Was sind Produktzahlen? Was sind Faktoren? 5) Was sind Faktorenpaare? 6) Zerlegt jede Produktzahl von 4 an bis 100 in ihre Faktorenpaare! 7) Welche von diesen Produktzahlen haben nur ein Faktorenpaar? 8) Welche von ihnen haben zwei Faktorenpaare? Welche drei u. s. w. 9) Was versteht man unter dem Maße oder Theiler einer Zahl? 10) Was heißt: eine Zahl ist durch 7 theilbar? 11) Durch welche Zahlen ist 36 theilbar? Durch welche 57? 75? 84? 96? 12) Was versteht man unter einem gemeinschaftlichen Maße oder Theiler? 13) Welche gemeinschaftlichen Maße haben die Zahlen 48 und 72 und welches ist das größte? 14) Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von

9 u. 15?	18 u. 42?	25 u. 40?	32 u. 80?	38 u. 57?
12 u. 18?	20 u. 70?	26 u. 65?	33 u. 81?	39 u. 27?
14 u. 49?	21 u. 91?	27 u. 45?	34 u. 51?	40 u. 60?
15 u. 57?	22 u. 55?	28 u. 42?	35 u. 98?	42 u. 70?
16 u. 88?	24 u. 60?	30 u. 75?	36 u. 48?	44 u. 66?

45 u. 60?	51 u. 85?	57 u. 95?	64 u. 96?	70 u. 84?
46 u. 69?	52 u. 78?	58 u. 87?	65 u. 78?	72 u. 96?
48 u. 32?	54 u. 81?	60 u. 90?	66 u. 88?	75 u. 100?
49 u. 84?	55 u. 99?	62 u. 93?	68 u. 85?	84 u. 48?
50 u. 75?	56 u. 84?	63 u. 84?	69 u. 92?	90 u. 100?

15) Nenne drei Zahlenpaare, bei denen das gemeinschaftliche Maß 11 ist! **16)** Eben so drei Zahlenpaare mit dem gemeinschaftlichen Maße 12! 15! 16! 18! 20! **17)** Nenne zwei Zahlen, bei denen das gemeinschaftliche Maß gleich dem zwischen ihnen stattfindenden Unterschiede ist! **18)** Nenne zwei Zahlen, deren Unterschied 5mal so groß ist, als ihr gemeinschaftliches Maß! **19)** Mit welchen Zahlen innerhalb des ersten Hunderts hat die Zahl 63 gemeinschaftliche Maße? **20)** Mit welchen Zahlen innerhalb des ersten Hunderts hat die Zahl 100 gemeinschaftliche Theiler?

Zweiter Cursus.

Die Zahlen von Eins bis Tausend.

Die Zahlen von 1 bis 100 sind bekannt. Aus ihnen sind die Zahlen von 100 bis 1000 zusammengesetzt. Ihre Veranschaulichung durch Striche, Kugeln &c. fällt deßhalb weg. Dafür ist nöthig, daß der Schüler veranlaßt werde, sie mit den allseitig angeschauten Zahlen von 1 bis 100 zu messen und die Menge ihrer Einheiten (Einer, Zehner und Hunderter) sich klar vorzustellen. Zu diesem Zwecke lassen wir zunächst von einem Hundert zum andern aufwärts zählen. Damit der Schüler aber nicht gedankenlos fortschreite, nicht Zahlennamen ohne Inhalt nenne, so fordern wir ihn öfters auf, inne zu halten, die Stufe, bei der er sich befindet, näher ins Auge zu fassen und sowohl den schon zurückgelegten, als den noch vorliegenden Weg zu überschauen. Ist so ein neues Hundert hinzugezählt, so tritt das Messen und Theilen ein, in welcher Weise, wird am besten aus der Darstellung selbst ersehen. Bemerkt sei nur noch, daß Kopf- und Zifferrechnen, der Ausführung nach, noch nicht von einander geschieden sind.

Zählen, Messen und Theilen.

1) a. Zählen von 100 bis 200.

100, 101, 102, 103, 104, 105, 106 —

Halt! — Ich stehe im ersten Zehner des zweiten Hunderts. Zum ersten Zehner fehlen noch 4 Einer, und zum zweiten Hundert fehlen noch 4 Einer und 9 Zehner. — Weiter!

107, 108, 109, 110, 111, 112, 113 —

Halt! — Ich stehe jetzt im zweiten Zehner des zweiten Hunderts. Zum zweiten Zehner fehlen noch 7 Einer, und zum zweiten Hundert fehlen noch 7 Einer und 8 Zehner.

So fort bis 200.

Schreiben:

Hundertmal Eins = 1 Hunderter, 0 Zehner u. 0 Einer = 100.
Hundert und Eins = 1 Hunderter, 0 Zehner u. 1 Einer = 101 ꝛc.
Hundert und Zehn = 1 Hunderter, 1 Zehner u. 0 Einer = 110.
Hundert und Elf = 1 Hunderter, 1 Zehner u. 1 Einer = 111 ꝛc.

b. Messen mit dem Zehner.

100 = 10 × 10 oder 10 Zehner.
110 = 10 × 10 + 1 × 10, also 11 × 10 od. 11 Zehner.
120 = 10 × 10 + 2 × 10, „ 12 × 10 od. 12 „
130 = 10 × 10 + 3 × 10, „ 13 × 10 od. 13 „

So fort bis zu 200.

c. Messen mit der Zahl 20.

20 + 20	2 × 20	200 — 20	20 : 40
40 + 20	3 × 20	180 — 20	20 : 60
60 + 20	4 × 20	160 — 20	20 : 80
|	|	|	|
180 + 20	10 × 20	20 — 20	20 : 200

1 fl. = 20 Gr.; 2 fl. = 2 × 20 oder 40 Gr.;
3 fl. = 3 × 20 oder 60 Gr.;
4 fl. = 4 × 20 oder 80 Gr. ꝛc.
20 Gr. = 1 fl.; 40 oder 2 × 20 Gr. = 2 fl.;
60 oder 3 × 20 Gr. = 3 fl.;
80 oder 4 × 20 Gr. = 4 fl. ꝛc.

d. Theilen durch 2.

Durch das Vorausgegangene hat der Schüler die Vielfachen von 20 kennen gelernt. Sie werden nun halbirt und bilden später die Anhaltspunkte beim Halbiren der Zahlen, die zwischen ihnen liegen.

Frage: Wie heißen die Vielfachen von 20? (40, 60, 80, 100, 120 ꝛc.) Abwärts! (200, 180, 160 ꝛc.)

Von diesen Zahlen suchen wir nun die Hälfte.

Anschreiben:	Sprechen:
2, 20;	$1/2$ von 2 = 1, $1/2$ von 20 od. 10 × 2 = 10 × 1 od. 10.
4, 40;	$1/2$ „ 4 = 2, $1/2$ „ 40 „ 10 × 4 = 10 × 2 od. 20.
6, 60;	$1/2$ „ 6 = 3, $1/2$ „ 60 „ 10 × 6 = 10 × 3 od. 30.

So fort.

Zuletzt gebe man Fragen außer der Reihenfolge, bis die Antwort wie mit einem Schlage erfolgt. Die Hälfte von 80? von 140? von 180? ꝛc.

2 Fdr. Wein kosten 80 (120, 140, 180) fl.; was kostet 1 Fdr.? Für 2 Gr. erhält man 40 (60, 100, 160) Kirschen; wie viel für 1 Groschen?

2) a. Zählen von 200 bis 300.

200, 201, 102, 203 —

Ich stehe im ersten Zehner des dritten Hunderts. Zum ersten Zehner fehlen noch 7 Einer, und zum dritten Hundert fehlen noch 7 Einer und 9 Zehner.

So fort bis 300.

b. Messen mit dem Zehner.

200 = 20 × 10 oder 20 Zehner.
210 = 20 × 10 + 1 × 10, also 21 × 10 od. 21 Z.
220 = 20 × 10 + 2 × 10, also 22 × 10 od. 22 Z.
230 = 20 × 10 + 3 × 10, also 23 × 10 od. 23 Z.

So fort bis 300.

c. Messen mit der Zahl 30.

30 + 30	2 × 30	300 — 30	30 : 60
60 + 30	3 × 30	270 — 30	30 : 90
90 + 30	4 × 30	240 — 30	30 : 120
|	|	|	|
270 + 30	10 × 30	30 — 30	30 : 300

1 Mon. = 30 Tg.; 2 Mon. = 2 × 30 oder 60 Tg.
3 Mon. = 3 × 30 „ 90 Tg.
4 Mon. = 4 × 30 „ 120 Tg. ꝛc.
30 Tg. = 1 Mon.; 60 oder 2 × 30 Tg. = 2 Mon.
90 „ 3 × 30 Tg. = 3 Mon.
120 „ 4 × 30 Tg. = 4 Mon. ꝛc.

d. Theilen durch 3.

Was beim Halbiren die Vielfachen von 20, das sind beim Drittheilen die Vielfachen von 30, beim Viertheilen die Vielfachen von 40 u. s. f. Diese Zahlen sind daher am gehörigen Orte, hier die Vielfachen von 30, stets tüchtig einzuüben.

Frage: Wie heißen die Vielfachen von 30? (60, 90 ꝛc.) Abwärts! (300, 270, 240 ꝛc.) Hiervon suchen wir nun den dritten Theil.

Anschreiben:	Sprechen:
3, 30;	$^1/_3$ von 3 = 1, $^1/_3$ von 30 = 10 × 1 od. 10.
6, 60;	$^1/_3$ von 6 = 2, $^1/_3$ von 60 = 10 × 2 od. 20.
9, 90;	$^1/_3$ von 9 = 3, $^1/_3$ von 90 = 10 × 3 od. 30.

u. s. f.

Zuletzt gebe man wieder Aufgaben außer der Reihenfolge, bis die Antwort rasch erfolgt. $^1/_3$ von 120? $^1/_3$ von 210? ꝛc.

Wie viel betragen $^2/_3$ von 60? von 150? von 120? von 180?

3 Ctr. Waare kosten 90 (150, 210, 270) fl.; was kostet 1 Ctr.?
A erspart sich in 3 J. 120 (180, 240, 300) fl.; wie viel jährlich?

---

3) a. Zählen von 300 bis 400.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

300 = 30 × 10 oder 30 Zehner.
310 = 30 × 10 + 1 × 10, also 31 × 10 od. 31 Z.
320 = 30 × 10 + 2 × 10, also 32 × 10 od. 32 Z.

u. s. w.

c. Messen mit der Zahl 40.

40 + 40	2 × 40	400 — 40	40 : 80
80 + 40	3 × 40	360 — 40	40 : 120
120 + 40	4 × 40	320 — 40	40 : 160
|	|	|	|
360 + 40	10 × 40	40 — 40	40 : 400

1 Ctr. kostet 40 fl.; 2 Ctr. kosten 2 × 40 oder 80 fl.;
3 Ctr. kosten 3 × 40 oder 120 fl.;
4 Ctr. kosten 4 × 40 oder 160 fl. ꝛc.

Für 40 fl. erhält man 1 Ctr.; für 80 oder 2 × 40 fl. 2 × 1 Ctr. od. 2 Ctr.;
für 120 od. 3 × 40 fl. 3 × 1 Ctr. od. 3 Ctr.;
für 160 od. 4 × 40 fl. 4 × 1 Ctr. od. 4 Ctr.;

Welche Zahlen bis 400 sind Vielfache von 40?

d. Theilen durch 4.

Anschreiben:	Sprechen:
4, 40;	1/4 von 4 = 1, 1/4 von 40 = 10 × 1 od. 10.
8, 80;	1/4 von 8 = 2, 1/4 von 80 = 10 × 2 od. 20.
12, 120;	1/4 von 12 = 6, 1/4 von 120 = 10 × 3 od. 30.

So fort.

Fragen außer der Ordnung! (1/4 von 160? 1/4 von 360?)
Wie viel betragen 3/4 von 120? von 200? von 280? ꝛc.
4 Kisten wiegen 80 (160, 240, 320) ℔; wie viel eine?
Für 4 fl. kauft man 120 (200, 280, 360) Stück; wie viel für 1 fl.

---

4) a. Zählen von 400 bis 500.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

400 = 40 × 10 oder 40 Zehner.
410 = 40 × 10 + 1 × 10, also 41 × 10 od. 41 Z.
420 = 40 × 10 + 2 × 10, also 42 × 10 od. 42 Z.

u. s. w.

c. Messen mit der Zahl 50.

50 + 50	2 × 50	500 — 50	50 : 100
100 + 50	3 × 50	450 — 50	50 : 150
150 + 50	4 × 50	400 — 50	50 : 200
⋮	⋮	⋮	⋮
450 × 50	10 × 50	50 — 50	50 : 500

A verdient in 1 Mon. 50 fl.; in 2 Mon. 2 × 50 oder 100 fl.;
in 3 Mon. 3 × 50 oder 150 fl.;
in 4 Mon. 4 × 50 oder 200 fl.;

50 Aepfel kosten 1 Thlr.; 100 oder 2 × 50 Aepfel kosten 2 × 1 Thlr. od. 2 Thlr.
150 „ 3 × 50 „ „ 3 × 1 „ „ 3 „
200 „ 4 × 50 „ „ 4 × 1 „ „ 4 „
u. s. w.

Angabe der Vielfachen von 50, auf- und abwärts.

d. Theilen durch 5.

Anschreiben: Sprechen:

5, 50; $^1/_5$ von 5 ist 1, $^1/_5$ von 50 ist 10 × 1 oder 10.
10, 100; $^1/_5$ von 10 ist 2, $^1/_5$ von 100 ist 10 × 2 oder 20.
15, 150; $^1/_5$ von 15 ist 3, $^1/_5$ von 150 ist 10 × 3 oder 30.
u. s. w.

Wie viel beträgt $^1/_5$ von 250? von 150? von 400? ꝛc.
Suche $^2/_5$ von 200? $^3/_5$ von 350? $^4/_5$ von 450? ꝛc.
5 Männer theilen sich in 150 (250, 400) fl.; wie viel erhält 1 Mann?
5 Ctr. kosten 200 (300, 500) fl.; wie viel kostet 1 Ctr.?

---

5) a. Zählen von 500 bis 600.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

Bekannt.

c. Messen mit der Zahl 60.

60 + 60	2 × 60	600 — 60	60 : 120
120 + 60	3 × 60	540 — 60	60 : 180
180 + 60	4 × 60	480 — 60	60 : 240
⋮	⋮	⋮	⋮
540 + 60	10 × 60	60 — 60	60 : 600

1 fl. = 60 kr.; 2 fl. = 2 × 60 oder 120 kr.;
3 fl. = 3 × 60 oder 180 kr., s. f. bis
10 fl. = 10 × 60 oder 600 kr.

60 kr. = 1 fl.; 120 oder 2 × 60 kr. = 2 fl.;
180 oder 3 × 60 kr. = 3 fl., s. f. bis
600 oder 10 × 60 kr. = 10 fl.

Wiederholung der Vielfachen von 60 auf- und abwärts.

d. Theilen durch 6.

6, 60;	$^1/_6$ von 6 = 1, $^1/_6$ von 60 = 10 × 1 oder 10;
12, 120;	$^1/_6$ von 12 = 2, $^1/_6$ von 120 = 10 × 2 oder 20;
18, 180;	$^1/_6$ von 18 = 3, $^1/_6$ von 180 = 10 × 3 oder 30;

u. s. w.

Wie viel ist $^1/_6$ von 240? $^1/_6$ von 420? $^1/_6$ von 180? ꝛc.
Wie viel betragen $^5/_6$ von 120? von 600? von 480? von 360? ꝛc.
6 Schff. kosten 120 (300, 480) fl.; wie theuer ist 1 Schff.?
Wie viel kostet 1 Ctr., wenn 6 Ctr. 180 (420, 540 fl. kosten?

---

6) a. Zählen von 600 bis 700.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

Bekannt.

c. Messen mit der Zahl 70.

70 + 70	2 × 70	700 — 70	70 : 140
140 + 70	3 × 70	730 — 70	70 : 210
210 + 70	4 × 70	560 — 70	70 : 280
|	|	|	|
630 + 70	10 × 70	70 — 70	70 : 700

1 Pferd kostet 70 Thlr.; 2 Pferde kosten 2 × 70 od. 140 Thlr.
3 „ „ 3 × 70 „ 210 „
4 „ „ 4 × 70 „ 280 „

Für 70 fl. 1 Fdr. Wein; für 140 od. 2 × 70 fl. 2 × 1 Fdr. od. 2 Fdr.
für 210 od. 3 × 70 fl. 3 × 1 Fdr. od. 3 Fdr.
für 280 od. 4 × 70 fl. 4 × 1 Fdr. od. 4 Fdr.

Wiederholung der Vielfachen von 70, auf- und abwärts.

d. Theilen durch 7.

7, 70;	$^1/_7$ von 7 = 1, $^1/_7$ von 70 = 10 × 1 oder 10;
14, 140;	$^1/_7$ von 14 = 2, $^1/_7$ von 140 = 10 × 2 oder 20;
21, 210;	$^1/_7$ von 21 = 3, $^1/_7$ von 210 = 10 × 3 oder 30;

u. s. f.

Wie viel ist $^1/_7$ von 210? von 490? von 140? von 630?
Suche $^2/_7$ von 280! $^3/_7$ von 480! $^4/_7$ von 700! $^5/_7$ von 530! ꝛc.

7 Mann verdienen 210 (350, 490) fl.; wie viel 1 Mann?
Wie viel kostet 1 Ctr., wenn 7 Ctr. 280 (420, 560) fl. kosten?

---

7) a. Zählen von 700 bis 800.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

Bekannt.

c. Messen mit der Zahl 80.

80 + 80	2 × 80	800 — 80	80 : 160
160 + 80	3 × 80	720 — 80	80 : 240
240 + 80	4 × 80	640 — 80	80 : 320
|	|	|	|
720 + 80	10 × 80	160 — 80	80 : 800

1 Schffl. Repsamen gibt 80 Pfd. Oel; 2 Schffl. geben 2 × 80 od. 160 Pfd.
3 Schffl. geben 3 × 80 od. 240 Pfd.
4 Schffl. geben 4 × 80 od. 320 Pfd. ꝛc.

Zu 80 Pfd. Oel gehört 1 Schff.; zu 160 oder 2 × 80 Pfd. gehören 2 Schff.
zu 240 „ 3 × 80 Pfd. „ 3 „
zu 320 „ 4 × 80 Pfd. „ 4 „

Wiederholung der Vielfachen von 80, auf- und abwärts.

d. Theilen durch 8.

$^1/_8$ von 8 = 1, $^1/_8$ von 80 = 10 × 1 oder 10;
$^1/_8$ von 16 = 2, $^1/_8$ von 160 = 10 × 2 „ 20;
$^1/_8$ von 24 = 3, $^1/_8$ von 240 = 10 × 3 „ 30;
u. s. w.

Wie viel ist $^1/_8$ von 240? $^1/_8$ von 640? $^1/_8$ von 320? ꝛc.
Suche $^3/_8$ von 160! $^5/_8$ von 720? $^7/_8$ von 480?
8 Reihen Bäume zählen 160 (240) Stück; wie viel eine?
8 Ballen Tuch kosten 320 (480) Thlr.; wie viel kostet 1 Ballen?

---

8) a. Zählen von 800 bis 900.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

Bekannt.

c. Messen mit der Zahl 90.

90 + 90	2 × 90	900 — 90	90 : 180
180 + 90	3 × 90	810 — 90	90 : 270
270 + 90	4 × 90	720 — 90	90 : 360
|	|	|	|
810 + 90	10 × 90	180 — 90	90 : 900

Für 1 fl. erhält man 90 Aepfel; für 2 fl. 2 × 90 od. 180 Aepfel.
für 3 fl. 3 × 90 od. 270 Aepfel.
für 4 fl. 4 × 90 od. 360 Aepfel ꝛc.
90 Pfd. Mehl reichen 1 Mon.; 180 oder 2 × 90 Pfd. reichen 2 Mon.
270 „ 3 × 90 Pfd. „ 3 „
360 „ 4 × 90 Pfd. „ 4 „ ꝛc.

Wiederholung der Vielfachen von 90, auf- und abwärts.

d. Theilen durch 9.

$^1/_9$ von 9 = 1, $^1/_9$ von 90 = 10 × 1 oder 10;
$^1/_9$ von 18 = 2, $^1/_9$ von 180 = 10 × 2 oder 20;
$^1/_9$ von 27 = 3, $^1/_9$ von 270 = 10 × 3 oder 30;
u. s. w.

Wie viel ist $^1/_9$ von 630? $^1/_9$ von 450? $^1/_9$ von 810? ꝛc.
Suche $^2/_9$ von 180! $^4/_9$ von 720! $^5/_9$ von 360! ꝛc.

9 Mrg. Wiesen ertrugen 450 (540 ꝛc.) Ctr. Heu; wie viel 1 Morgen?

9 Arbeiter verdienen 270 (720 ꝛc.) fl.; was verdient 1 Arbeiter?

---

9) a. Zählen von 900 bis 1000.

Bekannt.

b. Messen mit dem Zehner.

Bekannt.

c. Messen mit der Zahl 100.

100 + 100	2 × 100	1000 — 100	100 : 200
200 + 100	3 × 100	900 — 100	100 : 300
300 + 100	4 × 100	800 — 100	100 : 1000
|	|	|	|
900 + 100	10 × 100	100 — 100	100 : 1000

1 Ctr. = 100 Pfd.; 2 Ctr. = 2 × 100 oder 200 Pfd.
3 Ctr. = 3 × 100 oder 300 Pfd. ꝛc.
100 Pfd. = 1 Ctr.; 200 oder 2 × 100 Pfd. = 2 Ctr.
300 oder 3 × 100 Pfd. = 3 Ctr.

Wiederholung der Vielfachen von 100.

d. Theilen durch 10.

$^1/_{10}$ von 100 = 10; $^1/_{10}$ von 200 = 2 × 10 oder 20.
$^1/_{10}$ von 300 = 3 × 10 oder 30.
$^1/_{10}$ von 400 = 4 × 10 oder 40 ꝛc.

Wie viel ist $^1/_{10}$ von 700? von 300? von 800? ꝛc.
Suche $^3/_{10}$ von 400! $^7/_{10}$ von 900! $^9/_{10}$ von 1000!

Ein Mann zahlt in 10 Jahren 700 (900) fl. Steuer; wie viel jährlich?

Wie viel kostet 1 Fdr., wenn 10 Fdr. 500 (800) fl. kosten?

In Schulen, wo man sich auf das Allernothwendigste beschränken muß, wird dieser Kursus nicht vollständig durchgenommen werden können. Ueberschlagen darf er aber auch nicht werden. Um die Schüler nur einigermassen mit den Zahlen von 100 bis 1000 bekannt zu machen, so lasse man sie wenigstens von einem Hundert zum andern, wie angezeigt, mit Unterbrechung zählen und das zurückgelegte Hundert mit dem Zehner messen. Wo es jedoch die Zeit gestattet, ist dieser Kursus, wie der erste, vollständig durchzuführen. Für Präparandenanstalten ausschließlich gehört das Folgende, nämlich:

Das Zerfällen der Zahlen in Faktoren.

Beispiel: Wie heißen die Faktorenpaare von 120?

Verfahren.

120 in 2 gleiche Theile getheilt = 2 × 60; 120 = 2 × 60.

60 wieder in 2 gleiche Theile zerlegt = 2 × 30; da 60 = 2 × 30, so ist **2** × 60 = **2** × 2 × 30 oder 4 × 30; also ist 120 = 2 × 60 = 4 × 30.

30 wieder in 2 gleiche Theile zerlegt = 2 × 15; da 30 = 2 × 15, so ist **4** × 30 = **4** × 2 × 15 oder 8 × 15; also ist 120 = 2 × 60 = 4 × 30 = 8 × 15.

Dieß Resultat wird notirt; dann:

120 in 3 gleiche Theile zerlegt = 3 × 40; 120 = 3 × 40.

40 wieder in 2 gleiche Theile zerlegt = 2 × 20; da 40 = 2 × 20, so ist **3** × 40 = **3** × 2 × 20 oder 6 × 20; 60 = 3 × 40 = 6 × 20.

20 = 2 × 10; **6** × 20 = **6** × 2 × 10 oder 12 × 10; also ist 120 = 3 × 40 = 6 × 20 = 12 × 10.

10 = 2 × 5; **12** × 10 = **12** × 2 × 5 oder 24 × 5; also ist 120 = 3 × 40 = 6 × 20 = 12 × 10 = 24 × 5.

Dieß Resultat wird ebenfalls notirt. Die Zahl 120 läßt sich demnach zerlegen

in 2 × 60, 4 × 30 und 8 × 15; ferner
in 3 × 40, 6 × 20, 12 × 10 und 24 × 5.

Geordnet:

120 = 2 × 60
= 3 × 40
= 4 × 30
= 5 × 24
= 6 × 20
= 8 × 15
= 10 × 12

Wie heißt das größte gemeinschaftliche Maß von 120 und 80? von 120 und 90? von 120 und 72? von 120 und 100? von 75 und 120?

So werden auch die Faktorenpaare der folgenden Zahlen gesucht. 140, 150, 160, 180, 200, 240, 250, 270, 280, 300, 320, 360, 400, 450, 480, 500, 540, 560, 600, 630, 640, 700, 720, 750, 800, 840, 900, 960, 1000.

Schlußbemerkung.

Daß bisher zwischen Kopf- und Zifferrechnen der Ausführung nach ein Unterschied nicht bestand, lag in der geringen Größe der behandelten Zahlen. Mit dem Eintritte in den Zahlenraum von unbegränzter Ausdehnung wird dieß anders. Will man beim schriftlichen Rechnen mit größeren Zahlen schnell und sicher operiren, so muß man nach gewissen festen Regeln verfahren, nach Regeln, welche von der Weise des Kopfrechnens mehr oder weniger abweichen. Indeß folgt hieraus noch nicht, daß von nun an sowohl das Kopf- als das Zifferrechnen seinen eignen Weg gehen dürfe, eines ohne Rücksicht auf das andere. Der gesammte Rechenunterricht muß ein Ganzes bilden. Eben darum muß auch alles Rechnen, mit und ohne Ziffern, durchaus in inniger Beziehung zu einander stehen. Das Kopfrechnen geht als Leuchte dem Zifferrechnen voran und zur Seite. Hat aber dieses im Lichte desselben eine neue Stufe erstiegen, und handelt es sich dann bei ihm nur noch um Sicherheit und Fertigkeit; so beschränkt sich indessen das Kopfrechnen auf sich selbst, es arbeitet in derselben Sache, aber mit kleineren Größen und in seiner eigenen Weise. So halten wir's.

Uebrigens wird sich jetzt die sorgfältige Behandlung der beiden ersten Curse lohnen. Bei der gewonnenen Fertigkeit im Operiren mit den kleineren Zahlen werden sich die Schüler ungemein leicht und sicher in das Rechnen mit höheren Zahlen hineinarbeiten; geweckt und an's Denken gewöhnt, werden sie jede Verfahrungsweise schnell begreifen; und während sich Lehrer und Schüler oft Jahre lang abquälen, bis sie mit den vier Spezies „fertig" werden und es dennoch häufig weder zur Einsicht, noch zur rechten Sicherheit und Fertigkeit darin bringen, sind unsere Schüler im Stande, in wenigen Monaten — recht leicht in einem halben Jahre — vollkommen Herr darüber zu werden. Das ist nicht nur in dem nächsten, sondern in jedem noch folgenden Cursus der Fall. Und somit wird sich die auf das Zahlengebiet von 1 bis 1000 mehr verwendete Zeit von jetzt an wieder reichlich ersetzen.

Dritter Cursus.

Der Zahlenraum von unbegränzter Ausdehnung.

Das Numeriren.

1) 1 mal 1 = 1 Einer, geschrieben 1.
2 mal 1 = 2 Einer, „ 2.
3 mal 1 = 3 Einer, „ 3.
ꝛc.

2) 10 mal 1 Einer = 1 Zehner.

Ein Zehner ist 10 mal so groß, als 1 Einer; daher kommt die Ziffer 1, wenn sie einen Zehner gelten soll, um eine Stelle mehr zur Linken, nämlich in die zweite Stelle.

1 Zehner, mit Ziffern geschrieben = 10.
10 mal 2 = 2 Zehner, geschrieben 20.
10 mal 3 = 3 Zehner, „ 30.
10 mal 4 = 4 Zehner, „ 40.
ꝛc.

So viel Einer eine Ziffer an sich (oder in der ersten Stelle) bedeutet, so viel Zehner bezeichnet sie in der zweiten Stelle.

3) 10 mal 1 Zehner = 1 Hunderter.

Ein Hunderter ist 10 mal so groß, als 1 Zehner; darum wird derselbe auch um eine Stelle weiter links geschrieben, als 1 Zehner. Die Zehner stehen in der zweiten Stelle; die Hunderter kommen also in die dritte.

1 Hunderter, mit Ziffern geschrieben = 100.
10 mal 2 Zehner = 2 Hunderter, geschrieben 200.
10 mal 3 Zehner = 3 „ „ 300.
10 mal 4 Zehner = 4 „ „ 400.
ꝛc.

So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Hunderter bezeichnet sie in der dritten Stelle.

4) 10 mal 1 Hunderter = 1 Tausender.

Ein Tausender ist wieder 10 mal so groß, als 1 Hunderter; deßhalb wird ein Tausender wieder um eine Stelle weiter links geschrieben, als 1 Hunderter. Die Hunderter stehen in der dritten Stelle; die Tausender kommen also in die vierte.

1 Tausender, mit Ziffern geschrieben = 1000.
10 mal 2 Hunderter = 2 Tausender, geschrieben 2000.
10 mal 3 Hunderter = 3 Tausender, " 3000.
10 mal 4 Hunderter = 4 Tausender, " 4000.
2c.

So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Tausender bezeichnet sie in der vierten Stelle.

3tausend und 400 = 3 T., 4 H., 0 Z., 0 E. = 3400.
8tausend 470 = 8 T., 4 H., 7 Z., 0 E. = 8470.
5tausend 895 = 5 T., 8 H., 9 Z., 5 E. = 5895.
7tausend und 3 = 7 T., 0 H., 0 Z., 3 E. = 7003.
2c.

5) 10 mal 1 Tausender = 1 Zehntausender.

Ein Zehntausender ist das Zehnfache von einem Tausender. Die einfachen Tausender stehen in der vierten Stelle; die Zehntausender kommen also in die fünfte.

1 Zehntausender mit Ziffern geschrieben = 10000.
10 mal 2 Tausender = 2 Zehnt. (od. 20tausend) = 20000.
10 mal 3 Tausender = 3 Zehnt. (od. 30tausend) = 30000.
2c.

So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Zehntausender bezeichnet sie in der fünften Stelle.

26tausend = 2 Zt., 6 T., 0 H., 0 Z., 0 E. = 26000.
62tausend und 500 = 6 Zt., 2 T., 5 H., 0 Z., 0 E. = 62500.
75tausend 820 = 7 Zt., 5 T., 8 H., 2 Z., 0 E. = 75820.
57tausend 468 = 5 Zt., 7 T., 4 H., 6 Z., 8 E. = 57468.
2c.

In dieser Weise geht man von den Zehntausenden in die Hunderttausende und von den Hunderttausenden zu den Millionen über.

Ist das geschehen, so gebe man Fragen folgender Art:

a. In welcher Stelle stehen die Einer? die Hunderter? die Zehner? die einfachen Tausender? die Hunderttausender? 2c.

1 1 1 1 1 1 1
(An die Wandtafel geschrieben.)

b. Hier steht die Ziffer 1 siebenmal. Welche davon steht in der ersten Stelle? in der vierten Stelle? in der 2. Stelle? ꝛc.

Nun sagt mir, was jede 1 in der Ordnung von der rechten Hand gegen die linke bedeutet!

Die 1 in der ersten Stelle gilt 1 Einer. — Die 1 in der zweiten Stelle gilt 1 Zehner, also 10 mal 1 Einer. — Die 1 in der dritten Stelle gilt 1 Hunderter, also 10 mal 1 Zehner ꝛc.

Mithin gilt jede 1 um eine Stelle weiter links immer zehnmal so viel, als die 1, welche ihr zur Rechten steht.

So thue man noch mit einigen andern Ziffern.

Aus dem Bisherigen wird erkannt, daß jede Ziffer einen Werth an sich (einen absoluten Werth) und einen Stellenwerth hat.

Die Ziffer 5 bedeutet für sich allein stehend 5 Einer oder 5×1; in der zweiten Stelle (50) bedeutet sie 5 Zehner oder 50×1; in der dritten Stelle (500) gilt sie 5 Hunderter oder 50 Zehner oder 500×1 u. s. f.

Anm. Jetzt ist es an der Zeit, mit den Schülern ausführlich über den Unterschied zwischen Zahl und Ziffer zu sprechen. Die Ziffer ist das Zeichen für die Zahl, wie der Buchstabe das Zeichen ist für den Laut. Ziffer heißt so viel als Zahlzeichen. Die Zahl Acht besteht aus 8×1, die Ziffer 8 aus einer zweimal kreisartig gebogenen Linie. Wie man ein Wort mit größeren oder kleineren Buchstaben schreiben kann, ohne daß es dadurch ein anderes wird; so kann auch eine Zahl mit größeren oder kleineren Ziffern geschrieben werden, ohne daß sie sich verändert. Die Zahl Acht wird nicht weniger, wenn man sie mit einer kleinern Ziffer schreibt, und nicht mehr, wenn man sie durch eine größere bezeichnet. Sie besteht immer aus 8×1. Das gesprochene Wort „Fuß" besteht aus drei Lauten und eben darum das geschriebene aus drei Buchstaben. Für jeden Laut steht ein Buchstabe. Die drei Laute oder Buchstaben, miteinander verbunden, bilden ein Wort. Fast eben so verhält sich's mit den Zahlen, z. B. mit der Zahl Zweihundert vierunddreißig. Sie besteht aus dreierlei Einheiten: aus Hundertern, Zehnern und Einern. Um sie zu schreiben, bedürfen wir daher auch drei Ziffern: die Ziffer 2 für die 2 H., die Ziffer 3 für die 3 Z. und die Ziffer 4 für die 4 E. Die 2 H., 3 Z. und 4 E. bilden, vereinigt, nur eine Zahl, und eben so bezeichnen auch die drei aneinander gereihten Ziffern 234 nur eine Zahl, die Zahl „Zweihundertvierunddreißig". Da ihre Bezeichnung aus drei Ziffern besteht und drei Stellen einnimmt, so heißt sie eine dreizifferige oder dreistellige Zahl.

Nun diktire man verschiedene Zahlen und lasse sie von einzelnen Schülern an die Wandtafel senkrecht unter einanderschreiben, so lange, bis Alle sicher darin sind. Z. B.

	M.	Ht.	Zt.	T.	H.	Z.	E.
	VII.	VI.	V.	IV.	III.	II.	I.
4hundert und fünfzig = 4 H., 5 Z. 0 E.					4	5	0
3tausend 5hundert 79 = 3 T., 5 H., ꝛc. . . .				3	5	7	9
25tausend 478			2	5	4	7	8
138tausend 594		1	3	8	5	9	4
3 Millionen 543tausend 765	3	5	4	3	7	6	5

ꝛc.

Zuletzt schreibe man selbst Zahlen an die Wandtafel und lasse sie lesen, z. B.

4567 = 4 Tausender, 5 Hunderter, 6 Zehner und 7 Einer;
= 4 × 1 tausend, 5 × 1 hundert, 6 × 10 und 7 × 1;
= 4 tausend 5 hundert siebenundsechzig.

73,048 = 7 Zehntausender, 3 Tausender, 0 Hunderter ꝛc.
= 7 × 10 oder 70 taus. + 3 taus., zus. 73 taus. und 48.

542,733 = 5 Hunderttausender, 4 Zehnt., 2 Tausender ꝛc.
= 5 × 100 oder 500 tausend + 4 × 10 oder 40 tausend + 2 tausend = 542 tausend 763.

3,875,216 = 3 Millionen, 8 Hunderttaus., 7 Zehnt., 5 Taus. ꝛc.
= (3 × 1 Million oder) 3 Millionen, 875 tausend 216.

Auch das Zahlenlesen muß so lange fortgesetzt werden, bis die erforderliche Fertigkeit darin erreicht ist. Zur Erleichterung mag man sich, wie hier oben, einige Zeit lang des Komma bedienen.

Anm. Jede Zahl kann eigentlich auf so vielfache Weise ausgesprochen oder gelesen werden, als sie Stellen enthält. Z. B.

37584 = 3 Zehnt., 7 T., 5 H., 8 Z. und 4 E.
= 37 Tausender, 5 H., 8 Z. und 4 E.
= 375 Hunderter, 8 Z. und 4 E.
= 3758 Zehner und 4 Einer.
= 37584 Einer oder 37584.

Die römischen Ziffern.

Die Form und Bedeutung der gewöhnlichen römischen Zahlzeichen oder Ziffern ist folgende:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Einen Stellenwerth haben diese Ziffern nicht; sondern so oft die Ziffer I neben einander steht, so oft bedeutet sie Eins; so oft die Ziffer X neben einander steht, so oft bedeutet sie Zehn u. s. w.

II = 1 + 1 oder 2. CC = 100 + 100 oder 200.
III = 1 + 1 + 1 oder 3. CCC = 3 × 100 oder 300.
XX = 10 + 10 oder 20 MM = 1000 + 1000 od. 2000.
XXX = 3 × 10 oder 30. MMM = 3 × 1000 od. 3000.

Steht eine geringere Ziffer vor einer größeren, so wird sie davon abgezogen.

IV = 5 — 1 oder 4. XC = 100 — 10 oder 90.
IX = 10 — 1 oder 9. VD = 500 — 5 oder 495.
VL = 50 — 5 oder 45. CM = 1000 — 100 oder 900.

Steht aber die geringere Ziffer nach der größeren, so wird sie dazu gezählt.

VI = 5 + 1 oder 6.		CX = 100 + 10 oder 110.	
XI = 10 + 1 „ 11.		DV = 500 + 5 „ 505.	
LV = 50 + 5 „ 55.		MC = 1000 + 100 „ 1100.	

Einige Beispiele zur Uebung:

VI = 6.	XXXI = 31.
IV = 4.	XXIX = 29.
VIIII = 9.	XXXVIII = 38.
IX = 9.	LXXXVIIII = 89.
XV = 15.	CXXV = 125.
XVI = 16.	CCCXXXVII = 337.
XIV = 14.	DLXVIII = 568.
XXIV = 24.	DCCCXIIII = 814.

MDCCCLXI = 1861.

Die Grundrechnungsarten.

Vorbemerkung.

Betrachten wir irgend eine Rechenaufgabe, wie das Leben sie uns bietet, so ergibt sich, daß in allen Fällen eine Zahl zu suchen ist, die entweder mehr, oder weniger beträgt, als eine gewisse gegebene Zahl. Diese ist daher, um die zu suchende Zahl zu erhalten, in entsprechender Weise zu vermehren, oder zu vermindern. Das Vermehren, sowie das Vermindern einer Zahl kann aber auf zweierlei Weise geschehen.

Man kann eine Zahl um verschiedene andere Zahlen, oder wiederholt um sich selbst vermehren.

a. $7 + 5 = 12$; $5 + 4 + 3 = 12$. (Zusammenzählen.)
b. $4 + 4 + 4 = 12$; $3 \times 4 = 12$. (Vervielfachen.)

Man kann eine Zahl um verschiedene, oder immer nur um gleiche Theile von ihr vermindern.

a. $12 - 5 = 7$; $12 - 5 - 4 = 3$. (Abziehen.)
b. $12 - 4 - 4 = 4$; $12 = 3 \times 4$. (Theilen.)

(Da $12 = 3 \times 4$, so ist 4 in 12 3 mal enthalten, und $^1/_3$ von $12 = 4$.)

So entwickeln sich diejenigen Hauptoperationen, welche allem Rechnen zu Grunde liegen und deßhalb die 4 Grundrechnungsarten oder Species heißen, nämlich das Zusammenzählen oder Addiren und die davon abgeleitete kürzere Weise: das Vervielfachen oder Multipliciren, das Abziehen oder Subtrahiren und die davon abgeleitete kürzere Weise: das Theilen oder Dividiren.

Nach dem Grade ihrer Schwierigkeit und nach altherkömmlicher Weise werden sie in folgender Ordnung behandelt: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren.

Bei jeder Grundrechnungsart findet sowohl ein besonderes Kopf- als Zifferrechnen statt. Ueber das Verhältniß des Einen zum Andern haben wir uns bereits (S. 83.) ausgesprochen. Nur über das Verfahren sei hier im Allgemeinen noch Folgendes bemerkt.

Die Veranschaulichung tritt nur im Nothfalle ein.

Beim Kopfrechnen werden die schwierigen Aufgaben anfangs an die Wandtafel notirt und erst dann, wenn es so geht, frei im Kopfe gerechnet.

Beim Zifferrechnen ist es nothwendig, einzelne Schüler und zwar nicht nur von den mehr-, sondern auch von den minderbegabten, so lange an der Wandtafel laut vorrechnen zu lassen, bis man überzeugt sein darf, daß jeder derselben die Sache verstehe und selbstständig darin arbeiten könne. Dieß ist das beste, ja das einzige Mittel, das leidige Voneinander-Absehen aus der Schule entfernt zu halten, und eben darum von großer Wichtigkeit. Denn die Gewohnheit des Absehens ist ein arger Krebsschaden und hauptsächlich da zu Hause, wo der Lehrer, sobald nur einige der bessern Schüler seiner Forderung entsprechen, die weitere Uebung den Schülern allein überläßt, oder mit ihnen zu einer höhern Stufe übergeht. Sowohl jetzt als später, wenn dieselbe Operation beim Rechnen mit der benannten und angewandten Zahl sich wiederholt, sind es dann immer nur Einzelne, welche das Verlangte wirklich leisten; die Mehrzahl sucht sich durch Abschreiben zu helfen. In der Schule geht's; wie aber im Leben? Der andern ungeheuern Nachtheile, in geistiger und sittlicher Hinsicht, gar nicht zu gedenken.

Addiren.

A. Mündlich.

I. Zahlen mit einer geltenden Stelle.

a. Ohne Uebergang in höhere Ordnungen.

Mit 3 + 2.

3 Einer + 2 Einer =? 3 E. + 2 E. = 5 E.; 3 + 2 = 5.

3 Zehner + 2 Z. =? 3 Z. + 2 Z. = 5 Z. oder 50 E.; 30 + 20 = 50.

3 Hunderter + 2 H.? 3 H. + 2 H. = 5 H. oder 500 E.; 300 + 200 = 500.

3 Taus. + 2 T. =? 3 T. + 2 T. = 5 T. oder 5000 E.; 3000 + 2000 = 5000.

3 Zehntausender + 2 Z. T. =? 3 Z. T. + 2 Z. T. = 5 Z. T. oder 50,000 E.; 30,000 + 20,000 = 50,000.

3 Hunderttaus. + 2 H.T. =? 3 H.T. + 2 H.T. = 5 H.T. oder 500,000 E.; 300,000 + 200,000 = 500,000.

3 Mill. + 2 Mill. =? 3 Mill. + 2 Mill. = 5 Millionen.

Eben so mit 2 + 4   3 + 5
4 + 3   5 + 4

Jetzt spricht, nachdem das zu addirende Zahlenpaar genannt ist, der Schüler allein. Auch das Sprechen im Chor ist hier am Platze. Der Lehrer nennt z. B. die Zahlen 2+4, und die Schüler fahren fort:

2 E. + 4 E. = 6 Einer; 2 + 4 = 6.

2 Z. + 4 E. = 6 Zehner oder 60 E.; 20 + 40 = 60 ꝛc.

Das Sprechen, nämlich das Sprechen im Zusammenhange von Seite der Schüler muß immer mehr vorherrschen. Andererseits sehe man aber auch darauf, daß es nicht in eine Vielwortmacherei ausarte. Alles, was gesprochen wird, muß in Bezug auf die Sache erschöpfend, in Bezug auf die Darstellung wohlgeordnet, möglichst kurz und präcis sein. Wo fünf Worte oder Wörter ausreichen, sollen nicht acht gebraucht werden.

b. Mit Uebergang in höhere Ordnungen.

Mit 8 + 5.

8 E. + 5 E. = 13 E. = 1 Z. + 3 E. oder 13 E.; 8 + 5 = 13.
8 Z. + 5 Z. = 13 Z. = 1 H. + 3 Z. od 130 E.; 80 + 50 = 130.
8 H. + 5 H. = 13 H. = 1 T. + 3 H. od. 1300 E; 800 + 500 = 1300.
8 T. + 6 T. = 13 T. = 1 Z.T. + 3 T. od. 13000 E.; 8000 + 5000 = 13000. Und so weiter.

Eben so mit

5 + 6   8 + 7   8 + 7 + 6
6 + 8   9 + 8   9 + 8 + 7.

Besonders zu üben, weil sehr häufig vorkommend, sind die Aufgaben mit Uebergang vom ersten Hunderter in den zweiten. Wir lassen daher noch mehr dergleichen folgen.

90 + 80	80 + 30	70 + 60	60 + 80	50 + 60
90 + 50	80 + 70	70 + 90	60 + 50	40 + 90
90 + 70	80 + 40	70 + 50	60 + 70	30 + 80
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Zuerst ausführlich:

9 Z. + 8 Z. = 17 Z. = 1 H. + 7 Z. oder 170 E.; 90 + 80 = 170.

Oder:

90 + 80 = 90 + 10 + 70 oder 170; 90 + 80 = 170.

Dann kurz: 90 + 80 = 170.

II. Zahlen mit mehr als einer geltenden Stelle.

90 + 75 = ?

a. 90 + 75 = 90 + 70 + 5; 90 + 70 = 160, 160 + 5 = 165; also ist 90 + 75 = 165. — Oder: 90 + 75 = 90 + 10 + 65 = 165.

b. 90 = 9 Z.; 75 = 7 Z. + 5 E.; 9 Z. + 7 Z. 5 E. = 16 Z. + 5 E. = 1 H. + 6 Z. + 5 E. oder 165 E.; also ist 90 + 75 = 165.

75 + 48 = ?

a. 75 = 70 + 5; 48 = 40 + 8; 70 + 40 = 110; 5 + 8 = 13; 110 + 13 = 123.

b. 75 = 7 Z. + 5 E.; 48 = 4 Z. + 8 E.; 7 Z. + 4 Z. = 11 Z.; 5 E. + 8 E. = 13 E. oder 1 Z. + 3 E.; 11 Z. + 1 Z. 3 E. = 12 Z. + 3 E. oder 123 E.; also ist 75 + 48 = 123.

364 + 87 = ?

a. 360 + 80 = 440; 4 + 7 = 11; 440 + 11 = 451; 364 + 87 = 451.

a. 364 = 3 H. 6 Z. und 4 E.; 87 = 8 Z. + 7 E.
3 H. 6 Z. + 8 Z. = 3 G. + 14 Z. oder 4 H. + 4 Z.
4 E. + 7 E. = 11 E. oder 1 Z. + 1 E.
4 H. 4 Z. + 1 Z. 1 E. = 4 H. 5 Z. und 1 E. oder 451 E.
Also ist 364 + 87 = 451.

350 + 470 = ?

a 300 + 400 = 700; 50 + 70 = 120; 700 + 120 = 820.

b. 350 = 3 H. + 5 Z.; 470 = 4 Z + 7 Z.; 3 H. + 4 H. = 7 H.; 5 Z. + 7 Z. = 12 Z. oder 1 H. + 2 Z.; 7 H. + 1 H. 2 Z. = 8 H. + 2 Z. oder 820 E.; also ist 350 + 470 = 820.

476 + 358 = ? (An die Wandtafel notirt.)

a. 476 = 400 + 70 + 6; 358 = 300 + 50 + 8.
400 + 300 = 700.
70 + 50 = 120; 700 + 120 = 820.
6 + 8 = 14; 820 + 14 = 834.
Oder: 476 = 470 + 6; 358 = 350 + 8.
470 + 350 = 820.
6 + 8 = 14; 820 + 14 = 834.

b. 476 = 4 H. + 7 Z. + 6 E.; 358 = 3 H. + 5 Z. + 8 E.
4 H. + 3 H. = 7 H.
7 Z. + 5 Z. = 12 Z. oder 1 H. + 2 Z.; 7 H. + 1 H. 2 Z. = 8 H. + 2 Z.

6 E. + 8 E. = 14 E. oder 1 Z. 4 E.; 8 H. 2 Z. + 1 Z. 4 E. = 8 H. 3 Z. und 4 E. oder 834 E.

Also ist 476 + 358 = 834.

Die Ausrechnungsweise unter b ist die weitläufigere. Sie fördert aber ganz vorzüglich die Aufmerksamkeit und das Sprechvermögen der Schüler und bereitet besonders auch auf das Zifferrechnen vor.

Stoff zur besondern Uebung im mündlichen Addiren findet sich in dem „Kopf- oder Denkrechnen" des Verfassers, (herausgegeben bei Fr. Seybold in Ansbach) S. 5.

B. Schriftlich.

I. Ohne Uebergang in höhere Ordnungen.

Beispiel 1. 30 + 20 + 40 =?

Um die Zahlen leichter überblicken und zusammenzählen zu können, so setzen wir sie in gerader Linie untereinander. Dann machen wir einen kleinen wagrechten Strich.

```
 30
 20
 40
---
 90
```

30 = 3 Z., 20 = 2 Z., 40 = 4 Z.; 4 Z. + 2 Z. = 6 Z., 6 Z. + 3 Z. = 9 Z. oder 90 Einer; 40 + 20 + 30 = 90.

Wir haben nun die Zahlen zusammengezählt. Wir haben sie addirt. Denn zusammenzählen heißt addiren, und addiren heißt zusammenzählen. Wir haben also addirt oder zusammengezählt. — Die Zahlen, welche man addirt oder zusammenzählt, nennt man Posten. Aus wie viel Posten besteht unsere Rechnung? Wie heißt der erste Posten, von oben nach unten gezählt? Wie der zweite? xc. Wie viel machen die 3 Posten zusammen? (90.) Das ist die Summe. Was ist mehr: 30 + 20 + 40, oder 90? Die Summe ist nur eine Zahl, und diese eine Zahl ist genau so groß, als die addirten Zahlen miteinander. Durch das Addiren oder Zusammenzählen wird also eine Zahl gefunden, die allein so viel beträgt, als zwei oder mehrere Zahlen zusammengenommen.

Beispiel 2. 21 + 34 + 43 =?

Ausrechnung.

21	21 = 2 Z. 1 E.
34	34 = 3 Z. 4 E.
43	43 = 4 Z. 3 E.
98	Zuerst addiren wir die E., dann die Z.

3 E. + 4 E. = 7 E., 7 E. + 1 E. = 8 E.; diese 8 E. schreiben wir unter die Einer, in die erste Stelle.

4 Z. + 3 Z. = 7 Z., 7 Z. + 2 Z. = 9 Z.; die **9** Z. schreiben wir unter die Zehner, in die zweite Stelle.

9 Z. 8 E. = 98 E.; 21 + 34 + 43 = 98.

Damit der Schüler die innere Ueberzeugung gewinne, daß die Partialsummen zusammen genommen wirklich die Summe aller einzelnen Posten seien; so gebe man nach der Ausrechnung öfter Fragen folgender Art: Wie viel ist 40 + 30 + 20? (90) Wie viel ist 3 + 4 + 1? (8) Wie viel ist also 43 + 34 + 21? (90 + 8 oder 98.)

Aufg. zum Zifferrechnen II. Heftchen, 1. Uebung.

II. Mit Uebergang in höhere Ordnungen.

Beispiel 1. 46 + 8 + 9 = ?

Ausrechnung.

46
8
9
———
63

46 + 8 + 9 = 4 Z. + 6 E. + 8 E. + 9 E.; 9 E. + 8 E. = 17 E., 17 E. + 6 E. = 23 E. oder 2 Z. 3 E. Die 3 Einer schreiben wir unter die Einer, in die erste Stelle; die 2 Z. aber zählen wir zu den 4 Zehnern. 2 Z. + 4 Z. = 6 Z. Also ist 40 + 6 + 8 + 9 oder 46 + 8 + 9 = 6 Z. 3 E. oder 63 E.

Beispiel 2. 327 + 468 + 579 = ?

Ausrechnung.

327
468
579
———
1374

9 E. + 8 E. = 17 E., 17 E. + 7 E. = 24 E.; 24 E. = 2 Zehner + 4 Einer. Die 4 Einer schreibe ich unter die Einer; die 2 Zehner zähle ich hinüber zu den Zehnern.

2 Z. + 7 Z. = 9 Z., 9 Z. + 6 Z. = 15 Z., 15 Z. + 2 Z. = 17 Zehner; 17 Zehner = 1 Hunderter + 7 Zehner. Die 7 Zehner schreibe ich unter die Zehner; den Hunderter zähle ich zu den Hundertern in der dritten Reihe.

1 H. + 5 H. = 6 H., 6 H. + 4 H. = 10 H., 10 H. + 3 H. = 13 H.; 13 Hunderter = 1 Tausender + 3 Hunderter. Die 3 Hunderter schreibe ich unter die Hunderter, in die dritte Stelle; den Tausender aber setze ich um eine Stelle weiter vor, so daß er in die 4te kommt.

1 T. 3 H. 7 Z. 4 E. = 1374 E.; 327 + 468 + 579 = 1374.

Aufg. zum Zifferr. 2. Uebung.

Wenn der Schüler über die Operation klar und geläufig sich aussprechen kann, dann wird zum Schnellrechnen übergegangen, wobei die Benennungen, welche den Stellenwerth der Ziffern bezeichnen, als: Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. weggelassen werden.

Anm. Man könnte fragen: Warum denn nicht sogleich das Verfahren, das beim Schnellrechnen eingehalten wird? Warum zuerst so ausführlich und umständlich? Die Antwort ist: Weil der Schüler beim Rechenunterrichte alles, was er thut, verstehen und überall den Grund des Verfahrens erkennen soll; weil nur das klare Verständniß der einzelnen Operationen Einsicht in ihren Zusammenhang gibt, vor auffallenden Irrungen schützt und die Anwendung erleichtert; weil gerade in der einsichtlichen Behandlung dieses Lehrgegenstandes das Bildende desselben liegt, und weil der Schüler nur unter diesen Umständen Interesse an der Sache gewinnt.

III. Mit angewandten Zahlen.

A. Mündlich.

1) In einer Schule sind 64 Knaben und 58 Mädchen; wie viel Kinder zählt diese Schule? 2) Karl sammelt sich einmal 136 Haselnüsse und ein andermal 150; wie viel Haselnüsse hat er nun? 3) Eine Frau hat 2 Stück Leinwand; das eine Stück hält 75 Ellen, das andere 84; wie viel Leinwand hat sie im Ganzen? 4) Der Sohn ist 24 Jahre alt; der Vater ist um 38 Jahre älter; wie alt ist der Vater? 5) Von 2 Kistchen wiegt das eine 56 Pfd. und das andere 67 Pfd.; wie viel Gewicht haben sie zusammen? 6) Ein Mann kauft ein Pferd um 180 fl. und verkauft es wieder um 45 fl. theurer; wie viel löst er dafür? 7) Eine Hausfrau gab in einem Jahr 850 fl. aus und im andern 760 fl.; wie viel betrug ihre Ausgabe in den 2 Jahren? 8) Jemand besitzt ein Haus, das 4800 fl. werth ist, und 1500 fl baares Geld; wie groß ist sein Vermögen?

B. Schriftlich.

Aufg. Die Ausgaben einer Gemeinde betragen für die Erbauung eines neuen Schulhauses 10764 fl., für Herstellung einer Brücke 475 fl., für Anschaffung einer Feuerlöschmaschine 1236 fl. und für verschiedene andere Bedürfnisse 850 fl.; wie viel im Ganzen?

Aufl. Die ganze Ausgabe der Gemeinde beträgt 10764 fl. + 475 fl. + 1236 fl. + 850 fl. Diese 4 Zahlen sind also zusammenzuzählen.

Ausrechnung:

10764	fl.
475	„
1236	„
850	„
13325	fl.

Aufg. z. Zifferr. 3. Uebung.

Subtrahiren.

I. Ohne Borgen.

A. Mündlich.

1. Zahlen mit einer geltenden Stelle.

Mit 5 — 2.

5 E. — 2 E. = 3 E.; 5 — 2 = 3.
5 Z. — 2 Z. = 3 Z. oder 30 E.; 50 — 20 = 30.
5 H. — 2 H. = 3 H. oder 300 E.; 500 — 200 = 300.
5 T. — 2 T. = 3 T. oder 3000 E.; 5000 — 2000 = 3000.
5 Zt. — 2 Zt. = 3 Zt. oder 30,000 E.; 50,000 — 20,000 = 30,000 ꝛc.

Ebenso mit 6 — 4, 7 — 3, 8 — 5, 9 — 7.

2. Zahlen mit mehr als einer geltenden Stelle.

Wir behandeln sogleich eine Aufgabe mit dreistelligen Zahlen. Das Verfahren bei den übrigen hieher gehörigen Fällen ist daraus leicht zu ersehen.

869 — 523 = ?

(Die Aufgabe wird an die Wandtafel notirt.)

a. 869 — 523 = 869 — (500 + 20 + 3).
869 — 500 = 369;
369 — 20 = 349;
349 — 3 = 346.
Also ist 869 — 523 = 346.

b. 869 — 523 = (8 H. — 5 H.) + (6 Z. — 2 Z.) + (9 E. — 3 E.)
8 H. — 5 H. = 3 H.;
6 Z. — 2 Z. = 4 Z.; zusammen 3 H. + 4 Z.
9 E. — 3 E. = 6 E.; also bleiben 3 H. 4 Z. u. 6 E. od. 346 E.

Aufgaben.

147 — 5	148 — 30	256 — 34	764 — 500
259 — 8	575 — 50	469 — 25	607 — 300
728 — 3	893 — 60	677 — 47	923 — 400
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

809 — 406	860 — 540	765 — 350	654 — 241
708 — 607	690 — 370	583 — 420	879 — 527
906 — 301	780 — 230	872 — 540	795 — 651
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

B. Schriftlich.

Beispiel: 785 — 542 = ?

Man schreibt die Zahlen wie beim Addiren unter einander, doch so, daß die kleinere Zahl unter die größere zu stehen kommt.

785
542
243

785 — 542 = (700 — 500) + (80 — 40) + (5 — 2); 2 E. v. 5 E. bleiben 3 E.; 4 Z. von 8 Z. bleiben 4 Z.; 5 H. von 7 H. bleiben 2 H. Es bleiben also 2 H. 4 Z. u. 3 E. oder 243 E.; 785 — 542 = 243.

Dann: 2 von 5 bleibt 3; 4 v. 8 bleibt 4; 5 v. 7 bleibt 2.

Abziehen heißt subtrahiren und subtrahiren heißt abziehen. Wir haben also zwei Zahlen von einander abgezogen oder subtrahirt. 785 ist die volle Zahl und wird daher die Vollzahl (Minuend) genannt. 542 heißt hier, weil sie abgezogen wird, der Abzug oder die Abzugszahl (der Subtrahend). Die Zahl 243 nennt man, weil sie übrig bleibt, den Rest. Da dieselbe zugleich anzeigt, um wie viel sich 785 und 542 von einander unterscheiden; so wird sie auch der Unterschied (die Differenz) genannt.

Aufgaben zum Zifferrechnen, 4. Uebung.

II. Mit Borgen.

A. Mündlich.

1 Z. — 3 E. = 10 E. — 3 E. = 7 E.; 10 — 3 = 7.
1 H. — 4 Z. = 10 Z. — 4 Z. = 6 Z.; 100 — 40 = 60.
1 T. — 5 H. = 10 H. — 5 H. = 5 H.; 1000 — 500 = 500.
1 Zt. — 6 T. = 10 T. — 6 T. = 4 T.; 10,000 — 6000 = 4000.
u. s. w.

250 — 7 = ?

a. 250 = 240 + 10; 240 + 10 — 7 = 240 + 3 oder 243.
b. 250 = 2 H. + 5 Z. Um davon die 7 E. abziehen zu können, so verwandle ich 1 Z. in E.; 2 H. + 5 Z. = 2 H. + 4 Z. + 10 E.; hievon 7 E. weg, so bleiben 2 H. + 4 Z. + 3 E. oder 243 E.

Also ist 250 — 7 = 243.

500 — 30 = ?

a. 500 = 400 + 100; 400 + 100 — 30 = 470; 500 — 30 = 470.
b. 500 = 5 H.; 30 = 3 Z. Um die 3 Z. wegnehmen zu können, so verwandle ich 1 H. in Z.; 5 H. = 4 H. + 10 Z.; 4 H. + 10 Z. — 3 Z. = 4 H. + 7 Z. oder 470 E.

Aufg.	130 — 4	540 — 5	200 — 40	400 — 50
	380 — 9	870 — 8	700 — 70	300 — 80

300 — 6.

a. 300 = 200 + 100; 200 + 100 — 6 = 200 + 94 od. 294.
b. Um die 6 E. von den 3 H. wegnehmen zu können, so verwandle ich 1 H. in Z., und 1 Z. davon in Einer. 3 H. = 2 H. + 10 Z. = 2 H. + 9 Z. + 10 E. Hievon 6 E. weg, so bleiben 2 H. + 9 Z. + 4 E. oder 294 E.; 300 — 6 = 294.

600 — 54 = ?

a. 600 — 54 = 600 — (50 + 4); 600 — 50 = 550, 550 — 4 = 546; also ist 600 — 54 = 546.

b. 600 = 6 H.; 54 = 5 Z. + 4 E.; 6 H. = 5 H. + 10 Z. = 5 H. 9 Z. + 10 E; 5 Z. von 9 Z. bleiben 4 Z., und 4 E. von 10 E. bleiben 6 E.; also bleiben im Ganzen 5 H. + 4 Z. + 6 E. oder 546 E.

140 — 60 = ?

a. 140 — 60 = 140 — (40 + 20); 140 — 40 = 100, und 100 — 20 = 80.

b. 140 = 1 H. + 4 Z.; 60 = 6 Z.; die 6 Z. von den 4 Z. wegzunehmen, geht nicht; ich verwandle daher den H. auch in Z.; 1 H. + 4 Z. = 14 Z.; 14 Z. — 6 Z. = 8 Z. od. 80 E.; 140 — 60 = 80.

450 — 70 = ?

a. 450 — 70 = 450 — (50 + 20); 450 — 50 = 400, und 400 — 20 = 380.

b. 450 = 4 H. + 5 Z.; 70 = 7 Z.; 7 Z. von 5 Z. geht nicht; ich verwandle daher 1 H. in Z.; 4 H. + 5 Z. = 3 H. + 15 Z.; 3 H. + 15 Z. — 7 Z. = 3 H. + 8 Z. oder 380 E.

742 — 68 = ?

742 — 68 = 742 — 60 — 8; 742 — 60 = 682, 682 — 8 = 674.

Aufg. z. Kopf- oder Denkrechnen, S. 6.

B. Schriftlich.

Beispiel: 83 — 38 = ?

Ausrechnung.

13 8.3 38 45	=	8.3 38 45	=	70 + 13 30 + 8 40 + 5

83 = 8 Z. + 3 E.; 38 = 3 Z. + 8 E.; 8 E. von 3 E. abzuziehen, geht nicht. Ich borge daher bei den 8 Z. einen Z. und zeige dieß durch einen Punkt hinter der 8 an. Der geborgte Zehner = 10 Einer. 3 E. waren schon vorhanden, 10 E. habe ich dazu entlehnt; also habe ich nun 13 Einer. Anstatt 8 Z. + 3 E. haben wir jetzt 7 Z. + 13 E., was eben so viel ist. Nun ziehe ich 3 Z. 8 E. von 7 Z. 13 E. ab. 8 E. von 13 E. bleiben 5 E., und 3 Z. von 7 Z. bleiben 4 Z. Es bleiben also 4 Z. + 5 E. oder 45 E.; 83 — 38 = 45.

Probe. Man zählt den Rest mit dem Abzug zusammen. Ist richtig abgezogen, so kommt wieder die Vollzahl.

83	Vollzahl
38	Abzug
45	Rest
83	Vollzahl.

Beispiel 2. 753 — 468 = ?

Ausrechnung.

```
 14 13
 7.5.3     abgekürzt:   7.5.3
 4 6 8                  4 6 8
 -----                  -----
 2 8 5                  2 8 5
                        -----
                        7 5 3
```

Von 753 soll 468, d. i. von 7 H. 5 Z. und 3 E. sollen 4 H. 6 Z. und 8 E. abgezogen werden. 8 E. von 3 E. geht nicht. Ich borge mir daher bei den 5 Zehnern 1 Zehn.; 1 Z. + 3 E. = 13 Einer. Anstatt 7 H. + 5 Z. + 3 E. habe ich jetzt 7 H. + 4 Z. + 13 E., was eben so viel ist. 8 E. von 13 E. bleiben 5 E.

6 Z. von 4 Z. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 7 Hundertern 1 Hunderter. 1 H. und 4 Z. = 14 Z. Anstatt 7 H. und 4 Z. haben wir jetzt 6 H. und 14 Z., was gleich viel ist. 6 Z. von 14 Z. bleiben 8 Z.

4 Hunderter von 6 H. bleiben 2 H.

Der Rest beträgt also 2 H. 8 Z. u. 5 E. = 285 E. od. 285.

Wir fassen nun die Ausrechnung, wie sie vor uns steht, nochmal in's Auge.

Die 4 H. hätten wir ohne Weiteres abziehen können; nicht so die 6 Z. und 8 E. Um auch diese abziehen zu können, so haben wir in der Vollzahl 1 Hunderter in Zehner, und 1 Z. in Einer verwandelt. 7 H. + 5 Z. = 6 H. + 15 Z.; 15 Z. + 3 E. = 14 Z. + 13 E. Also sind 7 H. + 5 Z. + 3 E. = 6 H. + 14 Z. + 13 E. Zieht man 4 H. 6 Z. u. 8 E. von 6 H. 14 Z. u. 13 E. ab, so bleiben 2 H. 8 Z. u. 5 E. oder 285 Einer.

Beispiel 3. 8752 — 4984 = ?

Ausrechnung.

```
 16 14 12
 8.7.5.2        8.7.5.2
 4 9 8 4   =    4 9 8 4
 -------        -------
 3 7 6 8        3 7 6 8
```

Beispiel 4. 30 — 7 = ?

Ausrechnung.

```
 10
 3.0         3.0
   7    =      7
 ---         ---
 2 3         2 3
```

Von 30 soll 7 abgezogen werden. 30 = 3 Z. und 0 E.; 7 E. von 0 E. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher bei den 3 Z. einen Zehner. 1 Z. = 10 Einer. Für 3 Zehner stehen jetzt 2 Z. und 10 E. (20 + 10). Nun ist es möglich, die 7 E. abzuziehen. 7 E. von 10 E. bleiben 3 E. Die 2 Z. bleiben übrig, wie sie sind. Also ist 30 oder 20 + 10 weniger 7 = 20 + 3 oder 23.

Beispiel 5. 307 — 243 =?

Ausrechnung.

10		
3.07	=	3.07
243		243
64		64

Beispiel 6. 600 — 432 =?

Ausführung.

9		
10.10		
6.0.0	=	6.0.0
432		432
168		168

2 E. von 0 E. abzuziehen, geht nicht. Einen Zehner kann ich nicht borgen, denn es sind keine da. Ich borge daher bei den 6 Hundertern 1 Hunderter; es bleiben also noch 5 H.; dieß deute ich durch einen Punkt hinter 6 an. Der entlehnte H. hat 10 Zehner. Für 6 H. stehen nun 5 H. + 10 Z. Von diesen 10 Z. nehme ich 1 Z. weg, es bleiben also noch 9 Zehner, und das deute ich durch einen Punkt bei 10 (oder 0) an. Der entlehnte Zehner hat 10 Einer. Anstatt 6 H. habe ich jetzt 5 H. 9 Z. und 10 E., was eben so viel ist. Davon ziehe ich nun 4 H. 3 Z. u. 2 E. ab.

Aufg. z. Zifferr., 5. Uebung.

Am Ende gebe man wieder Additionsaufgaben und lasse von der Summe die einzelnen Posten nacheinander abziehen. Geht es zuletzt auf, so ist dieß die Probe, daß sowohl richtig addirt, als richtig subtrahirt worden ist.

III. Aufgaben mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich.

1) Von 145 Schafen werden 60 verkauft; wie v. bleiben? 2) Ein Garten hat 300 fl gekostet; davon werden 136 fl. gezahlt; wie v. ist noch zu zahlen? 3) Eine Hausfrau gibt von 115 fl. 64 fl. aus; wie v. hat sie noch? 4) In einer Schule sind 120 Kinder; darunter sind 65 Knaben; wie viel sind's Mädchen? 5) Ein Landmann hat 148 Schock (Schober) Getreide geerntet; davon sind 72 Schock bereits ausgedroschen; wie viel ist noch zu dreschen? 6) Ein Vater ist 62 J. alt; sein Sohn ist um 36 J. jünger; wie alt ist derselbe? 7) 2 Kistchen wiegen miteinander 132 Pfd; das eine wiegt 66 Pfd.; wie viel das andere? 8) Ich kaufe ein Pferd um 325 fl. und verkaufe es wieder um 48 fl. billiger; wie viel löse ich dafür? 9) Von 2 Gräben ist der eine 86 Fuß lang, der andere ist 28 Fuß länger; wie lang ist dieser? 10) In einem Dorfe lebten am Anfange des Jahres 806 Personen; im Laufe des Jahres starben 25, und 28 wurden geboren; wie v. Seelen zählte das Dorf am Schlusse des Jahres? 11) Eine Mutter hat

118 Ellen leinenes Tuch vorräthig; dazu kauft sie noch 36 Ellen, verwendet aber dann 50 Ellen zu Hemden; wie viel Ellen hat sie noch? 12) Nürnberg hat 54000 Einwohner; Fürth hat 18000; wie viel Einwohner hat Nürnberg mehr als Fürth?

B. Schriftlich.

Aufg. Es kauft Jemand ein Haus um 7896 fl. und verkauft es wieder um 8500 fl.; wie viel hat er übrig?

Auflösung: Er hat so viel übrig, als 8500 fl. mehr sind denn 7896 fl. Um das zu finden, so muß ich 7896 fl. von 8500 fl. abziehen.

Ausrechnung: 8.5.0.0 fl.
7 8 9 6 fl.
6 0 4 fl.

Aufg. z. Ziffern., 6. Uebung.

Multipliciren.

Multipliciren heißt vervielfachen. Das ist die gewöhnliche Erklärung, die Erklärung dem Wortsinne nach. Die Zahl 4 durch 3 multipliciren, heißt suchen, wie viel das 3fache von 4 beträgt. Um das 3fache von 4 zu erhalten, so müssen wir die 4 dreimal nehmen. Daher heißt multipliciren zweitens: eine gegebene Zahl so oftmal nehmen, als eine andere anzeigt. In unserm Beispiele zeigt die 3 an, daß die 4 dreimal, nämlich 1 mal + 1 mal + 1 mal, also eben so oft genommen werden soll, als man 1 nehmen muß, um 3 zu erhalten. Demgemäß kann man drittens auch sagen: multipliciren heißt, aus dem Multiplikanden eine neue Zahl so entstehen lassen, wie der Multiplikator aus der Eins entsteht. Die erste dieser drei Erklärungen entspricht nur dann der Sache, wenn der Multiplikator eine ganze Zahl ist; denn nur in diesem Falle ist das Produkt ein (reines) Vielfaches von dem Multiplikanden. Die beiden anderen Erklärungen passen für alle Fälle. Unter ihnen ist es aber wieder die letztere, welche die Operation am bestimmtesten bezeichnet.

Beim Addiren und Subtrahiren mit reinen Zahlen hatten wir es nur mit eigentlichen Zahlengrößen und eben deßhalb auch beim Addiren und Subtrahiren benannter Zahlen nur mit benannten Zahlen zu thun. Beim Multipliciren und, wie wir später sehen werden, auch beim Dividiren ist dieß nicht so. Unter den drei Zahlen, die wir bei einer vollendeten Multiplikation vor uns haben, sind nur zwei eigentliche Zahlengrößen; die dritte zeigt an, wie sich beide zu einander verhalten. Zum Beispiel. Die Aufgabe 3 mal 4 = ? verlangt, daß eine Zahl gesucht werde, welche 3 mal so groß ist als 4. 3 × 4 = 12. Die Zahl, welche 3 mal so groß ist, als die

Zahl 4, ist also 12. Schon der Ausdruck ist bezeichnend. Wir sprechen hier von der Zahl 4 und von der Zahl 12; bei 3 heißt es „3 mal". In der Aufgabe sagt uns die 3, wie vielmal so groß als 4 die zu suchende Zahl sein soll, und nach der Ausrechnung sagt sie uns, wie vielmal so groß als 4 die gefundene Zahl ist. Sie zeigt also an, wie sich 12 zu 4 verhält; sie bezeichnet das Verhältniß dieser Zahlen zu einander. Demnach ist hier 3 eine Verhältnißzahl; 4 und 12 dagegen sind die eigentlichen Zahlengrößen. So ist es in allen Fällen. Der Multiplikand und das Produkt sind Zahlengrößen, der Multiplikator ist eine Verhältnißzahl. Daher kommt es auch, daß beim Rechnen mit benannten Zahlen nur der Multiplikand und das Produkt benannte Zahlen sind, der Multiplikator aber eine reine Zahl ist. Anders hat es schon gar keinen Sinn. Es kann z. B. heißen 5 mal 47 kr. = 235 kr. Was ist aber 5 Ellen mal 47? oder 5 Ellen mal 47 kr.? Zwar scheint es, daß beim Rechnen mit der angewandten Zahl, z. B. in der Regeldetri-Aufgabe: 1 Elle zu 47 kr., was kosten 5 Ellen? die Zahl 47 kr. durch die Zahl 5 Ellen zu multipliciren sei. Dem ist jedoch nicht so. Indem ich schließe: „Wenn 1 Elle 47 kr. kostet, so kosten 5 Ellen 5 mal 47 kr.", wird die Zahl 5 Ellen ihrer Benennung (Ellen) entkleidet und in eine reine Zahl verwandelt.

Maßgebend für den Stufengang ist hier die Anzahl der Stellen des Multiplikators, und dieser ist entweder einstellig, oder zweistellig, oder drei- und mehrstellig. Die hierdurch sich ergebenden Hauptübungsstufen zerfallen wieder in verschiedene Uebungen, welche jedoch in ihrer Aufeinanderfolge am besten aus der Darstellung selbst ersehen werden.

I. Der Multiplikator ist einstellig.

A. Mündlich.

1) Der Multiplikand hat nur eine geltende Stelle.

a. Ohne Uebergang.

2 × 2 E. = 4 E.; 2 × 2 = 4.
2 × 2 Z. = 4 Z. oder 40 E.; 2 × 20 = 40.
2 × 2 H. = 4 H. oder 400 E.; 2 × 200 = 400.
2 × 2 T. = 4 T. oder 4000 E.; 2 × 2000 = 4000.
u. s. w.

Eben so mit 2 × 3, 4 × 2, 3 × 3, 2 × 5.

b. Mit Uebergang.

4 × 3	8 × 6	9 × 3	7 × 5	8 × 3	8 × 8	5 + 5
8 × 2	5 × 9	7 × 4	6 × 8	5 × 4	4 × 7	7 × 8
5 × 7	3 × 7	5 × 6	8 × 7	4 × 6	9 × 5	9 × 6
7 × 6	6 × 5	6 × 7	7 × 3	7 × 7	8 × 4	6 × 3
6 × 9	9 × 8	3 × 8	9 × 7	5 × 8	6 × 6	8 × 5
9 × 4	4 × 9	8 × 9	4 × 8	9 × 9	3 × 9	7 × 9

In einzelnen Fällen lasse man sich auch den Nachweis geben. Z. B. 4 × 3 = 12. Nachweis! (4 × 3 = 3 + 3 + 3 + 3; 3 + 3 = 6, + 3 = 9, + 3 = 12; 4 × 3 = 12.)

---

7 × 60 =?
60 = 6 Z.; 7 × 6 Z. = 42 Z. = 4 H. + 2 Z. oder 420 E.; 7 × 60 = 420.

8 × 400 =?
400 = 4 H.; 8 × 4 H. = 32 H. = 3 T. + 2 H. oder 3200 E.; 8 × 400 = 3200.

6 × 9000 =?
9000 = 9 T.; 6 × 9 T. = 54 T. = 5 Zehnt. + 4 T. oder 54000 E.; 6 × 9000 = 54,000.

5 × 70000 =?
70000 = 7 Zehnt.; 5 × 7 Zehnt. = 35 Zehnt. = 3 H. T. + 5 Zehnt. od. 350,000 E.; 5 × 70,000 = 350,000.

3 × 800000 =?
800000 = 8 H. T.; 3 × 8 H. T. = 24 H. T. = 2 Mill. + 4 H. T. oder 2'400,000 E.; 3 × 800,000 = 2'400,000.

Zu diesen Uebungen wird die übenstehende Tabelle benützt. Man darf nur dem Multiplikanden die erforderliche Anzahl von Nullen anhängen. So erhält man

4 × 30	4 × 300	4 × 3000	
8 × 20	8 × 200	8 × 2000	u. s. w.
5 × 70	5 × 700	5 × 7000	
rc.	rc.	rc.	

2. Der Multiplikand hat mehr als eine geltende Stelle.

a. Ohne Uebergang.

2 × 43 =?
a. 2 × 43 = 2 × 40 + 2 × 3; 2 × 40 = 80, 2 × 3 = 6; 80 + 6 = 86; 2 × 43 = 86.
b. 43 = 4 Z. + 3 E.; 2 × 43 = 2 × 4 Z. + 2 × 3 E.; 2 × 3 E. = 6 E., 2 × 4 Z. = 8 Z; zusammen 8 Z. + 6 E. oder 86 E.

3 × 231 =?
a. 3 × 231 = 3 × 200 + 3 × 30 + 3 × 1; 3 × 200 = 600; 3 × 30 = 90, zusammen 690; 3 × 1 = 3; 690 + 3 = 693.
b. 231 = 2 H. + 3 Z. + 1 E.; 3 × 1 E. = 3 E., 3 × 3 Z. = 9 Z., 3 × 2 H. = 6 H., zusammen 6 H. 9 Z. 3 E. oder 693 E.; 3 × 231 = 693.

b. Mit Uebergang.

4 × 68 =?

a. 4 × 68 = 4 × 60 + 4 × 8; 4 × 60 = 240, 4 × 8 = 32; 240 + 32 = 272; also ist 4 × 68 = 272.

b. 68 = 6 Z. + 8 E.; 4 × 8 E. = 32 E. oder 3 Z. 2 E.; 4 × 6 Z. = 24 Z.; 24 Z. + 3 Z. 2 E. = 27 Z. 2 E. = 2 H. 7 Z. 2 E. oder 272 E.; 4 × 68 = 272.

6 × 473 =?

a. 6 × 400 = 2400; 6 × 70 = 420; 2400 + 420 = 2820; 6 × 3 = 18; 2820 + 18 = 2838.

b. 473 = 4 H. + 7 Z. + 3 E.
6 × 3 E. = 18 E. oder 1 Z. 8 E.
6 × 7 Z. = 42 Z.; 42 Z. + 1 Z. 8 E. = 43 Z. 8 E. oder 4 H. 3 Z. 8 E.
6 × 4 H. = 24 H.; 24 H. + 4 H. 3 Z. 8 E. = 28 H. 3 Z. 8 E. = 2 T. 8 H. 3 Z. und 8 E. oder 2838 E.; 6 × 473 = 2838.

Aufg.	5 × 14	5 + 140	2 × 123	6 × 507
	2 × 36	2 × 360	3 × 234	7 × 678
	7 × 25	7 × 250	4 × 345	8 × 709
	9 × 72	9 × 720	5 × 456	9 × 891
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 3 × 32 =?

Ausrechnung:

a.	32	kurz:	b.	32
	32			3
	32			96
	96			

a. 3 × 32 = 32 + 32 + 32; 2 E. + 2 E. + 2 E. oder 3 × 2 E. = 6 E.; 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. oder 3 × 3 Z. = 9 Z.; 9 Z. + 6 E. = 96 E.

b. Ich setze die Zahl 32 nur einmal. Daß sie 3 mal genommen werden soll, zeige ich durch die Ziffer 3 darunter an. Anstatt 2 E. + 2 E. + 2 E. sage ich gleich: 3 × 2 E.; 3 × 2 E. = 6 E. Die 6 E. schreibe ich in die erste Stelle, unter die 3 E. Anstatt 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. spreche ich gleich: 3 × 3 Z.; 3 × 3 Z. = 9 Z.; Die 9 Zehner schreibe ich in die zweite Stelle. Also ist 3 × 32 = 9 Z. + 6 E. oder 96.

Wir haben nun die Zahl 32 dreimal genommen und 96 erhalten. 96 ist daher das 3fache von 32. Wenn man das 2fache, oder das 3fache, oder das 4fache, also überhaupt ein Vielfaches von einer Zahl sucht und es auf die zweite, näm-

lich auf die kürzere Weise thut; so vervielfacht oder multiplicirt man sie. Wir haben somit die Zahl 32 vervielfacht oder multiplicirt und zwar durch 3. Die Zahl 32, welche multiplicirt worden ist, wird Multiplikand genannt, und die Zahl 3, welche anzeigt, wie oft die 32 genommen worden ist, Multiplikator. Die Zahl 96, die sich hieraus ergeben hat, ist das Produkt.

Beispiel 2. 4 × 36 = ?

Ausrechnung.

a.	kurz:	b.
36		36
36		4
36		144
36		
144		

a. 4 × 36 = 36 + 36 + 36 + 36; 6 E. + 6 E. + 6 E. + 6 E. oder 4 × 6 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E. Die 4 E. schreibe ich unter die E.; die 2 Z. behalte ich im Sinne und zähle sie zu den Zehnern. 3 Zehner + 3 Z. + 3 Z. + 3 Z. oder 4 × 3 Z. = 12 Z., und 2 Z. dazu = 14 Z. oder 1 H. + 4 Z. Die 4 Z. setze ich in die zweite Stelle, unter die Zehner; den Hunderter schreibe ich in die dritte Stelle. Also rc.

b. Ich schreibe die Zahl 36 nur einmal und zeige, daß sie 4 mal genommen werden soll, durch die Ziffer 4 darunter an. 4 × 36 = 4 × 3 Z. + 4 × 6 E. Ich rechne zuerst 4 × 6 E., dann 4 × 3 Z.; 4 × 6 E. = 24 E. = 2 Z. + 4 E. Wie beim Addiren schreibe ich auch jetzt nur die 4 E. und behalte die 2 Z. im Sinne. 4 × 3 Z. = 12 Z.; 12 Z. + 2 Z. = 14 Z. = 1 H. + 4 Z.; die 4 Z. in die zweite Stelle, der Hunderter in die dritte.

1 H. 4 Z. und 4 E. = 144 E.; 4 × 36 = 144.

Beispiel 3. 6 × 6583 = ?

Ausrechnung.

 6583
 6
 39498

6 × 6583 = 6 × 3 E. + 6 × 8 Z. + 6 × 5 H. + 6 × 6 T.
6 × 3 E. = 18 E. od. 8 E. (schreibend) und 1 Z. (im Sinne.)
6 × 8 Z. = 48 Z., + 1 Z. = 49 Z. oder 9 Z. (schreibend) und 4 H. (im S.)
6 × 5 H. = 30 H., + 4 H. = 34 H. oder 4 H. (schreibend) und 3 T. (im S.)
6 × 6 T. = 36 T., + 3 T. = 39 T. oder 9 T. (schreibend) und 3 Zehnt. (schr.) 3 Z. T. 9 T. 4 H. 9 Z. und 8 E. = 39498 E.; 6 × 6583 = 39498.

Dann: 6 × 3 = 18; ich schreibe 8 und behalte 1 (im S.);
6 × 8 = 48, + 1 = 49; ich schreibe 9 und behalte 4;
6 × 5 = 30, + 4 = 34; ich schreibe 4 und behalte 3;
6 × 6 = 36, + 3 = 39; ich schreibe 39 aus.

Aufg. z. Zifferr., 7. Uebung.

II. Der Multiplikator ist zweistellig.

A. Mündlich.

1. Der Multiplikator eine reine Zehnerzahl.

10 × 1 E. = 10 E. oder 1 Z.; 10 × 1 = 10.
10 × 1 Z. = 10 Z. oder 1 H.; 10 × 10 = 100.
10 × 1 H. = 10 H. oder 1 T.; 10 × 100 = 1000.
10 × 1 T. = 10 T. oder 1 Z. T.; 10 × 1000 = 10000 ꝛc.

10 × 40 =?
40 = 4 Z.; 10 × 4 Z. = 40 Z od. 4 H.; 10 × 40 = 400.

10 × 300 =?
300 = 3 H.; 10 × 3 H. = 30 H. oder 3 T.; 10 × 300 = 3000.

10 × 24 =?
a. 10 × 24 = 10 × 20 + 10 × 4; 10 × 20 = 200; 10 × 4 = 40; 10 × 24 = 240.
b. 24 = 2 Z. + 4 E.; 10 × 4 E. = 4 Z., und 10 × 2 Z. = 2 H.; 2 H. + 4 Z. = 240 E.; 10 × 24 = 240.

10 × 357 =?
a. 10 × 357 = 10 × 300 + 10 × 50 + 10 × 7; 10 × 300 = 3000, 10 × 50 = 500, u. 10 × 7 = 70; zusammen 3570; 10 × 357 = 3570.
b. 357 = 3 H. 5 Z 7 E.; 10 × 7 E. = 7 Z.; 10 × 5 Z. = 5 H.; 10 × 3 H. = 3 T.; 3 T. + 5 H. + 7 Z. = 3570 E.; 10 × 357 = 3570.

Eine Zahl wird also 10 mal genommen, wenn man ihr eine Null anhängt.

20 × 7 =?
a. 20 × 7 = 10 × 7 + 10 × 7 oder 2 × 10 × 7; 10 × 7 = 70, und 2 × 70 = 140; 20 × 7 = 140.
b. 20 × 7 = 2 × 7 + 2 × 7 + 2 × 7 ꝛc., od. 10 × 2 × 7; 2 × 7 = 14, und 10 × 14 = 140. So ist es am besten.

Eine Zahl wird also 20 mal genommen, wenn man sie 2 mal nimmt und das Zweifache von ihr 10 mal; 30 mal, wenn man sie 3 mal nimmt und das Dreifache wieder 10 mal ꝛc.

30 × 20 =?
a. 30 × 20 = 10 × 3 × 20; 3 × 20 = 60, u. 10 × 60 = 600.
b. 3 × 2 = 6, 3 × 20 = 60, 30 × 20 = 600.

40 × 18 =?
40 × 18 = 10 × 4 × 18; 4 × 18 = 72, u. 10 × 72 = 720.

Aufg.	10 × 70	10 × 400	50 × 7	20 × 20	50 × 12
	10 × 30	10 × 540	90 × 8	40 × 70	40 × 24
	10 × 84	10 × 703	60 × 5	70 × 30	20 × 32
	10 × 48	10 × 987	80 × 9	30 × 90	60 × 45

2. Der Multiplikator eine gemischte Zehnerzahl.

23 × 8 = ?

23 × 8 = 20 × 8 + 3 × 8; 20 × 8 = 160, u. 3 × 8 = 24; 160 + 24 = 184; 23 × 8 = 184.

32 × 40 = ?

a. 32 × 40 = 30 × 40 + 2 × 40; 30 × 40 = 1200, u. 2 × 40 = 80; zusammen 1280; 32 × 40 = 1280.

b. 32 × 4 = 128; 32 × 40 = 10 × 128 = 1280.

18 × 27 = ?

a. 18 × 27 = 10 × 27 + 8 × 27; 10 × 27 = 270; 8 × 27 = 160 + 56 oder 216; 270 + 216 = 486.

b. 18 = 6 × 3; 18 × 27 = 6 × 3 × 27; 3 × 27 = 81; 6 × 81 = 486.

Aufg.	15 × 8	16 × 30	12 × 12	13 × 48
	18 × 6	27 × 40	17 × 23	21 × 36
	24 × 9	35 × 50	25 × 18	44 × 75
	45 × 7	64 × 70	32 × 32	52 × 63

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 10 × 234 = ?

Ausrechnung:

234	besser	234
10		10
2340		2340

10 × 4 Einer = 4 Zehner; 10 × 3 Zehner = Hunderter; 10 × 2 Hunderter = 2 Tausender. Die Ziffern bleiben also dieselben. Nur wird ihr Werth 10mal so groß. Damit aber die Ziffer 4 vier Zehner gelte, so muß sie von der ersten Stelle in die zweite kommen. Damit die 3 drei Hunderter bedeute, muß sie von der zweiten in die dritte Stelle kommen. Und damit die 2 zwei Tausender bezeichne, muß sie von der dritten Stelle in die vierte kommen. Dieß Alles geschieht einfach dadurch, daß man der Zahl zur Rechten eine Null anhängt.

Dergleichen Aufgaben gebe der Lehrer selbst noch mehr. Z. B. Schreibt die Zahl 47 an! Multiplicirt sie auf die kürzeste Weise durch 10!

Beispiel 2. 23 × 456 = ?

Ausrechnung:

456		456
23	23 × 456 = 3 × 456 + 20 × 456.	23
1368	= 3 × 456 . . . . =	1368
9120	= 20 oder 10 × 2 × 456 . =	912
10488	= 23 × 456 . . . . =	10488

Man multiplicirt die Zahl 456 zuerst durch 3; 3 × 456 = 1368. Dieß Ergebniß kommt genau darunter, 8 E. unter 3 E. Nun wird die Zahl 456 durch 20 multiplicirt. Man nimmt sie 2 mal und das 2fache 10 mal. Das 2fache wird 10 mal genommen, indem man ihm eine Null beifügt oder es einfach um eine Stelle weiter gegen die Linke schreibt. 2 × 456 = 912, und 10 × 912 = 9120; 9120 + 1368 = 10488. Also ist 23 × 456 = 10488.

Beispiel 3. 50 mal 53 = ?

Ausrechnung:

53	50 × 53 = 10 × 5 × 53
50	5 × 53 = 265
2650	10 × 5 × 53 = 2650

Man multiplicirt also durch 5 und macht dann das Fünffache, indem man die Null herunter setzt, 10 mal so groß.

Beispiel 4. 34 × 480 = ?

Ausrechnung:

	kürzer:
480	480
34	34
1920	192
1440	144
16320	16320

Erklärung zur kürzeren Weise. 480 = 48 Zehner. Ich rechne blos 34 × 48; 34 × 48 = 1632; 34 × 48 Zehner aber sind 1632 Zehner. Daher muß noch, wie oben hinter 48, so unten hinter 1632 eine Null zu stehen kommen. (Und darum pflegt man zu sagen: Ich setze die Null herunter.)

Beispiel 5. 60 × 7800 = ?

Ausrechnung:

	oder
7800	7800
60	6 . . 0
468000	468000

Erklärung zur zweiten Weise. 7800 = 78 H.; 6 × 78

= 468; 6 × 78 H. = 468 H. oder 46800 Einer. Daher setzt man die 2 Nullen, die hinter 78 stehen, herunter. Die Zahl 7800 ist nun durch 6 multiplicirt. Sie ist aber durch 60 d. i. durch 10 × 6 zu multipliciren. Das Produkt 46800 ist daher noch 10mal zu nehmen. Und dieß geschieht, indem ich auch die hinausgerückte Null herunter setze. Also

6 × 78 = 468
6 × 78**00** = 468**00**
6**0** × 7800 = 46800**0**

Aufg. z. Zifferr., 8. Uebung.

III. Der Multiplikator ist drei= und mehrstellig.

A. Mündlich.

100 = 10 × 10.

100 × 1 E. = 10 × 10 × 1 E.; 10 × 1 E. = 1 Z., und 10 × 1 Z. = 1 H.; 100 × 1 E. = 1 H.

100 × 1 Z. = 10 × 10 × 1 Z; 10 × 1 Z. = 1 H., und 10 × 1 H. = 1 T.; 100 × 1 Z. = 1 T.

100 × 1 H. = 10 × 10 × 1 H.; 10 × 1 H. = 1 T., u. 10 × 1 T. = 1 Zehnt.; 100 × 1 H. = 1 Zehnt. u. s. w.

Eine Zahl wird also 100mal genommen, wenn man sie 10 × 10mal nimmt.

100 × 4 =?

a. 10 × 4 = 40, und 10 × 40 = 400; 100 × 4 = 400.

b. 100 × 1 = 100, 100 × 4 = 4 × 100 = 400.

100 × 30 =?

a. 10 × 30 = 300, u. 10 × 300 = 3000; 100 × 30 = 3000.

b. 100 × 1 = 100; 100 × 30 = 30 × 100 = 30 H. oder 3000.

100 × 45 =?

a. 10 × 45 = 450, u. 10 × 450 = 4500; 100 × 45 = 4500.

b. 100 × 1 = 100; 100 × 45 = 45 × 100 = 4500.

200 × 8 =?

Eine Zahl wird 20mal genommen, wenn man sie 10 × 2mal nimmt. Eine Zahl wird daher 200mal genommen, wenn man sie 100 × 2mal nimmt; 300mal, wenn man sie 100 × 3mal nimmt rc. Wie rechnet man also 200 × 8? Ich rechne 2 × 8 und nehme das Zweifache 100mal oder 10 × 10mal. 2 × 8 = 16, 10 × 16 = 160, und 10 × 160 = 1600. Oder: 200 × 8 = 8 × 200 = 1600.

300 × 40 = ?

300 × 40 = 100 × 3 × 40; 3 × 40 = 120; 10 × 120 = 1200, u. 10 × 1200 = 12000.

600 × 24 = ?

600 × 24 = 100 × 6 × 24; 6 × 24 = 144; 10 × 144 = 1440, u. 10 × 1440 = 14400; 600 × 24 = 14,400.

420 × 6 = ?

420 × 6 = 400 × 6 + 20 × 6; 400 × 6 = 2400; 20 × 6 = 120; 2400 + 120 = 2520; 420 × 6 = 2520.

143 × 4 = ?

143 × 4 = (100 × 4) + (40 × 4) + (3 × 4); 100 × 4 = 400; 40 × 4 = 160; 400 + 160 = 560; 3 × 4 = 12; 560 + 12 = 572; also ꝛc.

Aufg.	100 × 6	100 × 40	100 × 36	100 × 253
	100 × 9	100 × 60	100 × 57	100 × 567
	100 × 7	100 × 80	100 × 75	100 × 789
	400 × 3	700 × 24	230 × 3	152 × 2
	500 × 7	300 × 76	540 × 8	324 × 7
	900 × 6	800 × 48	670 × 5	268 × 9

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 100 mal 456 = ?

Ausrechnung:

```
456        kurz: 45600
  100
-----
45600
```

100 mal 6 Einer = 6 Hunderter; 100 mal 5 Zehner = 5 Tausender; 100 mal 4 Hunderter = 4 Zehntausender. Mithin bleiben die Ziffern dieselben. Aber aus den 6 Einern werden 6 Hunderter; die 6 kommt also von der ersten Stelle in die dritte. Aus den 5 Zehnern werden 5 Tausender; die 5 kommt darum von der zweiten Stelle in die vierte. Aus den 4 Hundertern werden 4 Zehntausender; die 4 kommt deßhalb von der dritten Stelle in die fünfte. Jede der Ziffern rückt demnach um zwei Stellen vor. Und dieß geschieht bei allen zugleich, indem man hinter sie zwei Nullen setzt.

Eine Zahl wird 10 mal so groß, wenn man ihre Ziffern um eine Stelle von der Rechten gegen die Linke rückt oder ihr eine Null anhängt. Sie wird 10 × 10 oder 100mal so groß, wenn man ihre Ziffern um zwei Stellen von der Rechten gegen die Linke rückt oder ihr 2mal eine Null anhängt. Sie wird 10 × 10 × 10 oder 1000mal so groß, wenn man ihre Ziffern um drei Stellen weiter gegen die Linke rückt oder ihr dreimal eine Null beifügt ꝛc.

Beispiel 2. 928 mal 573 =?

Ausrechnung:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 573 & \\
 & 928 & \\
\hline
8 \times 573 = & 4584 & \text{Produkt der Einer.} \\
10 \times 2 \times 573 = & 1146 & \text{Produkt der Zehner.} \\
100 \times 9 \times 573 = & 5157 & \text{Produkt der Hunderter.} \\
\hline
928 \times 573 = & 531744 &
\end{array}
$$

928 mal 573 = $8 \times 573 + 20 \times 573 + 900 \times 573$.

$8 \times 573 = 4584$.

$2 \times 573 = 1146$; 20×573 ist 10mal so viel; daher ist diesem Theilprodukte eine Null anzuhängen, oder es muß um eine Stelle eingerückt werden.

$9 \times 573 = 5157$; 900×573 ist 100mal so viel; daher sind diesem Theilprodukte 2 Nullen anzuhängen, oder es ist, von der ersten Stelle an gezählt, um 2 Stellen einzurücken.

Beispiel 3. 704×7452 =?

Ausrechnung:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 7452 & \\
 & 704 & \\
\hline
4 \times 7452 = & 29808 & \text{Prod. der Einer.} \\
100 \times 7 \times 7452 = & 52164 & \text{Prod. der Hunderter.} \\
\hline
704 \times 7452 = & 5246208 &
\end{array}
$$

Hier ist besonders darauf aufmerksam zu machen, daß die erste Ziffer des jedesmaligen Produktes genau unter diejenige Ziffer des Multiplikators gesetzt werde, mit welcher man gerade jetzt multiplicirt.

Beispiel 4. 700×564 =?

Ausrechnung.

$$
\begin{array}{r}
564 \\
700 \\
\hline
394800
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
7 \times 564 = 3948 \\
100 \times 7 \times 564 = 394800
\end{array}
$$

Beispiel 5. 250×9700 =?

Ausrechnung.

$$
\begin{array}{r}
9700 \\
250 \\
\hline
485000 \\
19400 \\
\hline
2425000
\end{array}
\qquad \text{oder:} \qquad
\begin{array}{r}
9700 \\
25..0 \\
\hline
485 \\
194 \\
\hline
2425000
\end{array}
$$

Erklärung zur zweiten Weise. 9700 = 97 H.; diese sind 250 oder 10 × 25 mal zu nehmen. Man rechnet nun

25 × 97 macht 2425.

25 × 97 H. ist 100 mal so viel, also 100 × 2425. Die Zahl 2425 ist daher 100 mal so groß zu machen. Das geschieht, indem wir die 2 Nullen herunterziehen, die hinter 97 stehen.

Die Zahl 9700 ist aber nicht durch 25, sondern durch 250 d. i. durch 10 × 25 zu multipliciren. Also ist das 25 fache von 9700 noch 10 mal zu nehmen. Und das thun wir, indem wir auch noch die Null herunter setzen, die hinter 25 steht.

Ist eine kleinere Zahl durch eine größere zu multipliciren, so kehrt man es um und multiplicirt die größere Zahl durch die kleinere. 3×4 = 4 × 3. Anschaulich nach Seite 68. Oder: 24 × 36 = 36 × 24; denn 24 × **1** = **1** × 24, also ist 24 × **36** = **36** × 24.

Bei den Zahlen, die am Ende Nullen haben, richtet man sich nach den Ziffern, welche Geltung haben. Die Zahl mit der größeren Anzahl geltender Ziffern wird als Multiplikand gesetzt. Z. B.

a. 4685 × 32 =? b. 4530 × 72000 =?

Steht so:

a.	b.
4685	4530
32	72.000
9370	906
14055	3161
149920	325160000

Aufg. z. Ziffferr., 9. u. 10. Uebung.

IV. Multiplikations-Aufgaben mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich.

1) 1 Ctr. Kaffee kostet 48 fl.; wie viel kosten 4 Ctr.?

Auflösung. Der eine Ctr. kostet 48 fl.; der andere Ctr. kostet wieder 48 fl.; zwei Ctr. kosten also 2×48 fl. Der dritte Ctr. kostet wieder 48 fl.; drei Ctr. kosten also 3 × 48 fl. Der vierte Ctr. kostet ebenfalls 48 fl. Die vier Ctr. kosten also 4×48 fl. Ausrechnung: 4 × 48 fl. = 4 × 40 fl. + 4 × 8 fl.; 4 × 40 fl. = 160 fl.; 4 × 8 fl. = 32 fl.; 160 fl. + 32 fl. = 192 fl. Die 4 Ctr. Kaffee kosten also 192 fl.

2) Wie viel Loth machen 15 ℔?

Auflösung: 1 ℔ = 32 Loth; 2 ℔ = 2 × 32 Loth; 3 ℔ = 3 × 32 Loth; sovielmal 1 ℔, sovielmal 32 Loth; 15 × 1 ℔ machen also 15 × 32 Loth. — Ausrechnung: 15 × 32 Loth = 10 × 32 Loth + 5 × 32 Loth; 10 × 32 Loth = 320 Lth.; 5 × 32 Loth = 160 Loth; 320 Loth + 160 Loth = 480 Loth.

Aufg. z. Kopf- oder Denkrechnen, S. 7, Stufe 1 — 9.

B. Schriftlich.

Aufg. Ein bayr. Scheffel Weizen wiegt 318 ℔; wie viel wiegen 37 Schff.?

Auflösung. Wenn 1 Schff. Weizen 318 ℔ wiegt, so wiegen 2 Schff. 2 × 318 ℔, 3 Schff. 3 × 318 ℔, 4 Schff. 4 × 318 ℔; 37 Schff. wiegen also 37 × 318 ℔. Ich muß daher 318 ℔ mit 37 multipliciren.

Ausrechnung:
```
 318 ℔
  37
------
 2226
 954
------
11766 ℔
```

Also wiegen 37 Schff. Weizen 11,766 ℔.

Aufg. z. Zifferr., 11. Uebung.

Dividiren.

Vorbemerkung.

Dividiren heißt dem Wortsinne nach theilen. Ob aber das Dividiren in allen Fällen auch der Sache nach ein Theilen sei, ist eine Frage, worüber nicht Alle gleicher Ansicht sind. Untersuchen wir es.

Jede Divisionsaufgabe, sie sei eine von uns erfundene oder eine vom Leben gestellte, ist entweder im Sinne des Enthaltenseins, oder im Sinne des Theilens zu lösen. Ist sie im Sinne des Thelens zu lösen, so ist der Dividend in eine durch den Divisor bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. Ob die zu theilende Größe konkreter oder abstrakter Art ist, ob sie Ganze oder nur Theile von einem Ganzen in sich faßt, ist in Bezug auf die Operation gleichviel. Das Dividiren im Sinne des Theilens ist also in allen Fällen, auch der Sache nach, ein Theilen.

Ist eine Divisionsaufgabe im Sinne des Enthaltenseins zu lösen, so ist zu suchen, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist. Der Dividend wird durch den Divisor gemessen. Es wird also gesucht, wie vielmal so groß der Dividend ist, als der Divisor. Man mag es nun aber mit ganzen oder mit gebrochenen, mit reinen oder mit benannten Zahlen zu thun haben; so ist der Dividend entweder ein reines oder ein gemischtes Vielfaches, ein einfacher oder ein mehrfacher Theil vom Divisor. Andere Fälle gibt es nicht. Worin nun eigentlich die Operation besteht, um dieß zu finden, wird sich am besten zeigen, wenn wir die Anschauung zu Hülfe nehmen.

	Divisor.	Dividend.		
a.	• • •	• • • | • • •	3 in 6 = 2 mal;	6 = 2 × 3.
b.	• | • | •	•	3 in 1 = $\frac{1}{3}$ mal;	1 = $\frac{1}{3}$ × 3.

c. • | • | • • | • 3 in 2 = $^2/_3$mal; 2 = $^2/_3$ × 3.
d. • • • • • • • | • • • | • 3 in 7 = $2^1/_3$mal; 7 = $2^1/_3$ × 3.

Bei a mußten wir, um zu sehen, wie oft 3 in 6 enthalten ist, den Dividenden in Theile von der Größe des Divisors zerlegen. 6 = 2 × 3. Mithin ist 3 in 6 2mal enthalten; 6 ist also das 2fache von 3.

Bei b mußten wir, um zu erkennen, welcher Theil von 3 in 1 enthalten ist, den Divisor in Theile von der Größe des Dividenden zerlegen. 3 = 3 × 1. Von den 3 Theilen des Divisors ist nur einer im Dividenden enthalten. 3 liegt in 1 genau $^1/_3$ mal. Der Dividend 1 ist also nur $^1/_3$ mal so groß, als der Divisor 3.

Bei c mußten wir, da 2 weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von 3 ist, sowohl den Dividenden, als den Divisor in gleiche Theile zerlegen, 3 in 3 × 1 und 2 in 2 × 1. Von den 3 Theilen des Divisors sind nur 2 im Dividenden enthalten; 3 liegt in 2 genau $^2/_3$ mal. Der Dividend beträgt so viel, als $^2/_3$ des Divisors betragen; er ist also $^2/_3$ mal so groß, als der Divisor.

Bei d mußte zuerst der Dividend, so weit es reichte, in gleiche Theile von der Größe des Divisors, in 2 × 3, getheilt werden, und in Bezug auf den Rest wäre dann noch dasselbe zu thun gewesen, was bei b geschah. 7 = $2^1/_3$ × 3. Mithin ist 3 in 7 $2^1/_3$mal enthalten; 7 ist also das $2^1/_3$ fache von 3

Hier waren Divisor und Dividend ganze Zahlen. Sind es Brüche, so verhält sichs eben so. An die Stelle der Ganzen treten dann Theile, die, wenn sie nicht schon von gleicher Größe und Benennung sind, in gleiche und gleichnamige Theile verwandelt werden und dann in demselben Verhältniß zu einander stehen, wie Ganze.

Was ersehen wir nun daraus? Antwort: daß auch jede Division im Sinne des Enthaltenseins ein Theilen ist. Also, und das ist das Endresultat von unserer Untersuchung, ist **alles Dividiren ein Theilen.**

Gleichwohl ist, wie schon aus dem Bisherigen ersichtlich, zwischen der einen und der andern Divisionsweise ein großer Unterschied und zwar:

a. in Bezug auf die Operation selbst. Ist z. B. 12 durch 4 zu dividiren, und ich thue es im S. des Enthaltenseins; so habe ich zu suchen, aus wievielmal 4 die 12 besteht. Ich muß also 12 in 4 + 4 + 4 d. i. in 3 × 4 zerlegen. So finde ich, daß 4 in 12 3 mal enthalten ist. Will ich aber im S. des Theilens dividiren, also suchen, wie viel der 4. Theil von 12 beträgt; so muß ich 12 in 4 gleiche Theile, d. i. in 3 + 3 + 3 + 3 oder 4 × 3 zerlegen, woraus sich ergibt, daß $^1/_4$ von 12 = 3. Das scheinbar Sonderbare an der Sache ist, daß in beiden Fällen das Resultat (in Betreff der Ziffer) dasselbe ist. 4 : 12 = 3, und $^1/_4$ von 12 = 3. Es hat dieß aber seinen natürlichen Grund. $^1/_4$ von 4 = 1; also ist $^1/_4$ von 12 so vielmal 1, als 4 in 12 enthalten ist. Da nun 4 in 12 3 mal enthalten ist, so muß $^1/_4$ von 12 auch 3 × 1 oder 3 betragen.

b. in Bezug auf die Bedeutung der Zahlen. Das Dividiren im S. des Enthaltenseins ist ein Messen. Es wird ge-

sucht, wie oft eine Zahl an der andern angelegt oder von ihr weggenommen werden kann. Der Divisor ist das Maß, der Dividend das zu Messende. Daher sind beide ihrem Wesen nach gleich und nur ihrer Größe nach verschieden. Beim Rechnen mit benannten Zahlen sind Divisor und Dividend gleichartig benannt. Beiden muß eine und dieselbe Münz-, Maß- und Gewichtseinheit zu Grunde liegen. Darum können wir ohne Weiteres suchen, wie oft 4 bayr. Pfd. in 12 bayr. Pfd., aber nicht wie oft 4 bayr. Pfd. in 12 Zollpfund enthalten sind. Beim Rechnen mit reinen Zahlen sind Divisor und Dividend reine Zahlengrößen. Sie müssen es sein, weil überhaupt nur Größen durch einander gemessen werden können. Und der Quotient? Derselbe sagt, wie vielmal so groß der Dividend ist, als der Divisor. Er zeigt also das Verhältniß beider zu einander an. Daher ist er keine Zahlengröße, sondern eine das „Wie oft" oder „Wievielmal" andeutende Verhältnißzahl und eben darum auch beim Rechnen mit benannten Zahlen eine unbenannte Zahl. Rechnungen mit der angewandten Zahl scheinen zwar das Gegentheil zu beweisen. In der That ist es aber doch so. Ein Beispiel wird es zeigen. Braucht man 5 Ellen Zeug zu 1 Kleide, so geben 75 Ellen so vielmal 1 Kleid, als 5 Ellen in 75 Ellen enthalten sind. 5 Ellen sind in 75 Ellen **15 mal** enthalten; also — so schließen wir weiter und verwandeln dadurch die reine Zahl in eine benannte — geben 75 Ellen 15 × 1 Kleid oder 15 Kleider.

Steht gewöhnlich:	Sollte stehen:
5 Ell. | 75 Ell. | 15 Kleider.	5 Ell. | 75 Ell. | 15 mal.
	15×1 Kl.=15 Kl.

Beim Dividiren im S. des Theilens wird der Dividend in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zerlegt, und der Quotient zeigt an, wie viel ein Theil beträgt. Da überhaupt nur Größen theilbar sind, so muß auch der Dividend eine solche sein. Dieser ist daher beim Rechnen mit reinen Zahlen eine reine Zahlengröße und beim Rechnen mit benannten Zahlen eine benannte Zahl. Dasselbe ist auch der Quotient; denn der Theil kann seinem Wesen nach nichts Anderes sein, als was das Ganze ist. $\frac{1}{4}$ von 12 = 3, $\frac{1}{4}$ von 12 fl. = 3 fl. Das Ganze und der Theil stehen aber in einem gewissen Verhältniß zu einander. Die Funktion, dieß zu bestimmen, hat hier der Divisor. Er sagt, in wie viel gleiche Theile das Ganze zu zerlegen ist, und ist die Theilung ausgeführt, so zeigt er an, welcher oder der wievielte Theil der Quotient vom Dividenden ist. Wird also im S. des Theilens dividirt, so steht der Divisor als Verhältnißzahl. Beim Rechnen mit benannten Zahlen ist er eben deßwegen unbenannt, und beim Rechnen mit angewandten Zahlen wird diejenige Zahl, die als Divisor zu nehmen ist, zuvor, nämlich durch die Auflösung, erst in eine reine Zahl verwandelt. Wenn man z. B. zu 15 Kleidern 75 Ellen braucht, so ist zu 1 Kleide der 15. Theil davon erforderlich. Steht daher

nicht so:	sondern so:
15 Kleider | 75 Ell. | 5 Ellen.	15 | 75 Ell. | 5 Ellen.

Der Unterschied zwischen den beiden Divisionsformen in Bezug auf die Bedeutung der Zahlen ist also, um es kurz zu sagen, der: bei der Division im S. des Enthaltenseins sind Divisor und Dividend Zahlengrößen, der Quotient hingegen ist eine Verhältnißzahl; bei der Divison im S. des Theilens sind Dividend und Quotient die Zahlengrößen und der Divisor ist die Verhältnißzahl.

In diesem Cursus werden übrigens die zwei Divisionsformen so eng als möglich mit einander verbunden.

Der Stufengang ist dem bei der Multiplikation eingehaltenen analog. Was beim Multipliciren der Multiplikator ist, das ist beim Dividiren der Divisor. Dort war für den Stufengang die Anzahl der Stellen des Multiplikators maßgebend; hier entscheidet die Anzahl der Stellen des Divisors. Diese Andeutung mag genügen. Das Nähere ergibt sich aus der Durchführung selbst.

I. Der Divisor ist einstellig.

A. Mündlich.

1. Der Quotient eine Grundzahl.

Enthaltensein und Theilen in Verbindung.

3 : 12	7 : 21	7 : 35	9 : 45	4 : 28	3 : 24	6 : 24	4 : 36
4 : 24	3 : 27	6 : 18	3 : 21	8 : 72	5 : 40	9 : 81	6 : 36
5 : 45	8 : 40	2 : 16	6 : 48	5 : 15	6 : 54	7 : 49	7 : 56
6 : 30	5 : 30	8 : 32	5 : 35	7 : 28	9 : 63	4 : 12	3 : 15
8 : 56	9 : 18	4 : 20	8 : 24	9 : 72	8 : 48	5 : 20	9 : 54
9 : 36	6 : 24	9 : 27	7 : 42	3 : 18	7 : 63	8 : 64	5 : 25

Wird Vorstehendes an die Wandtafel geschrieben, so können die einzelnen Aufgaben der Reihe nach sowohl von einzelnen Schülern, als im Chore ohne Weiteres vorgerechnet werden.

Bei 3 : 12 ist zu sprechen: 3 in 12 liegt 4mal, der dritte Theil von 12 = 4. Bei 4 : 24 heißt es: 4 in 24 liegt 6mal, der 4. Th. v. 24 = 6.

Will man die Aufgaben nicht anschreiben, sondern nennen, so wird gefragt: Wie oft liegt 3 in 12? Wie viel ist der 3. Th. von 12?

Recht häufig lasse man auch den Nachweis angeben. 3 in 12 liegt 4mal; denn 4×3=12. Der 3. Theil von 12=4, denn 3×4=12.

2. Der Quotient eine einfache Zahl höherer Ordnung.

a. Der Dividend wird nicht zerlegt.

aa. Wie oft liegt 2 in 20, 200, 2000, 20000, 200000?

2 ist in 2 E. 1mal, in 2 Z. 10mal so oft, also 10mal, in 2 H. 100mal so oft, also 100mal enthalten 2c.

Eben so:

4 : 8, 80, 800, 8000, 80000, 800000.

3 : 9, 90, 900, 9000, 90000, 900000.

bb. Wie viel ist der halbe Theil von 40, 400, 4000 ꝛc.?

Der halbe Theil von 4 = 2; der halbe Theil von 40 oder 4 Z. = 2 Z. oder 20; der halbe Theil von 4 H. = 2 H. ꝛc.

Eben so:

$1/_3$ von 60, 600, 6000, 60000, 600000.
$1/_4$ von 80, 800, 8000, 80000, 800000.

b. Der Dividend wird zerlegt.

Jetzt wird wieder die Tabelle unter Ziffer 1 benützt, nur ist bei jeder Aufgabe dem Dividenden eine Null beizufügen. Z. B.

3 : 120 =? (Wie oft ist 3 in 120 enthalten?)
120 = 1 H. + 2 Z. Ist 3 in 1 H. 100mal enthalten? Nein! Also zerlegen wir den H. in Zehner. 1 H. = 10 Z., 10 Z. + 2 Z. = 12 Z.; 3 liegt in 12 E. 4mal, in 12 Z. also 40mal; 3 ist in 120 40 mal enthalten.

$1/_4$ v. 240 =? (Wie viel ist der vierte Theil von 240?)
240 = 2 H. + 4 Z.; der vierte Th. von 2 H. ist nicht 1 H.; ich mache daher die 2 H. zu Z.; 2 H. = 20 Z.; 20 Z. + 4 Z. = 24 Z.; der 4. Th. von 24 Z. = 6 Z. oder 60 E.; der 4. Th. von 240 = 60.

So fort.

3. Der Quotient eine Bruchzahl.

a. Enthaltensein. Wie oft ist enthalten

2 in 1?
3 in 1? 3 in 2?
4 in 1? 4 in 3?
u. s. w.

Anschaulich:

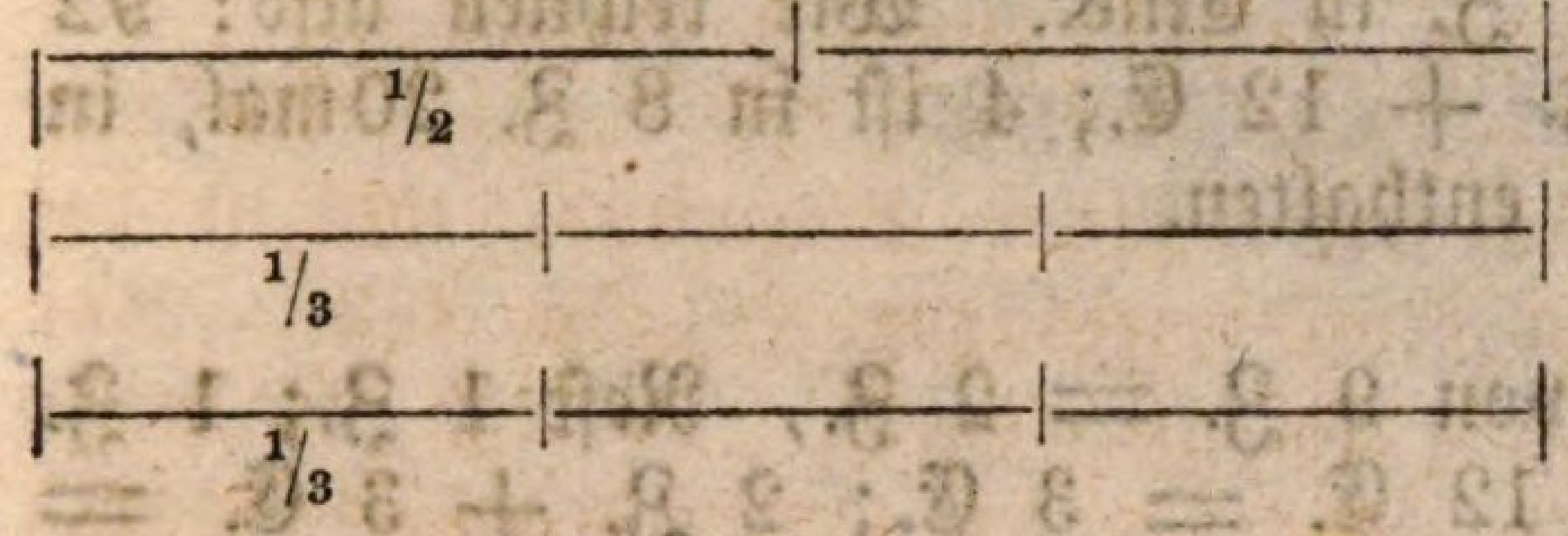
• •	• • • •	2 ist in 4 2mal enthalten.
• •	• •	2 ist in 2 1mal "
• •	•	2 ist in 1 $1/_2$ mal "
• • •	• • • • • •	3 ist in 6 2mal enthalten.
• • •	• • •	3 ist in 3 1mal "
• • •	•	3 ist in 1 $1/_3$ mal "
• • •	• •	3 ist in 2 $2/_3$ mal "

1 ist in 1 genau 1 mal enthalten; 2 ist in 1 nicht ganz 1 mal; 2 liegt in 1 nur zum Theil; 2 liegt in 1 nur mit dem halben Theile; 2 ist in 1 $1/_2$ mal. Von 3 ist in 1 nur $1/_3$ enthalten; 3 liegt in 1 also $1/_3$ mal. 3 liegt in 1 + 1 $1/_3$ mal + $1/_3$ mal; 3 liegt in 2 also $2/_3$ mal.

u. s. w.

b. **Theilen.** Wie viel beträgt
der halbe Theil von 1?
der dritte Theil von 1? von 2?
der vierte Theil von 1? von 3?
u. s. w.

Anschaulich.



Der halbe Theil von 1 = $\frac{1}{2}$.
Der dritte Theil von 1 = $\frac{1}{3}$.
Der dritte Theil von 1 = $\frac{1}{3}$.

Der dritte Theil von 1 + 1 = $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$; der 3. Th. von 2 = $\frac{2}{3}$.
u. s. w.

4. Der Quotient eine gemischte Zahl.

Enthaltensein und Theilen wieder in Verbindung.

2 : 15 =? (Wie oft ist 2 in 15 enthalten?)
In welchen Zahlen von 1 bis 20 geht 2 auf? (In 2, 4, 6 ꝛc.) In 15 geht also 2 nicht auf. Welches ist die nächste Zahl unter 15, worin 2 ohne Rest enthalten ist? (14.) Wir zerlegen daher 15 in 14 + 1 und suchen, wie oft 2 in beiden Theilen liegt. 2 in 14 liegt 7 mal und in 1 $\frac{1}{2}$ mal; 2 liegt in 15 also $7\frac{1}{2}$ mal.

$\frac{1}{2}$ von 15 =? (Wie viel beträgt die Hälfte von 15?)
15 = 14 + 1; die Hälfte von 14 = 7, und die Hälfte von 1 = $\frac{1}{2}$; die Hälfte von 15 = $7\frac{1}{2}$.

4 : 15 =?
Die Zahlen, in welchen 4 aufgeht, heißen 4, 8, 12, 16 ꝛc.; in 15 geht 4 also nicht auf. Die nächste Zahl unter 15, worin 4 aufgeht, ist 12; 15 = 12 + 3; 4 in 12 liegt 3 mal; und 4 in 3 liegt $\frac{3}{4}$ mal; also liegt 4 in 15 $3\frac{3}{4}$ mal.

$\frac{1}{4}$ von 15 =?
15 = 12 + 3; der 4. Theil von 12 = 3, und der 4. Theil von 3 = $\frac{3}{4}$; der 4. Theil von 15 = $3\frac{3}{4}$.

Hiernach sind folgende Aufgaben zu behandeln und zwar sowohl im Sinne des Enthaltenseins, als im Sinne des Theilens.

2 : 3	3 : 4	4 : 9	5 : 11	6 : 13	7 : 15	8 : 11	9 : 20
2 : 9	3 : 11	4 : 11	5 : 27	6 : 21	7 : 24	8 : 27	9 : 42
2 : 11	3 : 25	4 : 25	5 : 38	6 : 32	7 . 40	8 : 45	9 : 50
2 : 17	3 : 32	4 : 31	5 : 44	6 : 53	7 : 60	8 : 75	9 : 80

5. Der Quotient eine zusammengesetzte Zahl.

3 : 69 =? (Wie oft ist 3 in 69 enthalten?)
69 = 6 Z. + 9 E.; 3 ist in 6 Z. 20 mal, in 9 E. 3 mal, in 6 Z. + 9 E. also 23 mal enthalten; 3 : 69 = 23 mal.

$1/3$ von 69 = ? (Wie viel beträgt $1/3$ von 69?)
69 = 6 Z. + 9 E.; $1/3$ von 6 Z. = 2 Z., $1/3$ von 9 E. = 3 E.; 2 Z. + 3 E. = 23 E.; $1/3$ v. 69 = 23.

4 : 92 = ?
92 = 9 Z. + 2 E. Wenn man sucht, wie oft 4 in 9 liegt, so zerlegt man 9 in 8+1. Eben so thut man, wenn gesucht werden soll, wie oft 4 in 9 Z. enthalten ist. Man zerlegt 9 Z. in 8 Z. + 1 Z. und verwandelt den 1 Z. in Einer. Wir rechnen also: 92 = 9 Z. + 2 E. oder 8 Z. + 12 E.; 4 ist in 8 Z. 20mal, in 12 E. 3mal, in 92 also 23 enthalten.

$1/4$ v. 92 = ?
92 = 9 Z. + 2 E.; $1/4$ von 9 Z. = 2 Z., Rest 1 Z.; 1 Z. + 2 E. = 12 E.; $1/4$ v. 12 E. = 3 E.; 2 Z. + 3 E. = 23 E.; $1/4$ von 92 = 23.
Hievon leitet sich folgende kürzere Weise ab: 92 = 80 + 12; $1/4$ von 80 + 12 = 20 + 3 oder 23.

2 : 75 = ?
75 = 7 Z. + 5 E. = 6 Z. + 15 E. = 6 Z. + 14 E. + 1 E.; 2 ist in 6 Z. 30mal, in 14 E. 7mal u. in 1 E. $1/2$ mal, in 75 also $37\,1/2$ mal enthalten.

$1/2$ von 75 = ?
75 = 7 Z. + 5 E.; der halbe Theil v. 7 Z. = 3 Z., Rest 1 Z.; 1 Z. + 5 E. = 15 E.; der halbe Theil v. 15 E. = 7 E., Rest 1 E.; der halbe Theil von 1 = $1/2$; 3 Z. + $7\,1/2$ = $37\,1/2$; $1/2$ von 75 = $37\,1/2$.
Die hievon abgeleitete kürzere Weise ist: 75 = 60 + 15; $1/2$ von 60 + 15 = 30 + $7\,1/2$ oder $37\,1/2$.

5 : 285 = ?
285 = 2 H. + 8 Z. + 5 E.; 5 liegt in 2 H. nicht 100mal; ich mache daher die 2 H. zu Z.; 2 H. = 20 Z.; 20 Z. + 8 Z. + 5 E. = 28 Z. + 5 E. oder 25 Z. + 35 E.; 5 ist in 25 Z. 50mal, in 35 E. 7mal, in 285 also 57mal enthalten.

$1/5$ v. 285 = ?
285 = 2 H. + 8 Z. + 5 E.; der 5. Theil v. 2 H. ist nicht 1 H.; 2 H. = 20 Z.; 20 Z. + 8 Z. 5 E. = 28 Z. 5 E.; der 5. Theil von 28 Z. = 5 Z., Rest 3 Z.; 3 Z. + 5 E = 35 E.; der 5. Th. v 35 E. = 7 E.; 5 Z. + 7 E. = 57 E.; $1/5$ v. 285 = 57.
Hierdurch wird folgende kürzere Weise vorbereitet: 285 = 250 + 35; $1/5$ von 250 = 50, und $1/5$ von 35 = 7; 50 + 7 = 57; also ist $1/5$ von 285 = 57.

Aufgaben.

2 : 49	$1/3$ v. 53	2 : 130	$1/2$ v. 150	3 : 234	$1/3$ v. 174
3 : 49	$1/4$ v. 53	4 : 300	$1/4$ v. 180	7 : 455	$1/7$ v. 532
4 : 77	$1/5$ v. 81	5 : 240	$1/5$ v. 320	9 : 513	$1/9$ v. 657
5 : 77	$1/6$ v. 81	8 : 360	$1/8$ v. 600	4 : 276	$1/4$ v. 372
6 : 77	$1/7$ v. 81	6 : 450	$1/6$ v. 270	8 : 768	$1/8$ v. 464

6 : 175	3 : 250	$^1/_2$ v. 153	$^1/_6$ v. 405
8 : 524	4 : 215	$^1/_7$ v. 360	$^1/_8$ v. 572
5 : 348	7 : 600	$^1/_4$ v. 195	$^1/_9$ v. 1000

B. Schriftlich.

a. Im Sinne des Enthaltenseins.

Beispiel 1. 3 : 69 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
3 | 6 9 | 2 3
  | 6 : |
  -------
      9
      9
     ---
```

69 = 6 Z. + 9 E.; 3 ist in 6 E. 2mal, in 6 Z. also 20mal. Dieß schreiben wir hinter den Strich, aber nur die Ziffer 2; für die 0 setzen wir einen Punkt. 3 ist 20mal enthalten in 20 × 3; 2 × 3 = 6, 20 × 3 = 60 oder 6 Z.; diese 6 Z. schreiben wir unter die 6 Z. und machen einen Strich.

Nun suchen wir, wie oft 3 in den 9 E. liegt. Wir setzen daher die 9 E. herunter. 3 ist in 9 E. 3mal. Diese 3 schreiben wir hinter 2, an die Stelle des Punktes. 3 ist 3mal enthalten in 3 × 3 od. 9; 9 unter 9.

3 ist in 6 Z. 20mal, in 9 E. 3mal, in 69 also 23mal enthalten.

Beispiel 2. 5 : 3479 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
5 | 3 4 7 9 | 6 9 5 4/5
  | 3 0 : : |
  ---------
    4 7 :
    4 5 :
    -----
      2 9
      2 5
      ---
        4
```

3479 = 3 T. + 4 H. + 7 Z. + 9 E. Wie oft ist 5 darin enthalten?

5 ist in 5 T. 1000mal, in 3 T., also nicht 1000mal enthalten. 3 T. = 30 H.; 30 H. + 4 H. = 34 H.; 5 liegt in 34 E. 6mal, in 34 H. also 600mal. Wir schreiben nur die Ziffer 6; für die 2 Nullen setzen wir zwei Punkte, einen in die Zehnerstelle und einen in die Einerstelle. 5 ist 600mal enthalten in 600 × 5; 6 × 5 = 30, 600 × 5 = 30 H.; 30 H. von 34 H. bleiben 4 H. Nun ist noch zu suchen, wie oft 5 in 4 H. 7 Z. und 9 E. enthalten ist.

4 H. = 40 Z.; 40 Z. + 7 Z., welche wir dazu heruntersetzen, = 47 Z.; 5 ist in 47 E. 9mal, in 47 Z. also 90mal enthalten. Wir schreiben nur die Ziffer 9 und zwar in die Zehnerstelle, hinter 6.

5 ist 90mal enthalten in 90 × 5; 9 × 5 = 45, 90 × 5 = 45 Z.; 45 Z. von 47 Z. bleiben 2 Z. Nun ist noch zu suchen, wie oft 5 in 2 Z. + 9 E. enthalten ist.

2 Z. = 20 Ein.; 20 E. + 9 E., welche wir dazu herunter ziehen, = 29 E.; 5 ist in 29 E. 5mal enthalten. Diese 5 setzen wir in die Einerstelle hinter 9; 5 ist 5mal enthalten in 5 × 5 oder 25; 25 von 29 bleibt 4.

5 ist in 1 $^1/_5$ mal, in 4 also $^4/_5$ mal enthalten.

5 ist in 3 T. 4 H. 7 Z. und 9 E. oder in 3479 enthalten $695^4/_5$ mal.

So werde längere Zeit bei jeder Ausrechnung gesprochen. Auf den Vortheil, alle Einheiten blos als Einerzahlen zu behandeln, kommt der Schüler nach und nach von selbst. Man hat nicht nöthig, es zu fördern. Vielmehr sei der Lehrer besorgt, daß dieß nicht zu bald und nicht in dem Maße geschehe, daß das Bewußtsein von dem wirklichen Werth der Ziffern, von der eigentlichen Zahlengröße, ganz verschwinde. Dasselbe darf nie untergehen, auch beim Schnellrechnen nicht.

b. Im Sinne des Theilens.

Beispiel 1. $^1/_3$ von 69 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
     Z. E.  Z. E.
  3 | 6 9 | 2 3
    | 6 : |
    ---
      9
      9
      ---
```

Um $^1/_3$ von 69 zu erhalten, so muß ich 69 in 3 gleiche Theile theilen. Darum setze ich vor die Zahl 69 die Zahl 3.

69 = 6 Z. + 9 E. Die Frage ist also: Wie viel beträgt $^1/_3$ von 6 Z. und von 9 E.?

Theilt man 6 Z. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 2 Z.; diese setzen wir rechts. In die Stelle der Einer aber setzen wir einen Punkt. Getheilt sind nun 3 × 2 Z. oder 6 Z. Was getheilt ist, setzen wir unter und ziehen es ab. Wir setzen also 6 Z. unter 6 Z.; 6 Z. von 6 Z. geht auf. Also ist kein Zehner mehr übrig. Nun sind noch 9 E. zu theilen. Bevor wir sie theilen, ziehen wir sie herunter.

Theilt man 9 E. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 3 Einer. Die setzen wir wieder rechts. Wir haben nun abermals 3 × 3 E. oder 9 E. getheilt. 9 E. von 9 E. geht auf.

$^1/_3$ von (6 Z. + 9 E.) sind also 2 Z. + 3 E. oder 23 E.; der dritte Theil von 69 = 23.

Rechne ich 40 + 29 = 69, so habe ich addirt. Rechne ich: 69 — 29 = 40, so habe ich subtrahirt. Rechne ich: 3 × 23 = 69, so habe ich multiplicirt. Rechne ich aber: 3 ist in 69 23mal, oder: $^1/_3$ von 69 = 23, so habe ich dividirt.

In diesem Falle ist die Zahl 69 das Ganze, der Dividend; die Zahl 23 ist $^1/_3$ von 69, sie ist der gesuchte Theil, der Quotient; und die Zahl 3, welche anzeigt, wie die Zahl 69 zu theilen war, ist der Theiler, der Divisor.

Beispiel 2. $^1/_5$ von 2347 = ?

Ansatz und Ausrechnung.

```
5 | 2 3 4 7 | 4 6 9 2/5
  | 2 0 . .
  -------
      3 4 .
      3 0 .
    -------
        4 7
        4 5
      -----
          2
```

2347 = 2 T. + 3 H. + 4 Z. + 7 E. Die Frage ist also: Wie viel ist $^1/_5$ von 2 T. 3 H. 4 Z. und 7 E.?

$^1/_5$ von 2 T. ist nicht 1 T. Wir verwandeln daher die 2 T. in H.; 2 T. = 20 H.; 20 H. + 3 H. = 23 H.; $^1/_5$ von 23 H. = 4 H.; wir schreiben aber nur die Ziffer 4; in die Stellen der Zehner und Einer setzen wir Punkte. 4 H. sind $^1/_5$ von 5 × 4 H. oder 20 H.; 20 H. von 23 H. bleiben 3 H. Von den 2 T. 3 H. 4 Z. und 7 E. sind nun 20 H. oder 2 T. getheilt. Zu theilen sind also noch 3 H. 4 Z. und 7 E.

$^1/_5$ von den 3 H. ist kein H. mehr. Wir machen sie daher zu Zehnern und nehmen die 4 Z. dazu herunter. 3 H. + 4 Z. = 34 Z.; $^1/_5$ von 34 Z. = 6 Z.; diese 6 Z. setzen wir hinter die 4 H. in die 2te Stelle. 6 Z. sind $^1/_5$ von 5 × 6 Z. oder 30 Z.; 30 Z. v. 34 Z. bleiben 4 Z.

Nun haben wir noch $^1/_5$ von 4 Z. + 7 E. zu suchen. $^1/_5$ von 4 Z. ist kein Z. mehr. Daher machen wir sie zu E. und führen die 7 E. dazu herunter. 4 Z. + 7 E. = 47 E.; $^1/_5$ von 47 E. = 9 E.; diese 9 E. setzen wir hinter die 6 Z., in die erste Stelle. 9 E. sind $^1/_5$ von 5 × 9 oder 45 E.; 45 E. von 47 E. bleiben 2 E.

Nun theilen wir auch die 2 E.; der 5. Theil von 1 = $^1/_5$; der 5. Th. von 2 = $^2/_5$.

Also ist der 5. Th. von 2 T. 3 H. 4 Z. und 7 E. = 4 H. 6 Z. 9 E. und $^2/_5$; der 5. Th. von 2347 = 469$^2/_5$.

Wir haben nun angezeigt, wie im Sinne des Enthaltenseins und im Sinne des Theilens schriftlich zu dividiren ist. Der Lehrer entscheide sich für die eine oder für die andere Form. Denn die Division in beiden durchzuführen, ist zwar nothwendig in Präparandenanstalten und in Seminarien, weil dem Lehrer beide bekannt und geläufig sein müssen, nicht aber in der Volksschule. Hier drängt die Kürze der Zeit zur Vereinfachung. Wir sind dafür, daß das schriftliche Dividiren im Sinne des Enthaltenseins durchgeführt und geübt werde. Die Ausdrucksweise, deren man sich gewöhnlich bedient, z. B. „3 in

27 geht 9 mal," ist, streng genommen, auch nur dieser Divisionsform angemessen. Und ist ein gewisser Theil von einer gegebenen Zahl zu suchen, so reicht ein einfacher Schluß hin, zu erkennen, daß man diesen Theil auch findet, indem man sucht, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist. Ein Beispiel wird es zeigen.

$\frac{1}{6}$ von 2142 = ?

$\frac{1}{6}$ von 6 = 1, von $2 \times 6 = 2 \times 1$, von $3 \times 6 = 3 \times 1$; also ist $\frac{1}{6}$ von 2142 so vielmal 1, als 6 in 2142 enthalten ist.

```
6 | 2 1 4 2 | 3 5 7
  | 1 8 . . |
  -----
    3 4 .
    3 0 .
    -----
      4 2
      4 2
      ---
```

6 ist in 2142 357 mal enthalten; daher ist $\frac{1}{6}$ von $2142 = 357 \times 1$ oder 357.

Besondere Aufmerksamkeit ist erforderlich, wenn der Divisor nicht in jedem Theildividenden enthalten ist. Z. B.

```
6 | 183042 | 30507      kurz: 6 | 183042 |  30507
  | 18.... | ....               | 18.... |      6
  ----                          -----    | ------
     3...                           30.. | 183042
     0...                           30..
     ----                           ----
     30..                             42
     30..                             42
     ----                             --
       4.
       0.
       --
       42
       42
       --
```

Für diesen Fall ist es besonders gut, gleich anfangs zu bestimmen, wie viele Stellen der Quotient erhalten wird. Dieß ist sehr leicht. Zuerst sieht man zu, wie viele Ziffern des Dividenden genommen werden müssen, um die erste Stelle des Quotienten zu erhalten. So viele Ziffern dann vom Dividenden noch vorhanden sind, so viele Stellen erhält der Quotient noch zu der einen, die er schon hat, und dieß wird durch eben so viel Punkte angedeutet.

Nach unserer Rechnung ist 6 in 183042 30507 mal enthalten. Ist dieß wirklich der Fall, so muß 30507×6 oder 6×30507 genau wieder 183042 geben. Dieß als Probe, die man regelmäßig anwenden läßt. Gibt die Division einen Rest, so ist derselbe dem Produkte zuzuzählen.

Aufgaben z. Zifferr., 12. Uebung.

II. Der Divisor ist zweistellig.

A. Mündlich.

1. Der Divisor eine reine Zehnerzahl.

1 Z. ist in 1 Z., wie 1 in 1, 1mal enthalten.
1 Z. ist in 2 Z., wie 1 in 2, 2mal „
2 Z. sind in 2 Z., wie 2 in 2, 1mal „
2 Z. sind in 4 Z., wie 2 in 4, 2mal „

Wie oft ist 2 in 4 enthalten? Wie oft sind 2 Z. in 4 Z. enthalten? Etwa 2 zehnermal? Wie oft können 2 E. von 4 E. weggenommen werden? Wie oft 2 Z. von 4 Z.? Also sind 2 Z. in 4 Z., wie 2 E. in 4 E., 2mal enthalten.

Eben so:	2 Z. : 6 Z.	3 Z. : 6 Z.	4 Z. : 8 Z.
	2 Z. : 8 Z.	3 Z. : 9 Z.	4 Z. : 12 Z.

20 : 120 = ? (Wie oft ist 20 in 120 enthalten?)

Ausr. 20 = 2 Z., 120 = 12 Z.; 2 Z. sind in 12 Z., wie 2 in 12, 6mal enthalten; 20 : 120 = 6mal.

Eben so:	20 : 160	40 : 240	60 : 540	80 : 320
	20 : 280	40 : 440	60 : 840	80 : 960
	30 : 150	50 : 350	70 : 420	90 : 720
	30 : 390	50 : 600	70 : 910	90 : 990

2. Der Divisor eine zusammengesetzte Zahl.

Das Verhältniß des Divisors zum Dividenden wird erkannt oder gefunden

a. Durch unmittelbare Auffassung.

11 : 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 = ?

Ausr. 22 = 2 × 11; also ist 11 in 22 2mal enthalten. 33 = 3 × 11; also ist 11 in 33 3mal enthalten u. s. f.

Eben so:

12 : 24, 36, 48, 60 &c.	16 : 32, 48, 64, 80 &c.
13 : 26, 39, 52, 65 &c.	18 : 36, 54, 72, 90 &c.
14 : 28, 42, 56, 70 &c.	24 : 48, 72, 96, 120 &c.
15 : 30, 45, 60, 75 &c.	25 : 50, 75, 100, 125 &c.

b. Durch Vergleichung der gleichnamigen Einheiten.

64 : 128 = ? (An die Wandtafel notirt.)

64 = 6 Z. + 4 E.; 128 = 12 Z. + 8 E. Die 6 Z. sind in den 12 Z., sowie die 4 E. in den 8 E. 2mal enthalten; 64 in 128 geht 2mal; 2 × 64 = 128.

Eben so	23 : 69	54 : 108	43 : 129	74 : 148
	32 : 96	71 : 639	52 : 208	82 : 328
	34 : 68	21 : 147	61 : 427	93 : 279

c. Durch Vergrößerung des Dividenden.

48 : 475 = ?

475 + 5 = 480; 48 ist in 480 10mal, in 475 also nicht 10mal, sondern nur 9mal; 48 ist genau 9mal in 9 × 48 oder 432; 432 von 475 bleibt 43; also ist 48 in 475 9mal, und 43 bleibt Rest.

36 : 180 = ?

36 liegt in 360 10mal, in 180 oder $^{1}/_{2}$ × 360 nur $^{1}/_{2}$mal so oft, also nur 5mal.

d. Durch Verkleinerung oder Vergrößerung des Divisors.

21 : 150 = ?

Ich suche, wie oft 20 in 150 enthalten ist. 20 = 2 Z., und 150 = 15 Z.; 2 Z. in 15 Z. oder 2 in 15 = 7mal; 21 ist 7mal enthalten in 7 × 21 oder 147; 147 von 150 bleibt 3; 21 ist in 1 $^{1}/_{21}$mal, in 3 $^{3}/_{21}$mal, in 150 also $7^{3}/_{21}$mal enthalten.

19 : 140 = ?

Ich suche, wie oft 20 in 140 liegt. 2 Z. sind in 14 Z., wie 2 E. in 14 E., 7mal; 19 ist 7mal enthalten in 7 × 19 oder 133; 133 von 140 bleibt 7; 19 ist in 7 noch $^{7}/_{19}$mal. Also ist 19 in 140 $7^{7}/_{19}$mal enthalten.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 40 : 3160 = ?

Ausrechnung.

```
40|3160 |  79
  |280  |  40
  ------ --------
    360  3160
    360
    ---
```

3160 = 3 T. + 1 H. + 6 Z. + 0 E.

40 in 3 geht nicht 1mal, in 3 Tausendern also nicht 1000mal.

3 T. + 1 H. = 31 H.

40 in 31 geht nicht 1mal, in 31 Hundertern also nicht 100mal.

31 H. + 6 Z. = 316 Z.

40 in 316 geht. Aber wie oft? Ich suche, wie oft 4 Z. in 31 Z. enthalten sind. 4 Z. sind in 31 Z. so oft, als 4 in 31, nämlich 7mal. 7 × 40 = 280; 280 von 316 bleibt 36.

40 liegt in 316 E. 7mal, und 36 E. bleiben übrig; also ist 40 in 316 Z. 70mal, und 36 Z. bleiben im Rest.

36 Z. + 0 E. = 360 E. Wie oft liegt nun 40 in 360? So oft als 4 Z. in 36 Z., oder so oft als 4 in 36, nämlich 9mal; 9 × 40 = 360; 360 von 360 geht auf.

Also ist 40 in 3160 79 mal enthalten. Ist aber 40 in 3160 wirklich 79 mal enthalten, so muß 79 × 40 oder 40 × 79 wieder 3160 geben. Probe.

Anm. Die Aufgabe läßt sich auch so ausrechnen: 40 = 4 Z., und 3160 = 316 Z.; 4 Z. sind in 316 Z. so oft enthalten als 4 in 316. Man streicht also von jeder Zahl die Null und dividirt dann 316 durch 4. Wir bringen diese vereinfachte Weise auch, aber erst später. Jetzt soll der Schüler in das Verfahren eingeführt werden, mit 2stelligen Zahlen zu dividiren. Und dieß geschieht am besten durch Rechnungen, bei denen der Divisor eine reine Zehnerzahl ist. Der Zweck wird jedoch nur erreicht, wenn so verfahren wird, wie oben gezeigt worden ist.

Beispiel 2. 21 : 672 = ?

Ausrechnung.

21	672	32
	63	
	42	
	42	

672 = 6 H. + 7 Z. + 2 E.
21 in 6 geht nicht 1 mal, in 6 Hundertern also nicht 100 mal.
6 H. + 7 Z. = 67 Z.
21 in 67 geht. Aber wie oft? Ich suche, wie oft die 2 Z. in den 6 Z. enthalten sind. 2 Z. sind in 6 Z. 3 mal. Ist aber auch 21 in 67 3 mal enthalten? Ja, wenn 3 × 21 von 67 weggenommen werden kann. 3 × 21 = 63; 63 von 67 bleibt 4. Es geht.

21 liegt in 67 E. 3 mal, und 4 E. bleiben übrig; also ist 21 in 67 Z. 30 mal, und 4 Z. bleiben im Rest.

4 Z. + 2 E. = 42 E. Wie oft ist 21 darin enthalten? 42 = 2 × 21; also ist 21 in 42 E. 2 mal enthalten; 2 × 21 = 42. Geht auf.

Mithin ist 21 in 672 32 mal enthalten. Probe!

Beispiel 3. 36 : 12852 = ?

Ausrechnung.

36	12852	357
	108	
	205	
	180	
	252	
	252	

12852 = 1 Z.T. + 2 T. + 8 H. + 5 Z. + 2 E.

Da der Theiler eine 2stellige Zahl ist, so kann er in einer einstelligen nicht 1 mal enthalten sein. Daher nehmen wir gleich die zwei ersten Stellen zusammen.

1 Z.T. + 2 T. = 12 T.
36 in 12 geht nicht 1 mal, in 12 Tausendern also nicht 1000 mal.
12 T. + 8 H. = 128 H.

36 in 128 geht. Aber wie oft? Wie oft sind die 3 Z. in den 12 Z.? (4mal). Sind die 6 E. in den 8 E. auch 4mal? Nein! Also geht's nicht 4mal. Wir nehmen es daher 3mal. 36 ist 3mal enthalten in 3 × 36; 3 × 36 = 108; 108 von 128 bleibt 20.

36 liegt in 128 E. 3mal, und 20 E. bleiben übrig; also ist 36 in 128 H. 300mal, und 20 H bleiben.

20 H. + 5 Z. = 205 Z. Wir suchen zunächst, wie oft 36 in 205 E. enthalten ist.

Wie oft sind die 3 Z. in den 20 Z.? (6mal.) Kann 6 × 36 von 205 weggenommen werden? (6 × 36 = 216). Nein! Also gehts nicht 6mal. Wahrscheinlich geht's 5mal. 36 ist 5mal enthalten in 5 × 36; 5 × 36 = 180; 180 von 205 bleibt 25.

36 liegt in 205 E. 5mal und 25 E. bleiben übrig; also ist 36 in 205 Z. 50mal, und 25 Z. bleiben im Rest.

25 Z. + 2 E. = 252 E.; 3 Z. sind in 25 Z. 8mal; 36 ist 8mal enthalten in 8 × 36; 8 × 36 = 288. Also geht's nicht 8mal. Wahrscheinlich geht es 7mal. 7 × 36 = 252; 252 von 252 geht auf.

Die meiste Schwierigkeit hat es, mit Zahlen wie 19, 29, 39 2c., dann 18, 28, 38 u. s. f. zu dividiren. Man kann sichs übrigens dadurch erleichtern, daß man beim Suchen der Theilquotienten für den gesetzten Theiler die nächst höhere reine Zehnerzahl sich denkt.

Beispiel 4. 19 : 110177 = ?

Ausrechnung:

```
19 | 110177 | 5798
     95...
     ---
     151
     133
     ---
      187
      171
      ---
       167
       152
       ---
        15
```

Anstatt 19 denke ich mir 20. So oft 20 in einer Zahl enthalten ist, so oft liegt jedenfalls auch 19 darin.

Um also zu finden, wie oft 19 in 110 enthalten ist, so suche ich, wie oft 20 darin liegt. 20 in 110 oder 2 Z. in 11 Z. oder 2 in 11 geht 5mal. Also ist auch 19 in 110 5mal enthalten. 19 liegt genau 5mal in 5 × 19 oder 95 u. s. w.

Hierbei kann höchstens vorkommen, daß der wirkliche Divisor 1mal öfter im Theildividenden enthalten ist, als der angenommene. Z. B.

```
18 | 134984 | 67
     108
     ---
      26
     126
     ---
       8
```

Anstatt 18 nehme ich 20; 20 in 134 oder 2 Z. in 13 Z. oder 2 in 13 liegt 6 mal. 18 liegt 6 mal in 6 × 18 oder 108; Rest 26. So viel darf nicht bleiben. 134 = 108 + 26; 18 ist ist 108 6 mal und in 26 auch noch 1 mal; also ist 18 in 108 + 26 oder in 134 6 mal + 1 mal oder 7 mal enthalten. 7 × 18 = 126, Rest 8. Und so weiter.

Aufg. z. Zifferr., 13. Uebung.

III. Der Divisor ist drei- und mehrstellig.

A. Mündlich.

a. Wie oft ist enthalten

1 E. in 1 E.? 1 Z. in 1 Z.? 1 H. in 1 H.? 1 T. in 1 T.? ꝛc.
1 E. in 4 E.? 1 Z. in 4 Z.? 1 H. in 4 H.? 1 T. in 4 T.? ꝛc.

Wie oft sind enthalten

2 E. in 4 E.? 2 Z. in 4 Z.? 2 H. in 4 H.? 2 T. in 4 T.? ꝛc.
3 E. in 9 E.? 3 Z. in 9 Z.? 3 H. in 9 H.? 3 T. in 9 T.? ꝛc.

b. 400 : 1200 = ?

400 = 4 H., und 1200 = 12 H.; 4 H. sind in 12 H. 3 mal; den 4 H. sind 3 mal enthalten in 3 × 4 H oder 1200.

300 : 1800 = ?

3 T. sind in 18 T. 6 mal; denn 3 T. sind 6 mal enthalten in 6 × 3 T. oder 18000.

Eben so:

200 : 1600	600 : 2400	2000 : 16000	6000 : 48000
300 : 2100	700 : 4200	3000 : 21000	7000 : 63000
400 : 3600	800 : 6400	4000 : 32000	8000 : 40000
500 : 2500	900 : 2700	5000 : 45000	9000 : 36000

c. Wie oft liegt 110 in 220, 330, 440, 550, 660 ꝛc.?

220 = 2 × 110; also ist 110 in 220 2 mal; 330 = 3 × 110, also ist 110 in 330 3 mal ꝛc.

Wie oft liegt 1200 in 2400, 3600, 4800, 6000 ꝛc.?

2400 = 2 × 1200, also ist 1200 in 2400 2 mal; 3600 = 3 × 1200 also ist 1200 in 3600 3 mal ꝛc.

Eben so:

130 : 260, 390, 520, 650 ꝛc.	1400 : 2800, 4200, 5600 ꝛc.
150 : 300, 450, 600, 750 ꝛc.	1600 : 3200, 4800, 6400 ꝛc.
180 : 360, 540, 720, 900.	2400 : 4800, 7200, 9600 ꝛc.

d.

201 : 804	111 : 777	2003 : 6009	1231 : 3693
103 : 309	213 : 426	3020 : 6040	4234 : 8468
230 : 690	321 : 963	4036 : 8072	2112 : 8448
340 : 680	224 : 672	1250 : 3750	2423 : 7269

Vorstehende Aufgaben werden an die Wandtafel notirt und beurtheilt.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 654 : 5949120 = ?

Ausrechnung:

```
654 | 5949120 | 9096
    | 5886    |
      ----
       6312
       5886
       ----
        4260
        3924
        ----
         336
```

Der Divisor hat 3 Stellen; daher nehme ich auch 3 Stellen vom Dividenden.

5 Mill. + 9 H.T. + 4 Z.T. = 594 Z.T.
654 in 594 geht nicht 1mal, in 594 ZT. also nicht 10000mal.

594 ZT. + 9 T. = 5949 T.
654 in 5949 geht. Aber wie oft? 6 H. in 59 H. oder 6 in 59 geht 9mal; 9 × 654 = 5886, Rest 63.

654 E. sind in 5949 E. 9mal, in 5949 T. also 9000mal, und 63 T. bleiben im Reste.

63 T. + 1 H. = 631 H.
654 in 631 geht nicht 1mal, in 631 H. also nicht 100mal. Ich setze daher an die Stelle der H. eine Null. (Warum muß dieß geschehen?)

631 H. + 2 Z. = 6312 Z.
654 in 6312 geht. Aber wie oft? 654 in 654 geht 1mal, in 654 Z. oder 6540 E. 10mal, in 6312 also nicht 10mal, sondern nur 9mal. 9 × 654 = 5886; Rest 426.

654 in 6312 E. ist 9mal, in 6312 Z. also 90mal, und 426 Z. bleiben im Rest.

426 Z. + 0 E. = 4260 E.
654 in 4260 geht. Die 6 H. sind in den 42 H. gerade 7mal; aber 54 ist in 60 nicht 7mal; daher geht es nur 6mal. 6 × 654 = 3924; Rest 336.

Beispiel 2. 1950 : 1324086 = ?

Ausrechnung:

```
1950 | 1324086 |       679
     | 11700   |       1950
       -----         ------
        15408         33950
        13650        6111
        -----        679.36
         17586     ---------
         17550      1324086
         -----
            36
```

Der Divisor hat 4 Stellen; daher nehmen wir auch 4 vom Dividenden.

1 Mill. + 3 H.T. + 2 Z.T. + 4 T. = 1324 T.
1950 in 1324 geht nicht 1 mal.

1324 T. + 0 H. = 13240 H.
1950 in 13240 geht. Aber wie oft? Wie finde ich es? Ich denke mir statt 1950 die Zahl 2000; 2 T. sind in 13 T. 6 mal; 6 × 1950 = 11700, Rest 1540.

1950 ist in 13240 E. 6 mal, in 13240 H. also 600 mal enthalten, und 1540 H. bleiben im Rest.

1540 H. + 8 Z. = 15408 Z.
Wie oft liegt 1950 in 15408? 2 T. sind in 15 T. 7 mal; 7 × 1950 = 13650, Rest 1758.

1950 ist in 15408 E. 7 mal, in 15408 Z. also 70 mal, und 1758 Z. bleiben im Reste.

1758 Z. + 6 E. = 17586 E.
Wie oft liegt 1950 in 17586? 2 T. sind in 17 T. 8 mal; 8 × 1950 = 15600, Rest 1986. In diesem Reste ist 1950 noch 1 mal enthalten. Es geht also 9 mal. 9 × 1950 = 17550, Rest 36.

So wird in allen Fällen verfahren, wenn der Divisor einer reinen Hunderter- oder Tausenderzahl ziemlich nahe steht.

Aufz z. Zifferr., 14. u. 15. Uebung.

Abkürzungen.

a. Wenn der Divisor eine Grundzahl ist.

Beispiel: 7 | 3 $\overset{6}{4}$ $\overset{2}{5}$ $\overset{3}{4}$ $\overset{1}{6}$ | 4 9 3 5 $^1/_7$

oder

$$\frac{34546}{7} = 4935\,^1/_7$$

7 in 34 geht 4 mal; (4 × 7 = 28) Rest 6.
7 in 65 geht 9 mal; (9 × 7 = 63) Rest 2.
7 in 24 geht 3 mal; (3 × 7 = 21) Rest 3.
7 in 36 geht 5 mal; (5 × 7 = 35) Rest 1.
7 in 1 geht $^1/_7$ mal

Das Eingeklammerte wird nicht notirt.

b. Wenn Divisor und Dividend am Ende Nullen haben.

Erstes Beispiel. 1ø | 84ø | 84.

10 = 1 Z.; 840 = 84 Z.; 1 Z. ist in 84 Z. eben so oft enthalten, als 1 E. in 84 E., nämlich 84 mal.

Zweites Beispiel. 75ø | 980ø | 13 $^5/_{75}$

```
      | 9 8 0 ø | 1 3 5/75
      | 7 5     |
        -----
        2 3 0
        2 2 5
        -----
            5
```

750 = 75 Z.; 9800 = 980 Z.; 75 Z. sind in 980 Z. eben so oft enthalten, als 75 E. in 980 E.; 75 : 980 = $13^5/_{75}$ mal.

Drittes Beispiel. 1 0̸ 0̸ | 7 2 0̸ 0̸ | 7 2

100 = 1 H.; 7200 = 72 H.; 1 H. ist in 72 H. eben so oft enthalten als 1 E. in 72 E., nämlich 72 mal.

Viertes Beispiel. 4 5 0̸ 0̸ | 3 6 0 0̸ 0̸ | 8
3 6 0

4500 = 45 H.; 36000 = 360 H.; 45 H. in 360 H. = 45 in 360 = 8 mal.

Fünftes Beispiel. 5 4 0 0̸ 0̸ | 4 1 5 6 0̸ 0̸ | $7\ ^{376}/_{540}$
3 7 8 0
3 7 6

Sind die Divisionsaufgaben im Heftchen (Stufe I — IV) **ohne** Anwendung des so eben bezeichneten abgekürzten Verfahrens gerechnet; so werden sie dann nochmal durchgerechnet **mit** Anwendung desselben. Durch diese Wiederholung gelangen die Schüler erst recht zu der Sicherheit und Fertigkeit, zu der sie kommen müssen.

Während dessen werden sie in besondern halben Stunden angeleitet,

IV. Divisions-Aufgaben mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich zu rechnen.

1) 4 Knaben haben 96 Nüsse unter sich zu theilen; wie viel kommt auf einen derselben?

Auflösung: Von den 4 Knaben soll einer so viel erhalten, als der andere. Die 96 Nüsse sind daher in 4 gleiche Theile zu theilen. Mithin kommt auf 1 Knaben der 4te Theil von den 96 Nüssen. Ausrechnung: 96 Nüsse = 80 N. + 16 N.; der 4. Theil von 80 N. = 20 N., und der 4 Theil von 16 N. = 4 N.; 20 N. + 4 N. = 24 N. Also bekommt 1 Knabe 24 Nüsse.

2) 8 Ctr. Mehl kosten 72 fl.; wie viel kostet 1 Ctr. davon?

Aufl. Um zu erfahren, was 1 Ctr. kostet, so muß man die 72 fl. auf die 8 Ctr. so vertheilen, daß auf einen Ctr. so viel kommt, als auf den andern. Die 72 fl. sind daher in 8 gleiche Theile zu theilen. Mithin kommt auf 1 Ctr. der 8. Theil von 72 fl. Ausrechnung: Der 8. Theil von 72 fl. = 9 fl. Also kostet 1 Ctr. Mehl 9 fl.

3) Wie viel Hemden lassen sich aus 130 Ellen Leinwand machen, wenn man zu jedem Hemde 5 Ellen braucht?

Aufl. u. Ausr. Nimmt man von den 130 Ellen Leinwand 5 Ellen weg, so gibt das 1 Hemd. Nimmt man nochmal 5 Ellen weg, so gibt das wieder 1 Hemd u. s. f. So oft man also 5 Ellen von den 130 Ellen wegnehmen kann, so vielmal 1 Hemd geben diese. Wie oft können nun aber 5 Ellen von 130 Ellen weggenommen werden? Antwort: So oft, als 5 Ellen in 130 Ellen enthalten sind. Und wie suchst du dieß? 130 Ellen = 100 Ell. + 30 Ellen. 5 Ellen sind in

100 Ell. 20mal und in 30 Ell. 6mal, in 130 Ellen also 26mal enthalten. Also können auch 5 Ellen von 130 Ellen 26mal weggenommen werden. Und die 130 Ellen Leinwand geben eben darum 26 × 1 Hemd oder 26 Hemden.

Aus vorstehenden Beispielen ist zu ersehen, wie dergleichen Aufgaben auf dieser Stufe zu behandeln sind. Die Hauptsache ist, daß der Schüler durch die Auflösung einer jeden Aufgabe an Einsicht gewinne. Ist diese in gehöriger Weise da, ist die Sache klar begriffen; dann ergibt sich die kürzere Berechnung von selbst.

Aufg. z. Kopf- oder Denkrechnen, S. 15, Stufe 1—9.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. Wie viel Bücher lassen sich aus 7280 Bg. Papier machen, wenn jedes Buch 35 Bg. stark werden soll?

Auflösung. Nimmt man von den 7280 Bg. Papier 35 Bg. weg, so gibt dieß 1 Buch; nimmt man vom Reste wieder 35 Bg. weg, so gibt dieß wieder 1 Buch u. s. f. Die 7280 Bg. geben also so vielmal 1 Buch, als 35 Bg. in 7280 Bg. enthalten sind.

Ausrechnung: 35 Bg. | 7280 Bg. | 208×1 Buch = 208 Bücher.
70
280
280

35 Bg. sind in 7280 Bg. so oft enthalten, als 35 in 7280, nämlich 208mal. Die 7280 Bg. Papier geben also 208 × 1 Buch oder 208 Bücher.

Beispiel 2. 18 Ctr. Kaffee kosten 864 fl.; was kostet 1 Ctr. davon?

Auflösung. Um zu erfahren, was 1 Ctr. kostet, so muß ich die 864 fl. auf die 18 Ctr. gleichheitlich vertheilen. Auf 1 Ctr. kommt also der 18. Theil von 864 fl.

Ausrechnung. 18 | 864 fl. | 48 fl.
72
144
144

18 ist in 864 48mal enthalten. Der 18. Theil von 864 fl. = 48 fl. Der Ctr. kostet also 48 fl.

Aufg. z. Zifferr., 16. u. 17. Uebung.

Für Präparanden und Seminaristen.

Das Addiren ist das Vermehren einer Zahl um eine andere; das Subtrahiren das Vermindern einer Zahl um eine andere. Beide Operationen stehen daher im Gegensatz zu einander. Eine hebt die andere auf. Und eben darum kann auch die eine Operation als Probe für die andere dienen.

8 um 5 vermehrt, gibt 13; 13 um 5 vermindert, gibt

wieder 8. Eben so auch umgekehrt. 25 um 12 vermindert gibt 13, und 13 um 12 vermehrt, gibt wieder 25.

Wie die Addition und die Subtraction, so verhalten sich die Multiplikation und die Division. Sie stehen im Gegensatze zu einander. Das Multipliciren ist ein wiederholtes Zusichlegen einer und derselben Zahl, also ein Vereinigen gleicher Zahlen. Das Dividiren ist ein wiederholtes Hinwegnehmen einer und derselben Zahl, also ein Zerlegen in gleiche Zahlen. Darum wird auch von diesen Operationen eine durch die andere aufgehoben. Die eine dient wieder zur Probe für die andere.

a.	48 Faktor	Fakt.	Prod.	Fakt.	Fakt.	Prod.	Fakt.
	25 „	25	1200	48	48	1200	25
	240		100			96	
	96		200			240	
	1200 Produkt		200			240	

48, 25mal genommen, gibt 1200; 1200 ist also das 25fache von 48. Zerlege ich das 25fache wieder in 25 gleiche Theile, d. i. dividire ich 1200 durch 25 im Sinne des Theilens, so muß sich wieder 48 ergeben.

48, 25mal genommen, gibt 1200; mithin muß 48 auch wieder 25mal von 1200 weggenommen werden können, d. i. 48 muß in 1200 25mal enthalten sein.

Wird also das Produkt zweier Zahlen durch die eine von ihnen, d. i. durch den einen Faktor, dividirt, so ergibt sich der andere.

b.	72	3456	48	72	48
		288		48	72
		576		576	96
		576		288	336
				3456	3456

Dividire ich im Sinne des Enthaltenseins, so zeigt 48 an, wie oft 72 in 3456 enthalten ist; also muß 48 $\times$ 72 wieder 3456 machen.

Dividire ich im Sinne des Theilens, so ist 48 als $^1/_{72}$ von 3456 zu betrachten; also muß 72 $\times$ 48 wieder 3456 geben.

Multiplicirt man also Divisor und Quotient mit einander, so entspringt der Dividend.

Fragen und Aufgaben.

1) Was heißt addiren? 2) Wie nennt man die Zahlen, die addirt werden, und die Zahl, die sich dadurch ergibt? 3) Worin besteht die Probe für die Addition? 4) Was heißt subtrahiren? 5) Welche Namen führen die drei Zahlen, welche bei einer Subtraktion vorkommen? 6) Warum kann man den Rest auch Differenz nennen? 7) Worin besteht die Probe bei der Subtraktion? 8) Beantworte die Frage: „Was heißt multipliciren?“ auf dreifache Weise. 9) Welche vier Namen führen die drei Zahlen, welche bei einer Multiplikation vorkommen? 10) Worin besteht die Probe für die Multiplikation?

11) Was heißt dividiren? 12) Wie nennt man die Zahlen, die bei einer Division vorkommen? 13) Worin besteht die Probe bei der Division? — 14) Um eine gewisse Zahl zu erhalten, muß man 856 zu 938 legen; wie heißt sie? 15) 436 und welche zweite Zahl geben zusammen 1000? 16) Wie viel ist (5792 + 2345) × (32700—29258) getheilt durch 3875? 17) Dividire 23456789 durch 8 im Sinne des Enthaltenseins und im Sinne des Theilens! 18) Welche Zahl muß man von 37000 abziehen, damit 19864 übrig bleibt? 19) Weise nach, warum man den 16. Theil von einer Zahl auch dadurch findet, daß man sucht, wie oft 16 darin enthalten ist! 20) Die Zahl, welche um 284 größer ist als 428, ist um 545 kleiner, als welche Zahl? 21) Die Zahl, welche um 819 kleiner als 1387 ist, ist um 298 größer, als welche Zahl? 22) Von welcher Zahl ist $^1/_{876}$ = 5793? 23) Das Produkt zweier Zahlen ist 5830500; der eine Faktor heißt 6500, wie der andere? 24) 853 ist um 385 größer und um 358 kleiner, als welche zwei Zahlen? 25) 7332 ist in welcher Zahl 50632 mal enthalten? 26) Was für ein Theil ist 20800 von 113630400? 27) Die Summe der Zahlen 436, 845 und 584 ist um 698 kleiner und um 392 größer, als welche zwei Zahlen? 28) Von welcher Zahl läßt sich 9782 ohne Rest 709 mal wegnehmen? 29) Ich dividire 26144559 durch eine Zahl und erhalte 8127; welche Zahl ist es? 30) Wie heißt die Zahl, die durch 3227 getheilt, 2009 gibt? 31) 4375+6837 und welche dritte Zahl geben zusammen 15000? 32) Zu welcher Zahl gehört das Faktorenpaar 96 und 85? 33) Wie heißt das 78fache von 354? 34) Der 27te Theil von 8775 ist was für ein Theil von 3900? 35) Das 48fache von 124 ist wovon $^1/_8$? 36) Es ist gleichviel, ob man 432 durch 24 theilt, oder eine gewisse Zahl um 156 vermindert; wie heißt dieselbe? 37) Wie groß ist der Unterschied zwischen der Differenz und Summe von 7425 und 3872? 38) Das 8fache einer Zahl ist um 24 größer als 720; wie heißt dieselbe? 39) Von welcher Zahl beträgt $^1/_{22}$ so viel, als die Zahl, in welcher 184 16mal enthalten ist? 40) Das 32fache von 48 ist von welcher Zahl das 24fache? 41) Die beiden Zahlen 96 und 87 und welche dritte müssen von 730 abgezogen werden, wenn 423 als Rest bleiben soll? 42) Wie groß ist die Differenz zwischen der Summe und dem Produkte von 324 und 423? 43) Zu welcher Zahl hat man 136 gelegt, wenn das Ergebniß gleich kommt der Summe von 148 und 67? 44) Wenn man 98 mit 17 multiplicirt, so ergibt sich 175 weniger, als wenn man welche Zahl von 2000 abziehe? 45) Der 45. Theil von 3780 ist a. um 21 kleiner, als der 12. Theil von welcher Zahl? b. um 21 größer, als der 63. Theil von welcher Zahl? 46) Die Summe zweier Zahlen ist 84 und ihr Unterschied 18; wie heißen sie? 47) Das 8fache und 15fache einer Zahl beträgt 391; wie heißt dieselbe? 48) Wenn man eine Zahl um 64 vergrößert, so erhält man eben so viel, als wenn man sie mit 9 multiplicirt; wie heißt dieselbe? 49) Zerlege 252 in zwei Theile, von denen der eine 11 mal so groß ist, als der andere! 50) Von drei unkannten Zahlen betragen die beiden ersten zusammen 59, die beiden letzten 82 und die erste und letzte 73; wie heißen sie?

Vierter Cursus.

Die Rechnungsarten mit mehrfach und ungleich benannten Zahlen.

Betrachte ich die Zahl blos als eine bestimmte Menge von Eins, so ist sie eine reine oder unbenannte Zahl, wie z. B. 4, 15, 24. Wird sie aber als eine bestimmte Menge gewisser Gegenstände aufgefaßt, wobei mit der Zahl Namen von Dingen verbunden werden, so heißt sie eine benannte Zahl. Solche benannte Zahlen sind 4 fl., 15 Ellen, 24 Ctr.

Die benannten Zahlen sind entweder einfach oder mehrfach benannt. Eine einfach benannte Zahl ist die Zahl 4 fl.; mehrfach benannte Zahlen sind 4 fl. 45 kr. und 4 fl. 45 kr. 3 pf.

Haben zwei oder mehrere benannte Zahlen gleiche Benennung, wie 4 fl. und 15 fl., oder wie 48 kr., 36 kr. und 24 kr.; so sind es gleich benannte oder gleichnamige Zahlen. Im entgegengesetzten Falle sind es ungleich benannte oder ungleichnamige Zahlen, wie z. B. 4 fl. und 15 Pfd., oder auch wie 48 kr. und 4 fl.

Zwei ungleich benannte Zahlen bezeichnen entweder Dinge gleicher Art, oder Dinge verschiedener Art. Dinge gleicher Art bezeichnen die Zahlen 48 kr. und 4 fl., Dinge verschiedener Art die Zahlen 4 fl. und 5 Ctr. Ungleich benannte Zahlen, welche Dinge von einer und derselben Art bezeichnen, wie 48 kr. und 4 fl., oder wie 75 Pfd. und 5 Ctr., können in gleichbenannte verwandelt werden. 48 kr. und 4 fl. = 48 kr. und 240 kr.; 75 Pfd. und 5 Ctr. = 75 Pfd. und 500 Pfd. Eben so kann man auch zwei- oder mehrfach benannte Zahlen in einfach benannte verwandeln. 4 fl. 48 kr. = 288 kr., 5 Ctr. 75 Pfd. = 575 Pfd. In dem einen wie in dem andern Falle wird die höhere Sorte in die niedere aufgelöst. Dieses, das Auflösen der höheren Münz-, Maß- und Gewichtsorten in die niederen, Resolviren genannt, sowie umgekehrt das Zurückführen oder Reduciren der niedern Sorten auf die höheren, kommt bei dem Rechnen mit benannten Zahlen häufig vor und ist daher, bevor man zu denselben übergeht, erst recht zu üben.

I. Das Resolviren und Reduciren.

Die hier vorkommenden Aufgaben stehen zu den Aufgaben mit der angewandten Zahl in naher Verwandtschaft. Die Operationen, welche auszuführen sind, um die verlangten Resultate zu erhalten, sind nicht angezeigt, sondern müssen durch Nachdenken erst gefunden werden. Der Ausrechnung muß daher eine Auflösung vorausgehen. Je klarer und einfacher diese ist, je vollständiger sie den Grund zu den Operationen bloslegt, desto besser. Wer damit beginnt, daß er z. B. sagt: „Kreuzer werden in Pfennige verwandelt, wenn man sie durch 4 multiplicirt, und Pfennige in Kreuzer, wenn man sie durch 4 dividirt", der unterrichtet nicht einsichtlich, sondern mechanisch.

Sehr zweckmäßig ist es, wenn man die betreffenden Münzen, Maße und Gewichte, soweit es möglich ist, den Kindern vor Augen stellt, die erforderlichen Operationen in Wirklichkeit damit ausführt und das rechnerische Verfahren hieraus erkennen läßt. Ueberhaupt ist die Sache so zu behandeln, als sei sie den Schülern noch ganz fremd. Schon um der Schwachen willen. Daß bisher häufig derartige Aufgaben vorgekommen sind, wird dazu beitragen, daß das Pensum schneller bewältigt wird, darf aber nicht Anlaß sein, mit demselben es weniger genau zu nehmen.

Münzen, Maße und Gewichte.

1) Münzen.

1 Gulden = 60 Kreuzer = 240 Pfennige.
1 Kreuzer = 4 Pfennige.

2) Gewichte.

1 Ctr. = 100 Pfd. = 3200 Loth = 12800 Qt.
1 Pfd. = 32 Loth = 128 Qt.
1 Loth = 4 Qt.

3) Maße.

Die Maße sind entweder Zahlenmaße d. i. bestimmte Zahlen, oder körperliche Maße d. i. gewisse Körper, welche angewendet werden, um die Quantität mancher Gegenstände zu bestimmen. Die körperlichen Maße sind zweifacher Art: entweder werden sie an den zu messenden Gegenstand gelegt, oder der zu messende Gegenstand wird in sie gelegt. Im ersten Falle heißen sie Anlegemaße, im zweiten Hohlmaße.

Die Anlegemaße sind nach ihrer Beschaffenheit entweder Längen-, oder Flächen- oder Körpermaße. Die Hohlmaße sind theils für trockene, theils für flüssige Dinge bestimmt. Zu jenen gehört das Getreidemaß, zu diesen das Wein-, Bier-, Essigmaß 2c.

a. Die Zahlenmaße.

Das eigentliche Zahlenmaß.

1 Schock = 4 Mandel = 60 Stück.
1 Mandel = 15 Stück.

Das Papiermaß.

1 Ballen = 10 Ries = 200 Buch = 4800 Bg.
1 Ries = 20 Buch = 480 Bg.
1 Buch = 24 Bg.
1 Buch Druckpapier = 25 Bogen.

Das Zeitmaß.

1 Jahr = 12 Mon. = 52 Wch. = 365 Tg. = 8760 Std.
1 Mon. = 4 Wch. = 30 Tg. = 720 Std.
1 Wch. = 7 Tg. = 168 Std.
1 Tg. = 24 Std.

Anm. Genau genommen hat das gewöhnliche Jahr 52 Wochen und 1 Tag, das Schaltjahr 366 Tage oder 52 Wochen und 2 Tage. Auch hat nicht jeder Monat 30 Tage.

b. Die Anlegemaße.

Jetzt lernen die Schüler nur die Längenmaße und diese nur nach ihrer zwölftheiligen Eintheilung kennen. Die Flächen- und Körpermaße, sowie die zehntheilige Eintheilung kommen später vor.

1 Ruthe (°) = 12 Fuß (′) = 144 Zoll (″) = 1728 Lin. (‴)
1 Fuß = 12 Zoll = 144 Lin.
1 Zoll = 12 Lin.

c. Die Hohlmaße.

Getreidemaß.

1 Scheffel = 6 Metzen = 24 Viertel = 96 Sechszehntel.
1 Metzen = 4 Viertel = 16 „
1 Viertel = 4 „

Flüssigkeitsmaß.

1 Fuder = 12 Eimer = 768 Aichmaas.
1 Eimer = 64 Aichmaas.
= 60 Schenkmaas.

Die Zahlen, welche anzeigen, wie viel Einheiten einer niedern Sorte die nächste höhere Sorte in sich begreift, nennt man Währungs- oder Reduktionszahlen. Da z. B. 1 fl. = 60 kr., und 1 kr. = 4 pf.; so ist 60 die Währungszahl zwischen Gulden und Kreuzern und 4 die Währungszahl zwischen Kreuzern und Pfennigen. Das müssen die Schüler wissen.

Resolviren;

Verwandeln höherer Sorten in niedere.

A. Mündlich.

1) Höhere Sorten in die nächste niedere.

a. Die gegebene Zahl ist einfach benannt.

1) 12 kr., wie viel Pfennige?

Die Kreuzer sind zum Theil von Silber, die Pfennige blos von Kupfer. Das Silber ist viel seltner als das Kupfer und daher viel theurer. Darum gilt 1 kr., obgleich er kleiner ist als 1 pf., dennoch 4mal so viel als ein solcher; 1 kr. = 4 pf.

2 kr. oder 1 kr. + 1 kr. = 4 pf. + 4 pf.; 2 × 1 kr. = 2 × 4 pf.; 2 × 4 pf. = 8 pf.; 2 kr. = 2 × 4 pf. oder 8 pf.

3 kr. oder 1 kr. + 1 kr. + 1 kr. = 4 pf. + 4 pf. + 4 pf.; 3 × 1 kr. = 3 × 4 pf.; 3 × 4 pf. = 12 pf.; 3 kr. = 3 × 4 pf. oder 12 pf. u. s. w.

12 kr. sind also = 12 × 4 pf. oder 48 pf.

2) 8 Pfd., wie viel Loth?

1 ℔ = 32 Lth.

2 ℔ oder 1 ℔ + 1 ℔ = 32 Lth. + 32 Lth.; 2 × 1 ℔ = 2 × 32 Loth; 2 × 32 Loth = 64 Loth; 2 ℔ = 2 × 32 Lth. oder 64 Loth.

3 ℔ od. 1 ℔ + 1 ℔ + 1 ℔ = 32 Lth. + 32 Loth + 32 Loth; 3 × 1 ℔ = 3 × 32 Lth.; 3 × 32 Lth. = 96 Lth.; 3 ℔ = 3 × 32 Lth. od. 96 Lth.

8 ℔ = 8 × 32 Lth.; 8 × 32 Lth. = 240 + 16 oder 256 Loth.

So zuerst; dann kürzer.

3) 7 fl., wie viel Kreuzer?

Antwort: 1 fl. = 60 kr.; 7 fl = 7 × 60 kr. oder 420 kr.

4) Verwandle 18 Loth in Quint!

Antwort: 1 Loth = 4 Qt.; 18 Loth = 18 × 4 Qt. od. 72 Qt.

Anm. Kommt es vor, daß Schüler sprechen: 1 Loth = 4 Qt., 18 Loth = 4 × 18 Qt.; so ist ist dieß nicht zu dulden, denn es ist ein falscher Schluß. Die Verwechslung der Faktoren darf erst dann stattfinden, wenn die Aufgabe aufgelöst ist. 1 Loth = 4 Qt., 18 Loth = 18 × 4 Qt.; 18 × 4 Qt. = 4 × 18 Qt. oder 72 Quint.

Auf die bezeichnete Weise werden folgende Aufgaben gerechnet. Jede Nummer enthält deren zwei bis drei. Der Lehrer kann ihre Zahl nach Bedürfniß leicht vermehren.

1) Wie viel Pfennige sind 7 kr., 11, 14 kr.? 2) Wie viel Kreuzer sind 5 Gr., 11, 9 Gr.? 3) Mache zu Kreuzer: 6 fl., 4, 7 fl.! 4) Verwandle in Sechser: 3 fl., 14 fl., 12 fl.! 5) Wie viel Groschen machen 2 fl., 5 fl., 8 fl.? 6) Verwandle in Qt.: 8 Lth., 12 Lth., 25 Loth! 7) Wie viel Loth sind 3 ℔, 5 ℔, 7 ℔? 8) Drücke in Pd. aus: 7 Ctr., 11 Ctr., 15 Ctr.! 9) Verwandle in Mandel: 4 Schock, 9 Schock! 10) Wie viel Stück betragen 13 Mdl., 18 Mdl.? 11) Mache zu Ries: 3 Bll., 8, 19 Bll.! 12) Wie viel Buch sind 4 Rs., 6 Rs.,

9 Ns.? 31) Wie v. Bg. sind 2 Bch. Schreibpapier, 5 Bch., 12 Bch.? 14) Löse in Monate auf: 7 Jahre, 4 J., 15 J.! 15) Wie viel Tage sind 8 Wch.? 7 Mon.? 3 Jahre? 16) Verwandle in Wch.: 3 Jahre, 8 J.! 17) Wie viel Std. betragen 3 Tg., 5 Tg., 9 Tg.? 18) Mache zu Minuten 4 Std., 7 Std., 13 Std.! 19) Löse in Fuß auf: 4 Rth., 9 Rth., 12 Rth.! 20) Verwandle in Zoll: 5 Fß., 8 Fß., 6 Fß.! 21) Mache zu Linien: 13 Zoll, 18 Zoll, 25 Zoll! 22) Wie viel Mtz. machen 7 Schff, 11 Schff., 32 Schff.? 23) Wie viel Sz. sind 3 Mtz., 8 Mtz., 14 Mtz.? 24) Löse in Eimer auf: 2 Fdr., 5 Fdr., 13 Fdr.! 25) Verwandle in Ms.: 3 Eim., 7 Eim., 12 Eim.!

Reihen, welche von den Schülern gefertigt und eingeübt werden.

1 kr. = 4 pf.	1 Gr. = 3 kr.	1 S. = 6 kr.	1 fl. = 60 kr.
2 „ = 8 „	2 „ = 6 „	2 „ = 12 „	2 „ = 120 „
3 „ = 12 „	3 „ = 9 „	3 „ = 18 „	3 „ = 180 „
bis	bis	bis	bis
10 kr. = 40 pf.	20 Gr. = 1 fl.	10 S. = 1 fl.	10 fl. = 600 kr.

Eben so mit den Gewichtssorten und den gebräuchlichsten Maßen.

b. Die gegebene Zahl ist mehrfach benannt.

1) 7 kr. 3 pf, wie viel Pfennige?
Antwort: 7 kr. = 7 × 4 oder 28 pf., 28 pf. + 3 pf. = 31 pf.

2) 4 fl. 56 kr., wie viel Kreuzer?
Antwort: 4 fl. = 4 × 60 oder 240 kr, 240 kr. + 56 kr. = 296 kr. — Oder: 4 fl. 56 kr. = 5 fl. — 4 kr.; 5 fl. = 5 × 60 kr. oder 300 kr., 300 kr. — 4 kr. = 296 kr.

Aufgaben.

1) 5 kr. 2 pf. =?	4) 2 fl. 36 kr. =	7) 6 Lth. 1 Qt. =	10) 2 ℔ 12 Lth.
2) 8 kr. 3 pf. =?	5) 8 fl. 43 kr. =	8) 9 Lth. 3 Qt. =	11) 3 ℔ 25 Lth.
3) 12 kr. 1 pf. =?	6) 6 fl. 54 kr. =	9) 16 Lth. 2 Qt. =	12) 5 ℔ 28 Lth.
13) 4 Ctr. 84 ℔ =	16) 3 Bll. 5 Ns. =	19) 4 Ns. 3 Bch. =	22) 2 Bch. 18 B.
14) 9 Ctr. 48 ℔ =	17) 7 Bll. 8 Ns. =	20) 6 Ns. 7 Bch. =	23) 5 Bch 12 B.
15) 6 Ctr. 75 ℔ =	18) 9 Bll. 1 Ns. =	21) 5 Ns. 2 Bch. =	24) 8 Bch. 20 B.
25) 3 J. 7 Mon. =	28) 5 M. 17 Tg. =	31) 4° 8′	34) 3 Schff. 4 Mtz.
26) 8 J. 5 Mon. =	29) 7 M. 23 Tg. =	32) 7′ 5″	35) 8 Schff. 3 Mtz.
27) 6 J. 9 Mon. =	30) 9 M. 11 Tg. =	33) 8″ 9‴	36) 12 Schff. 5 Mtz.

37) 5 Mtz. 3 Vrtl. =	39) 3 Fdr. 8 E. =	41) 2 E. 30 Ms.
38) 7 Vrtl. 2 Sz. =	40) 8 Fdr. 7 E. =	42) 5 E. 48 Ms.

2) Höhere Sorten in entfernte niedere.

a. Die gegebene Zahl ist einfach benannt.

Beispiel: Verwandle 3 fl. in Pfennige!

Antwort: 1 fl. = 60 kr., 3 fl. = 180 kr.; 1 kr. = 4 pf.; 180 kr. = 180 × 4 pf.; 180 × 4 oder 4 × 180 pf. = 720 pf.

b. Die gegebene Zahl ist mehrfach benannt.

Beispiel: Löse 5 Schff. 2 Mtz. in Viertel auf!

Antwort: 5 Schff. 2 Mtz. = 5 × 6 + 2 oder 32 Mtz.; 1 Mtz. = 4 Vrtl., 32 Mtz. = 32 × 4 Vrtl.; 32 × 4 od. 4 × 32 Vrtl. = 128 Vrtl.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 24 Pfund, wie viel Loth?

Auflösung.

1 ℔ = 32 Lth.; 24 ℔ = 24 × 32 Lth.

Ausrechnung:

a.	b.	
32 Loth.	24 ℔	24 mal
24	32	32 Lth. = 32 × 24 Lth.
128	48	
64	72	
768 Loth.	768 Loth.	

Die Ausrechnung unter a ist ganz der Auflösung gemäß. Nicht so die unter b. Hier wird die gegebene Zahl durch die Reduktionszahl multiplicirt. Die Rechnung steht gerade so, wie wenn 32 × 24 ℔ zu rechnen ist. Wie leitet man nun die Kinder an, daß sie dessen ungeachtet das Produkt als Loth ansehen? Sie schreiben zuerst 24 ℔. Dann sprechen sie: „1 ℔ = 32 Loth", setzen zugleich die Zahl 32 darunter und fahren fort: „24 ℔ = 24 × 32 Lth. oder 32 × 24 Lth." So verwandeln sich in ihrer Vorstellung die 24 ℔ in 32 × 24 Loth, und dem zufolge erscheint ihnen dann auch das Produkt als Loth.

Beispiel 2. Verwandle 17 fl. 54 kr. 3 pf. in Pfennige!

Ausrechnung.

Zuerst:	Dann:
17 fl. 54 kr. 3 pf. = ? pf.	17 fl. 54 kr. 3 pf. = ? pf.
60	60
1020 kr.	1074 kr.
+ 54	4
1074 kr.	4299 pf.
4	
4296 pf.	
+ 3	
4299 pf.	

Aufg. z. Zifferr., 18. Uebung.

Reduciren,

Zurückführen niederer Sorten auf höhere.

A. Mündlich.

1) Niedere Sorten auf die nächste höhere.

a. Das Resultat ist einfach benannt.

Beispiel: Wie viel Kreuzer machen 72 Pfennige?

Aufl.: 4 pf. = 1 kr. Nehme ich daher von 72 pf. 4 pf. weg, so geben diese 1 kr.; nehme ich vom Reste wieder 4 pf. weg, so geben diese wieder 1 kr. u. s. f. So oft ich also 4 pf. von 72 pf. wegnehmen kann, so vielmal 1 kr. gibt's. 4 pf. können aber von 72 pf. so oft weggenommen werden, als 4 pf. in 72 pf. enthalten sind. 4 pf. sind in 72 pf. 18mal enthalten. Also machen 72 pf. 18×1 kr. od. 18 kr.

Kürzer: 4 pf. = 1 kr.; so oft also 4 pf. in 72 pf. enthalten sind, so viel Kreuzer betragen diese. 4 pf. sind in 72 pf. 18mal enthalten; also sind 72 pf. = 18 kr.

b. Das Resultat ist mehrfach benannt.

Beispiel: 100 Stück, wie viel Dutzend?

Aufl.: 12 Stück = 1 Dutzend; so oft also 12 Stck. in 100 Stck. enthalten sind, so viel Dutzend machen diese. 12 Stück sind in 100 Stck. 8mal enthalten und 4 Stück bleiben übrig; also sind 100 Stück = 8 Dutzend und 4 Stück.

Kürzer: 100 Stück = 96 St. + 4 St. = 8 Dutzend und 4 Stück.

Anm. Es ist nicht selten, daß Schüler beim Verwandeln einer niederen Sorte in eine höhere mit der höheren Sorte anfangen, und umgekehrt. Das ist nicht zu gestatten. Die Auflösung hat stets mit der gegebenen Sorte zu beginnen. Sind z. B. Gulden in Kreuzer aufzulösen, so heißt der erste Satz: 1 fl. = 60 kr.; sind aber Kreuzer auf Gulden zurück zu führen, so heißt derselbe: 60 kr. = 1 fl.

Aufgaben.

Dieselben sind bei jeder Nummer nach Bedürfniß zu vermehren.

1) Verwandle in Kreuzer 20 pf., 32 pf., 48 pf! 2) Eben so 9 pf., 25 pf., 34 pf.! 3) Mache zu Gulden 30 Sechser, 70, 120 Sechser! 4) Eben so 18 S., 30, 53, 84 S.! 5) Wie viel Gulden sind 40 Gr., 60, 90 Gr.? 6) Eben so 32 Gr., 48, 75 Gr.? 7) Wie viel Gulden machen 180 kr., 300, 540 kr.? 8) Deßgleichen 112, 204, 268 kr.? 9) Verwandle in Loth 16 Qt., 28, 44 Qt! 10) Eben so 11, 26, 31 Qt.! 11) Wie viel Pfd. betragen 64 Lth., 96, 75 Loth? 12) Mache zu Ctr. 700 ℔, 425, 860 ℔! 13) Verwandle in Schock 240 Stck., 420, 165 Stck.! 14) Wie viel Buch geben 48 Bg., 72, 90 Bg.? 15) Wie viel Rs. machen 60 Bch., 100, 84 Bch.? 16) Wie viel Bll. betragen 50 Rs., 90, 112 Rs.? 17) Mache zu Jahren 36 Mon. 60, 96 M.? 18) Eben so 30, 52, 80 Mon.? 19) Verwandle in Monate 60 Tg., 150, 270 Tg.? 20) Verwandle a. 48 Lin.

in Zoll! b. 72 Zoll in Fuß! c. 90 Fß. in Rth.! **21)** Mache zu Schff. 18 Mtz., 42, 90 Mtz.! **22)** Deßgleichen 21 Mtz., 35 Mtz., 50 Mtz! **23)** Wie viel Mtz. sind 48 Sz., 64, 85 Sz.? **24)** Wie viel Fdr. betragen 48 Eim., 72, 96 Eim.? **25)** Deßgleichen 20 Eim., 33, 57 Eimer?

2) Niedere Sorten auf entfernte höhere.

a. Das Resultat ist einfach benannt.

Beispiel: 480 pf., wie viel Gulden?

Ausr. Zuerst verwandle ich die Pfennige in Kreuzer. 480 pf. sind so viel Kreuzer, als 4 pf. darin enthalten sind. 4 pf. sind in 480 pf. 120mal enthalten. Also sind 480 pf. = 120 kr. Diese mache ich nun zu fl. 120 kr. = 2 fl. Mithin sind 480 fl. = 2 fl.

Man verwandelt also die gegebene niedere Sorte zuerst in die nächste höhere Sorte und diese dann wieder in die nächste höhere.

b. Das Resultat ist mehrfach benannt.

Beispiel: 345 pf. sind wie viel Gulden, Kreuzer und Pfg.?

Ausr. 345 pf. = 320 pf. + 25 pf. = 80 kr. + 6 kr. 1 pf. oder 86 kr. 1 pf.; 86 kr. = 1 fl. 26 kr.; also sind 345 pf. = 1 fl. 26 kr. 1 pf.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. Verwandle 1524 Loth in Pfund!

Auflösung.

32 Loth = 1 Pfd.; 1524 Loth sind also so vielmal 1 Pfd., als 32 Lth. darin enthalten sind.

Ausrechnung.

a.

32 Lth. | 1 5 2 4 Lth. | 47×1 ℔. = 47 ℔.
1 2 8
2 4 4
2 2 4
2 0 Loth

b.

3 2 | 1 5 2 4 | 4 7 ℔.
1 2 8
2 4 4
2 2 4
2 0 Lth.

Beispiel 2. Wie viel Gulden, Kr. u. Pfg. sind 1539 pf.?

Ausrechnung.

4 | 1 5 3 9 | (60) 3 8 4 | 6 fl.
1 2 | 3 6 0
3 3 | 2 4 kr.
3 2
1 9
1 6
3 pf.

Aufg. z. Zifferr., 19. Uebung.

II. Addiren.

A. Mündlich.

Die Kinder beim mündlichen Rechnen mit großen Zahlen zu quälen, ist zwecklos. Der bei weitem größere Theil der Rechenaufgaben, welche das bürgerliche Leben gibt, bewegt sich in dem Zahlenraume von 1 bis 100. Auch liegt das formal Bildende der arithmetischen Aufgaben nicht in der Größe der dabei angewandten Zahlen, sondern in der Art und Weise, wie dieselben mit einander verbunden und eingekleidet sind. Das Rechnen mit sehr großen Zahlen hat darum in der Volksschule nach beiden Seiten hin einen sehr beschränkten Werth.

Zugleich wollen wir hier bemerken, daß der Lehrer beim mündlichen Rechnen sich nicht passiv verhalten dürfe, sondern mitrechnen müsse. Wir halten daher auch nicht für nöthig, den Aufgaben für das mündliche Rechnen die Facite beizufügen.

Beispiel 1. 48 kr. + 37 kr. =?

a. 48 kr. + 37 kr. = 85 kr. = 1 fl. 25 kr.
b. 48 kr. + 37 kr. = 48 kr. + 12 kr. + 25 kr. = 1 fl. 25 kr.

Aufgaben.

57 kr. + 29 kr.	85 Pfd. + 68 Pfd.	54 Ms. + 48 Ms.
46 kr. + 52 kr.	72 Pfd. + 49 Pfd.	38 Ms. + 56 Ms.
35 kr. + 43 kr.	28 Loth + 25 Loth	42 Ms. + 29 Ms.
28 kr. + 54 kr.	24 Loth + 18 Loth	61 Ms. + 43 Ms.

Beispiel 2. 18 fl. 36 kr. + 6 fl. =?

Ausr. Zu 18 fl. 36 kr. sind 6 fl. zu zählen. Ich lege die Gulden zu den Gulden, die 6 fl. also zu den 18 fl.; 18 fl. 36 kr. + 6 fl. = 24 fl. 36 kr.

Aufgaben.

25 fl. 51 kr. + 13 fl. =?	14 kr. + 15 kr. 3 pf. =?
32 Pfd. 25 Lth + 16 Pfd. =?	72 fl. + 24 fl. 37 kr. =?
41 kr. 3 pf. + 18 kr. =?	16 Lth. + 12 Lth. 1 Qt. =?
28 Loth 2 Qt. + 24 Loth =?	40 Pfd. + 35 Pfd. 24 Loth =?

Beispiel 3. 3 fl. 52 kr. + 45 kr. =?

a. 52 kr. + 45 kr. = 1 fl. 37 kr.; 3 fl. + 1 fl. 37 kr. = 4 fl. 37 kr.
b. 3 fl. 52 kr. + 8 kr. = 4 fl., dazu 37 kr. = 4 fl. 37 kr.

Aufgaben.

5 fl. 45 kr. + 27 kr.	9 Ctr. 88 ℔ + 64 ℔	3 J. 7 Mon. + 8 M.
18 fl. 36 kr. + 48 kr.	7 ℔ 27 Loth + 18 Lth.	4 Fdr. 9 E. + 7 E.
32 fl. 58 kr. + 15 kr.	8 Schff. 5 Mtz. + 4 Mtz.	6 Rth. 8 Fß. + 9 Fß.
46 fl. 29 kr. + 51 kr.	10 Mon. 16 Tg. + 25 Tg.	10 Rs. 17 Bch. + 12 Bch.

Beispiel 4. 8 fl. 37 kr. + 9 fl. 40 kr. =?

a. 8 fl. 37 kr. + 9 fl. = 17 fl. 37 kr.; 17 fl. 37 kr. + 40 kr. = 17 fl. 77 kr. = 18 fl. 17 kr.

b. 8 fl. + 9 fl. = 17 fl.; 37 kr. + 40 kr. = 1 fl. 17 kr.; 17 fl. + 1 fl. 17 kr. = 18 fl. 17 kr.

Aufgaben.

13 fl. 30 kr. + 15 fl. 54 kr.	4 Mon. 18 Tg. + 9 Mon. 24 Tg.
18 Pfd. 25 Lth. + 20 Pfd. 15 Lth.	7 Jahr 9 M. + 8 Jahr 10 M.
52 kr. 3 pf. + 27 kr. 2 pf.	2 Eim. 42 Ms. + 5 Eim. 28 Ms.
16 Schff. 5 Mtz. + 18 Schff. 4 Mtz.	9 Rth. 8 Fß. + 7 Rth. 11 Fß.

B. Schriftlich.

8 fl. 36 kr. 3 pf. + 7 fl. 54 kr. 2 pf. + 13 fl. 45 kr. + 24 fl. 24 kr. 2 pf. = ?

Die Aufgabe wird so, wie sie hier steht, an die Wandtafel geschrieben. Dann wird gefragt: Wie geordnet werden die Zahlen am leichtesten addirt? (Unter einander gesetzt.) Wie setzt man z. B. die Zahlen 384 und 736 unter einander? (Die Einer unter die Einer ꝛc.) Allgemein: man setzt die gleichnamigen Stellen unter einander. Wie wird man nun die hier stehenden Posten, welche Gulden, Kreuzer und Pfennige betragen, unter einander schreiben müssen, um sie bequem zusammenzählen zu können? (Gulden unter Gulden, Kreuzer unter Kreuzer und Pfennige unter Pfennige.) Thun wir es!

```
 8 fl. 36 kr. 3 pf.          60 | 160 | 2 fl.
 7  „  54  „  2  „                120
13  „  45  „  —  „              ─────
24  „  24  „  2  „                 40 kr.
──────────────────
54 fl. 40 kr. 3 pf.
```

Wo kann man anfangen zu addiren? (Bei den Gulden, oder auch bei den Pfennigen.) Thut Beiderlei! — Welches Verfahren ist das bessere?

Man addirt zuerst die Zahlen der niedersten Sorte und verwandelt ihre Summe in die nächste höhere. Bleibt hiebei ein Rest, so schreibt man ihn unter die addirte Reihe; die erhaltene Zahl der höhern Sorte aber addirt man zu der höhern Sorte u. s. f.

Aufg. z. Zifferr., 20. u. 21. Uebung.

III. Subtrahiren.

A. Mündlich.

Beispiel 1. 1 fl. — 32 kr. = ?

Ausr. 1 fl. = 60 kr.; 60 kr. — 32 kr. = 28 kr.; 1 fl. — 32 kr. = 28 kr.

Aufgaben.

1 fl. — 30, 18, 45 ꝛc. kr.	1 Thlr. — 12, 23, 18 ꝛc Gr.
1 Pfd. — 13, 27, 20 ꝛc. Lth.	1 Eim. — 36, 51 15 ꝛc. Ms.
1 Ctr. — 48, 64, 72 ꝛc. Pfd.	1 Jahr — 26, 38, 17 ꝛc. Wch.

Ist bis zur größten Fertigkeit zu üben.

Beispiel 2. 8 fl. — 25 kr. =?

Ausr. 8 fl. = 7 fl. + 1 fl. = 7 fl. 60 kr.; 7 fl. 60 kr. — 25 kr. = 7 fl. 35 kr.

Aufgaben.

12 fl. — 21 kr.	7 kr. — 3 pf.	3 Mon. — 14 Tag
25 Pfd. — 30 Lth.	13 Lth. — 2 Qt.	5 Rth. — 7 Fß.
4 Ctr. — 84 Pfd.	9 Thlr. — 17 Gr.	4 Dutz. — 10 Stück.

Beispiel 3. 27 fl. 18 kr. — 19 fl. =?

Ausr. Von 27 fl. 18 kr. sind 19 fl. wegzunehmen. Die Gulden nimmt man von den Gulden, die 19 fl. also von den 27 fl.; 27 fl. 18 kr. — 19 fl. = 8 fl. 18 kr.

Aufgaben.

36 fl. 21 kr. — 24 fl. =?	15 fl. 30 kr. — 27 kr. =?
75 Pfd. 27 Lth. — 48 Pfd. =?	23 Pfd. 31 Lth. — 14 Lth. =?
42 Eim. 50 Ms. — 16 Eim. =?	12 Ctr. 64 Pfd. — 45 Pfd. =?
81 Thlr. 25 Gr. — 52 Thlr. =?	27 Thlr. 26 Gr. — 18 Gr. =?

Beispiel 4. 5 fl. — 2 fl. 36 kr. =?

Ausr. Von 5 fl. sind 2 fl. 36 kr. abzuziehen. Zuerst nehme ich die 2 fl. weg, hernach die 36 kr. 5 fl. — 2 = 3 fl.; 3 fl. — 36 kr. = 2 fl. 24 kr.

Aufgaben.

9 Ctr. — 4 Ctr. 32 Pfd.	30 fl. — 16 fl. 45 kr.
12 Pfd. — 5 Pfd. 14 Lth.	48 kr. — 32 kr. 1 pf.
25 Lth. — 18 Lth. 2 Qt.	20 Schff. — 13 Schff. 4 Mtz.

Beispiel 5. 7 fl. 24 kr. — 36 kr. =?

Ausrechnung.

a. Um 36 kr. von 7 fl. 24 kr. abzuziehen, so nehme ich zuerst 24 kr. weg und dann 12 kr. Ich rechne: 7 fl. 24 kr. — 24 kr. = 7 fl., und 7 fl. — 12 kr. = 6 fl. 48 kr.

b. Ich ziehe die 36 kr. von den 7 fl. ab. 7 fl. — 36 kr. = 6 fl. 24 kr.; von 7 fl. 24 kr. habe ich also noch 6 fl. 24 kr. + 24 kr. oder 6 fl. 48 kr. Kürzer: 7 fl. 24 kr. — 36 kr. = 6 fl. 24 kr. + 24 kr. = 6 fl. 48 kr.

c. Ich löse von den 7 fl. einen in Kreuzer auf. 7 fl. 24 kr. = 6 fl. 84 kr.; 6 fl. 84 kr. — 36 kr. = 6 fl. 48 kr.

Aufgaben.

18 kr. 1 pf. — 3 pf.	2 Ctr. 25 Pfd. — 84 Pfd.
12 fl. 32 kr. — 54 kr.	5 Thlr. 8 Gr. — 24 Gr.
10 Pfd. 16 Lth. — 28 Lth.	6 Schff. 3 Mtz. — 5 Mtz.

Beispiel 6. 8 fl. 30 kr. — 5 fl. 18 kr. =?

Ausrechnung.

a. Ich ziehe zuerst die 5 fl. ab und hernach die 18 kr. Also: 8 fl. 30 kr. — 5 fl. = 3 fl. 30 kr., u. 3 fl. 30 kr. — 18 kr. = 3 fl. 12 kr.

b. 5 fl. von 8 fl. bleiben 3 fl., und 18 kr. von 30 kr. bleiben 12 kr.; also sind 8 fl. 30 kr. — 5 fl. 18 kr. = 3 fl. 12 kr.

Aufgaben.

12 fl. 36 kr. — 7 fl. 24 kr.	40 Jahre 11 Mon. — 32 J. 7 M.
13 Pfd. 27 Lth. — 9 Pfd. 13 Lth.	18 Ctr. 75 Pfd. — 7 Ctr. 50 Pfd.
25 Eim. 40 Ms. — 16 E. 25 Ms.	24 Rth. 10 Fß — 19 Rth. 8 Fß.

Beispiel 7. 8 fl. 30 kr. — 4 fl. 42 kr. = ?

Ausr. 8 fl. 30 kr. — 4 fl. = 4 fl. 30 kr.; 4 fl. 30 kr. — 42 kr. = 3 fl. 48 kr.

Aufgaben.

13 kr. 1 pf. — 6 kr. 2 pf.	30 fl. 12 kr. — 12 fl. 40 kr.
15 Lth. 2 Qt. — 8 Lth. 3 Qt.	10 Mon. 18 Tg. — 4 M. 50 Tg.
18 Schff. 3 Mtz. — 9 Schff. 5 Mtz.	12 Thlr. 10 Gr. — 7 Thlr. 24 Gr.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. 75 fl 48 kr. 3 pf. — 58 fl. 32 kr. 2 pf. = ?

Ausrechnung:

75 fl.	48 kr.	3 pf.	Vollzahl
58 fl.	32 kr.	2 pf.	Abzug
17 fl.	16 kr.	1 pf.	Rest.

Wie beim schriftlichen Addiren, so wird auch hier bei der niedrigsten Sorte angefangen. Man zieht also 2 pf. von 3 pf., 32 kr. von 48 kr. und 58 fl. von 75 fl. ab.

Beispiel 2. 348 fl. 24 kr. 1 pf. — 195 fl. 45 kr. 3 pf. = ?

	83	5
	60	4
348. fl.	24. kr.	1 pf.
195 fl.	45 kr.	3 pf.
152 fl.	38 kr.	2 pf.

Erklär. 3 pf. von 1 pf. geht nicht; ich borge daher 1 kr.; 1 kr. = 4 pf., 4 pf. + 1 pf. = 5 pf. Anstatt 24 kr. 1 pf. steht jetzt 23 kr. 5 pf., was eben so viel ist. Nun ziehe ich die 3 pf. ab; 3 pf. von 5 pf. bleiben 2 pf.

45 kr. von 23 kr. geht wieder nicht; ich borge daher 1 fl.; 1 fl. = 60 kr.; 60 kr. + 23 kr. = 83 kr. Anstatt 348 fl. 23 kr. steht jetzt 347 fl. 83 kr. Davon ziehe ich nun 195 fl. 45 kr. ab.

So zuerst. Dann werden dieselben Aufgaben (II. 23) auf folgende Weise gerechnet:

3 pf. von 1 pf. geht nicht; ich borge 1 kr.; 1 kr. = 4 pf.; 3 pf. von 4 pf. bleibt 1 pf.; 1 pf. + 1 pf. = 2 pf.

45 kr. von 23 kr. geht nicht; ich borge 1 fl.; 1 fl. = 60 kr.; 45 kr. von 60 kr. bleiben 15 kr.; 15 kr. + 23 kr. = 38 kr.

Beispiel 3. 42 fl. — 18 fl. 48 kr. 3 pf. =?

Ausrechnung.

	59	4
42. fl.	— kr.	— pf.
18 fl.	48 kr.	3 pf.
23 fl.	11 kr.	1 pf.

Erklär. Von 42 fl. sollen außer den 18 fl. auch noch 48 kr. und 3 pf. weggenommen werden. Pfennige kann man aber nur von Pfennigen nehmen und Kreuzer nur von Kreuzern. Um daher die 48 kr. und 3 pf. wegnehmen zu können, so müssen wir von den 42 fl. einen Gulden zu Kreuzern und von den 60 kr., die wir dadurch erhalten, 1 kr. zu Pfennigen machen. Anstatt 42 fl. haben wir jetzt 41 fl. 59 kr. 4 pf., was eben so viel ist. Davon ziehen wir nun 18 fl. 48 kr. 3 pf. ab.

Die Probe besteht auch hier wieder darin, daß man den Rest und den Abzug zusammenzählt.

Aufg. z. Zifferr., 22. und 23. Uebung.

Additions- und Subtraktionsaufgaben

mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich.

1) Ein Arbeiter verdient sich wöchentlich 1 Krthlr. und 1 Vereinsthlr.; wie viel Gulden also? 2) Davon gab er für Zehrung 2 fl. 54 kr. aus; wie viel blieb ihm übrig? 3) Von 20 Ctr. Hopfen werden 8 Ctr. 65 Pfd. verkauft; wie viel bleibt? 4) 2 Kisten wiegen zusammen 1 Ctr. 40 Pfd.; die eine wiegt 75 Pfd., wie viel die andere? 5) Jemand hat sich 15 fl. eingesteckt. Er kauft Einiges und gibt dafür aus 4 fl. 45 kr. und 7 fl. 24 kr.; wie viel Geld behält er? 6) Ein Schmalzfaß wiegt leer 3 Pfd. 28 Loth, gefüllt 18 Pfd. 14 Loth; wie viel ist Schmalz darin? 7) Ein Weinhändler mischt unter 8 Eim. 40 Ms. Wein 5 Eim. 48 Ms. von einer andern Sorte; wie viel beträgt die Mischung? 8) Davon verkauft er 9 Eim. 36 Ms.; wie viel bleibt? 9) Hermann ist 11 J. 5 Mon. alt; August ist 3 J. 8 Mon. älter; wie alt ist dieser? 10) Ein Getreidhändler hat einen Vorrath von 50 Schff. 4 Mtz.; er erhält dazu noch 21 Schff. 3 Mtz. und verkauft dann 60 Schff.; wie viel behält er? 11) Ein Landmann erntet 34 Schober 42 Garben Roggen und 87 Schober 38 Garben Weizen; wie viel zusammen?

Eine passende Stelle finden hier auch gewisse Fälle aus der Gewinn- und Verlust-Berechnung. Wir geben für jeden besondern Fall immer nur eine Aufgabe und stellen es dem Lehrer anheim, zu jedem Beispiele noch einige Aufgaben selbst zu bilden.

Aufgabe 1. Ein Handelsmann kauft die Elle um 2 fl. 42 kr. und verkauft sie wieder um 3 fl. 15 kr.; wie viel nimmt er Gewinn? Antw. 33 kr.

Auflösung: Er kauft die Elle um 2 fl. 42 kr. Verkauft er sie wieder um 2 fl. 42 kr., so hat er keinen Gewinn. Verkauft er sie um 2 fl. 43 kr. d. i. um 2 fl. 42 kr. + 1 kr., so hat er 1 kr. Gewinn. Verkauft er sie um 2 fl. 44 kr. d. i. um 2 fl. 42 kr. + 2 kr., so hat er 2 kr. Gewinn. So viel er also für die Elle mehr löst, als was sie ihn gekostet hat, so viel hat er Gewinn. Gekostet hat ihn die Elle 2 fl. 42 kr.; sein Erlös dafür ist 3 fl. 15 kr.; er gewinnt daher so viel, als 3 fl. 15 kr. mehr ist, denn 2 fl. 42 kr. Wie finde ich das? Erstens: Ich sehe zu, wie viel zu 2 fl. 42 kr. noch zu legen ist, um 3 fl. 15 kr. zu erhalten. Zweitens: Ich ziehe 2 fl. 42 kr. von 3 fl. 15 kr. ab. Ausführung!

Aufgabe 2. A kauft den Eimer Wein um 8 fl. 24 kr. und verkauft ihn wieder um 7 fl. 30 kr.; wie viel hat er Verlust? Antw. 54 kr.

Diese Aufgabe ist der vorigen entgegengesetzt, wird aber in derselben Weise aufgelöst.

Aufgabe 3. Ich kaufe 1 Klafter Holz um 11 fl. 48 kr. und verkaufe sie wieder mit 2 fl. 21 kr. Gewinn; wie theuer habe ich sie verkauft? Antw. Um 14 fl. 9 kr.

Auflös.: Kaufe ich 1 Klafter Holz um 11 fl. 48 kr. und verkaufe sie ohne Gewinn und ohne Verlust wieder, so löse ich dafür 11 fl. 48 kr. Verkaufe ich sie mit 1 kr. Gewinn, so löse ich 11 fl. 48 kr. + 1 kr.; verkaufe ich sie mit 2 kr. Gewinn, so löse ich 11 fl. 48 kr. + 2 kr. Ich verkaufe sie aber mit 2 fl. 21 kr. Gewinn; also löse ich 11 fl. 48 kr. + 2 fl. 21 kr. Ausrechnung!

Aufgabe 4. A kauft einen Acker um 250 fl. und verkauft ihn wieder mit 28 fl. 45 kr. Verlust; wie theuer hat er ihn verkauft? Antwort: Um 221 fl. 15 kr.

Aufgabe 5. Ich kaufe ein seltenes Buch und verkaufe es mit 4 fl. 42 kr. Gewinn um 8 fl. 18 kr. wieder; wie viel hat es mich gekostet?

Auflösung: Man gewinnt, wenn man eine Sache höher verkauft, als man sie eingekauft hat. Da ich an dem Buche 4 fl. 42 kr. gewinne; so habe ich es um 4 fl. 42 kr. höher verkauft, als was es mich gekostet hat, oder ich habe es um 4 fl. 42 kr. billiger eingekauft, als verkauft. Das Buch hat mich also 4 fl. 42 kr. weniger, als 8 fl. 18 kr. gekostet. 8 fl. 18 kr. — 4 fl. 42 kr. = 3 fl. 36 kr.

Aufgabe 6. A kauft 1 Ctr. Waare und verkauft denselben mit 12 fl. 30 kr. Verlust um 55 fl. 45 kr. wieder; wie theuer hat er ihn eingekauft? Antw. Um 68 fl. 15 kr.

B. Schriftlich.

Siehe Aufg. z. Zifferr., 24. Uebung.

IV. Multipliciren.

A. Mündlich.

Es ist eine Forderung, welche das Leben an die Schule stellt, daß der Schüler in den Stand gesetzt werde, jede nicht zu große Anzahl der verschiedenen Sorten Münzen, Maße und Gewichte durch ganze Zahlen nicht nur schriftlich, sondern auch mündlich leicht und fertig zu multipliciren. Letzteres ist jedoch nur mittelst einiger Abkürzungen oder Vortheile zu erzielen. Den größten Vortheil, welcher zugleich Grundlage aller andern ist, bietet das Reduciren der gegebenen niederen Sorte in Theile der nächst höheren. In Folge dessen werden zwar, noch bevor die Lehre von den Brüchen an die Reihe gekommen, Brüche multiplicirt. Dergleichen Vorausnahmen mögen indeß in der Volksschule, die es nicht mit wissenschaftlicher, sondern mit praktischer Bildung für das Leben zu thun hat, wohl gestattet sein. Außerdem daß sie einem besonderen Zwecke dienen, haben sie auch noch das Gute, daß sie auf die folgenden Lehren hinweisen und sie anbahnen, zur lebendigen Thätigkeit anregen und zum Denken spornen.

a. Der Multiplikand eine einfach benannte Zahl.

1) Das Reduciren.

60 kr. = 1 fl.;	10 kr. = $^1/_6$ fl.;
30 kr. = $^1/_2$ fl.;	5 kr. = $^1/_{12}$ fl.;
15 kr. = $^1/_4$ fl.;	12 kr. = $^1/_5$ fl.;
$7^1/_2$ kr. = $^1/_8$ fl.;	6 kr. = 1 Sechser;
20 kr. = $^1/_3$ fl.;	3 kr. = 1 Groschen.
100 Pfund = 1 Ctr.;	32 Loth = 1 Pfd.;
50 Pfund = $^1/_2$ Ctr.;	16 Loth = $^1/_2$ Pfd.;
25 Pfund = $^1/_4$ Ctr.;	8 Loth = $^1/_4$ Pfd.;
20 Pfund = $^1/_5$ Ctr.;	4 Quint = 1 Loth;
10 Pfund = $^1/_{10}$ Ctr.;	2 Quint = $^1/_2$ Loth;
64 Maas = 1 Eimer;	24 Bg. = 1 Bch.;
32 Maas = $^1/_2$ Eimer;	12 Bg. = $^1/_2$ Bch.;
16 Maas = $^1/_4$ Eimer;	6 Bg. = $^1/_4$ Bch.;

Vorstehendes ist mit den Schülern ausführlich durchzusprechen. Etwa so: 60 kr. = 1 fl. Theilt man 60 kr. in 2 gleiche Theile, so erhält man 30 kr. + 30 kr.; 30 kr. sind daher $^1/_2$ fl. — Theilt man sowohl die einen als die andern 30 kr. wieder in 2 gleiche Theile, so entstehen aus den 2 × 30 kr. 4 × 15 kr.; der Gulden ist jetzt in 4 gleiche Theile getheilt; 15 kr. sind daher $^1/_4$ fl. — Theilt man jede 15 kr. wieder in 2 gleiche Theile, so kommen auf den Theil $7^1/_2$ kr.; aus den 4 × 15 kr. werden 8 × $7^1/_2$ kr.; der Gulden ist also nun in 8 gleiche Theile zerlegt; daher sind $7^1/_2$ kr. = $^1/_8$ fl. rc.

Sind in dieser Weise alle hier oben bezeichneten Sätze durchgeführt und am Ende durch wiederholtes Abfragen dem Gedächtnisse fest eingeprägt; so geht man zum Multipliciren über. Es wird hierbei wieder eben dieselbe Ordnung, wie oben, eingehalten, überall jedoch

so lange verweilt, bis sich die Schüler die rechte Sicherheit und Fertigkeit erworben haben. Das nachstehende Beispiel soll zeigen, wie zu verfahren ist.

36 × 30 kr. = ?

Weitläufig: 36 × 30 kr. = 30 × 30 kr. + 6 × 30 kr.; 30 × 30 kr. = 900 kr.; 6 × 30 kr. = 180 kr.; 900 kr. + 180 kr. = 1080 kr. Diese mache ich zu Gulden. 1080 kr. = 600 kr. + 480 kr.; 600 kr. = 10 fl.; 480 kr. = 8 fl.; 10 fl. + 8 fl. = 18 fl. Also ꝛc.

Abgekürzt: 30 kr. = $^1/_2$ fl., 2 × 30 kr. = 2 × $^1/_2$ fl.; 3 × 30 kr. = 3 × $^1/_2$ fl.; also sind 36 × 30 kr. = 36 × $^1/_2$ fl. oder 36 halbe Gulden; 36 halbe Gulden = 18 ganze Gulden. Also ꝛc.

Wie rechnet man demnach 36×30 kr. am leichtesten und schnellsten? Wie thun wir daher immer, wenn wir 30 kr. zu multipliciren haben? (Wir betrachten 30 kr. immer als $^1/_2$ fl.)

Wie rechnest du nun

12 × 30 kr.?	24 × 30 kr.?	11 × 30 kr.?	56 × 30 kr.?
18 × 30 kr.?	42 × 30 kr.?	25 × 30 kr.?	75 × 30 kr.?

So fort, bis der Schüler denkt und spricht: 28 × 30 kr. = 14 fl., 32 × 30 kr. = 16 fl. ꝛc. Auch zur Selbstbeschäftigung erhalten die Schüler solche Aufgaben. Man diktirt ihnen dergleichen und leitet sie an, die Ausrechnung mit Ziffern, übrigens aber ganz so wie mündlich, auszuführen. Z. B.

16 × 30 kr. = 16 × $^1/_2$ fl. = $^{16}/_2$ fl. = 8 fl.
52 × 30 kr. = 52 × $^1/_2$ fl. = $^{52}/_2$ fl. = 26 fl.

Wie mit dem halben Gulden, so geschieht auch mit dem Viertel-, Achtel-, Drittel-Gulden u. s. f. Von Zeit zu Zeit gibt man Aufgaben zur Wiederholung. Wie viel ist 24×30 kr.? 24×15 kr.? 24 × 7$^1/_2$ kr.? 24 × 20 kr.? ꝛc.

2) Das Zerlegen.

3 kr. = 1 Groschen.	13 kr. = $^1/_5$ fl. + 1 kr.
4 kr. = 1 Gr. + 1 kr.	14 kr. = $^1/_5$ fl. + 2 kr.
6 kr. = 1 Sechser.	15 kr. = $^1/_4$ fl.
7 kr. = 1 S. + 1 kr.	16 kr. = $^1/_4$ fl. + 1 kr.
8 kr. = 1 S. + 2 kr.	= $^1/_6$ fl. + 1 S.
= $^1/_8$ fl. + $^1/_2$ kr.	17 kr. = $^1/_4$ fl. + 2 kr.
9 kr. = 1 S. + 1 Gr.	18 kr. = $^1/_4$ fl. + 1 Gr.
10 kr. = $^1/_6$ fl.	= $^1/_5$ fl. + 1 S.
11 kr. = $^1/_6$ fl. + 1 kr.	19 kr. = $^1/_4$ fl. + 4 kr.
12 kr. = $^1/_5$ fl.	= 3 S. + 1 kr.
20 kr. = $^1/_3$ fl.	45 kr. = $^1/_2$ fl. + $^1/_4$ fl.
21 kr. = $^1/_3$ fl. + 1 kr.	46 kr. = $^1/_2$ fl. + $^1/_4$ fl. + 1 kr.
u. s. f.	u. s. w.
30 kr. = $^1/_2$ fl.	50 kr. = $^1/_2$ fl. + $^1/_3$ fl.
31 kr. = $^1/_2$ fl. + 1 kr.	51 kr. = $^1/_2$ fl. + $^1/_3$ fl. + 1 kr.
u. s. w.	u. s. w.

Beispiel: 4 × 37 kr. = ?

37 kr. = 30 kr. + 7 kr.; also

4 × 37 kr. = 4 × 30 kr. + 4 × 7 kr. = 4 × 1/2 fl. + 4 × 7 kr.; 4 × 1/2 fl. = 2 fl.; 4 × 7 kr. = 28 kr., zusammen 2 fl. 28 kr.

Oder: Ich kaufe 4 Ellen Zeug à 37 kr.; wie kann ich sie bezahlen?

a. Ich lege auf jede Elle 1/2 fl. und 7 kr.; also brauche ich 4 × 1/2 fl. und 4 × 7 kr. = 2 fl. 28 kr.

b. Ich zahle für jede Elle 1/2 fl. + 1 Sechser + 1 Kreuzer; also zahle ich im Ganzen 4 × 1/2 fl, 4 × 1 S. und 4 × 1 kr. 2c.

c. Ich lege für jede Elle 6 Sechser und 1 kr. hin; in diesem Falle zahle ich 4 × 6 Sechser + 4 × 1 kr. 2c.

3) Das Ergänzen.

60 kr. = 1 fl.	30 kr. = 1/2 fl.
59 kr. = 1 fl. — 1 kr.	29 kr. = 1/2 fl. — 1 kr.
58 kr. = 1 fl. — 2 kr.	28 kr. = 1/2 fl. — 2 kr.
57 kr. = 1 fl. — 1 Gr.	27 kr. = 1/2 fl. — 1 Gr.
20 kr. = 1/3 fl.	15 kr. = 1/4 fl.
19 kr. = 1/3 fl. — 1 kr.	14 kr. = 1/4 fl. — 1 kr.
18 kr. = 1/3 fl. — 2 kr.	11 kr. = 1/5 fl. — 1 kr.
17 kr. = 1/3 fl. — 1 Gr.	9 kr. = 1/6 fl. — 1 kr.

59 kr. 3 pf. = 1 fl. — 1 pf.
29 kr. 1 pf. = 1/2 fl. — 3 pf.
19 kr. 3 pf. = 1/3 fl. — 1 pf.
14 kr. 2 pf. = 1/4 fl. — 1/2 kr.

Beispiel: 4 × 59 kr. = ?

59 kr. = 1 fl. — 1 kr.; also

4 × 59 kr. = (1 fl. — 1 kr.) + (1 fl. — 1 kr.) + (1 fl. — 1 kr.) + (1 fl. — 1 kr.) = 4 × 1 fl. — 4 × 1 kr. = 4 fl. — 4 kr. = 3 fl. 56 kr.

Oder: Wie zahlt man 4 mal 59 kr. am einfachsten? Antwort: Man zahlt 4 mal 1 ganzen Gulden und läßt sich 4 mal 1 kr. wiedergeben. Wie viel habe ich dann eigentlich gezahlt? Antwort: 4 fl. — 4 kr. od. 3 fl. 56 kr.

4) Das Umkehren.

Beispiel 1. 60 × 4 kr. = ?

Ausr.: 60 × 1 kr. = 60 kr. oder 1 fl.; 60 × 2 kr. = 2 × 1 fl. oder 2 fl.; 60 × 3 kr. = 3 × 1 fl. oder 3 fl.; also sind 60 × 4 kr. = 4 × 1 fl. oder 4 fl.

Beispiel 2. 120 × 57 kr. = ?

Ausr.: 120 × 1 kr. = 120 kr. = 2 fl.; also sind 120 × 57 kr. = 57 × 2 fl. oder 114 fl.

Beispiel 3. 30 × 46 kr. = ?

Ausr.: 30 × 1 kr. = 30 kr. = 1/2 fl.; also sind 30 × 46 kr. = 46 × 1/2 fl. oder 23 fl.

Das Umkehren der Faktoren findet nur dann mit Vortheil statt, wenn der Multiplikator entweder die Währungs- oder Reduktionszahl der zu multiplicirenden Sorte selbst, oder wenn sie ein Vielfaches oder ein Theil der Reduktionszahl ist.

Aufgaben:

60×47 kr.;	180×39 kr.;	45×16 kr.;	80×27 kr.;
64×36 Ms.;	64×18 Lth.;	50×27 Pfd.;	75×28 kr.;
32×37 Lth.;	72×22 Bog.;	16×23 Lth.;	96×46 Ms.;
24×19 Bg.;	128×17 Ms.;	20×51 kr.;	48×14 Lth.;

Aus diesen und anderen dergleichen Multiplikations-Aufgaben werden sowohl vom Lehrer als von einzelnen Schülern Regeldetri-Aufgaben gebildet. Hierdurch erst wird der Schüler völlig in die Sache eingeführt. Z. B.

1 Pfund zu 37 kr.; was kosten 60 (120, 30) Pfd.?
Für 1 fl. 23 Loth; wie viel für 32 (64, 16) fl.?

Bei der Auflösung hat man aber ganz besonders Ursache, darauf zu sehen, daß der Schüler nicht spreche: Wenn 1 Pfd. 37 kr. kostet, so kosten 60 Pfd. 37 × 60 kr. Das wäre ein falscher Schluß. Es muß heißen: Wenn 1 Pfd. 37 kr. kostet, so kosten 60 Pfd. 60 × 37 kr. Nun erst fragt sichs: Wie rechne ich 60 × 37 kr. am bequemsten? Antwort: 60 × 1 kr. = 1 fl.; 60 × 37 kr. = 37 × 1 fl. oder 37 fl. Oder: 60 × 37 kr. = 37 × 60 kr. = 37 × 1 fl. oder 37 fl.

b. Der Multiplikand eine mehrfach benannte Zahl.

Beispiel 1. 4 × 32 kr. 3 pf. =?

Ausr.: 4 × 32 kr. 3 pf. = 32 kr. 3 pf + 32 kr 3 pf. + 32 kr. 3 pf. + 32 kr. 3 pf. = 4 × 32 kr. + 4 × 3 pf. Also sind nicht nur die 32 kr., sondern auch die 3 pf. 4mal zu nehmen 4 × 32 kr. = 2 fl. 8 kr.; 4 × 3 pf. = 12 pf. oder 3 kr.; 2 fl. 8 kr. + 3 kr. = 2 fl. 11 kr.; 4 × 32 kr 3 pf. = 2 fl. 11 kr.

Beispiel 2. 18 × 5 fl 23 kr. 2 pf. =?

Ausr.: 18 × 5 fl 23 kr. 2 pf. = 18 × 5 fl. + 18 × 23 kr. + 18 × 2 pf.; 18 × 5 fl. = 90 fl.; 18 × 23 kr. = 6 fl. 54 kr.; 90 fl. + 6 fl. 54 kr. = 96 fl 54 kr; 18 × 2 pf. = 9 kr.; 96 fl. 54 kr. + 9 kr. = 97 fl. 3 kr. Also sind 18 × 5 fl. 23 kr. 2 pf. = 97 fl. 3 kr.

Aufgaben.

7 × 5 kr. 3 pf.	15 × 3 Schff. 4 Mtz.	6 × 3 Fdr. 7 Eim.
9 × 11 Lth. 2 Qt.	24 × 5 Mtz. 8 Sz.	12 × 4 fl. 12 kr. 1 pf.
8 × 4 fl. 12 kr	30 × 44 kr. 2 pf.	36 × 3 Rth. 4 Fß.
6 × 8 ℔ 17 Lth.	12 × 6 fl. 42 kr.	32 × 2 Eim. 44 Ms.
2 × 17 Bch. 16 Bg.	18 × 43 kr. 1 pf.	48 × 1 Schff. 5 Mtz.
5 × 9 fl. 24 kr.	90 × 54 kr. 2 pf.	60 × 39 kr. 3 pf.
4 × 37 kr. 2 pf.	36 × 8 M. 15 Tg.	96 × 29 kr. 2 pf.

B. Schriftlich.

Beispiel: 21 × 64 fl. 37 kr. 3 pf. = ?

Erste Ausrechnungsweise.

64 fl.	37 kr.	3 pf.
		21
1357 fl.	12 kr.	3 pf.

c.	b.	a.
64 fl.	37 kr.	21 pf.
21	21	3
64	37	4 | 63 | 15 kr.
128	74	4
13	15	23
1357 fl.	60 | 792 | 13 fl.	20
	60	3 pf.
	192	
	180	
	12 kr.	

21 × 64 fl. 37 kr. 3 pf. =
21 × 64 fl. + 21 × 37 kr. + 21 × 3 pf. =
21 × 3 pf. + 21 × 37 kr. + 21 × 64 fl.

a. 21 × 3 pf. = 3 × 21 pf. = 63 pf. = 15 kr. 3 pf.
b. 21 × 37 kr. + 15 kr. = 792 kr. = 13 fl. 12 kr.
c. 21 × 64 fl. + 13 fl = 1357 fl.

Also ist 21 × 64 fl. 37 kr. 3 pf. = 1357 fl. 12 kr. 3 pf.

Hier wurde also jede Sorte für sich multiplicirt und mit der niedersten Sorte begonnen.

Ist der Multiplikator eine Grundzahl, so können die einzelnen Rechnungen, welche hier unter a, b und c stehen, im Kopfe ausgeführt werden.

Dieß kann auch geschehen, wenn sich der Multiplikator in Faktoren zerfällen läßt, welche Grundzahlen sind. 21 = 7 × 3.

21 × 64 fl. 37 kr. 3 pf. = 7 × 3 × 64 fl. 37 kr. 3 pf. Steht:

64 fl.	37 kr.	3 pf.
		3
193 fl.	53 kr.	1 pf.
		7
1357 fl.	12 kr.	3 pf.

Anm. Anwendbar ist diese Weise übrigens auch dann, wenn der Multiplikator eine Primzahl ist z. B. bei 31. Man nimmt dafür die Zahl 30, multiplicirt durch deren Faktoren 6 und 5 und addirt schließlich den Multiplikanden dazu. Oder man nimmt 32, multiplicirt mit 4 und 8 und zieht zuletzt den Multiplikanden ab.

Zweite Ausrechnungsweise.

```
          64 fl.    37 kr.   3 pf.
          60
        3877 kr.
           4
       15511 pf.
          21
       15511
      31022              60
4 |   325731 |  81432 | 1357 fl.
  |   32     |  60    |
       5        214
       4        180
       17        343
       16        300
        13        432
        12        420
         11        12 kr.
          8
          3 pf.
```

Lehrverfahren. Mit jeder mehrfach benannten Zahl kann man eine Veränderung vornehmen, ohne daß sich dadurch ihr Werth selbst verändert, nämlich welche? Man kann die höheren Sorten derselben in die niederen auflösen. Dieß thun wir nun auch mit der vorstehenden Zahl. — 64 fl. 37 kr. 3 pf. = 15511 pf.

Was ist nun mehr: 2 × 64 fl. 37 kr. 3 pf., od. 2 × 15511 pf.?
3 × 64 fl. 37 kr. 3 pf., od. 3 × 15551 pf.?
21 × 64 fl. 37 kr. 3 pf., od. 21 × 15511 pf.?

Vorhin haben wir jede einzelne Sorte durch 21 multiplicirt; wie werden wir jetzt rechnen, um dasselbe Ergebniß zu erhalten? Wir multipliciren 15511 pf durch 21 und verwandeln die Pfennige dann wieder in Kreuzer und Gulden

Aufg. z. Zifferr., 25. Uebung.

Aufgaben mit der angewandten Zahl.

A. Mündlich.

Beispiel 1. Wie viel Gulden machen 6, 10, 17 ꝛc. Doppelthaler?

Aufl. 1 Doppelthlr. = 3 fl. 30 kr. = 3 fl. + 1/2 fl.; 2 Doppelthlr. = 2 × 3 fl. + 2 × 1/2 fl.; 3 Doppelthlr. = 3 × 3 fl. + 3 × 1/2 fl.; 6 Doppelthlr. also = 6 × 3 fl. + 6 × 1/2 fl.; 6 × 3 fl. = 18 fl., 6 × 1/2 fl. = 3 fl.; 18 fl. + 3 fl. = 21 fl. Also sind 6 Doppelthlr. = 21 fl.

Beispiel 2. Wie viel Gulden machen 8, 12, 16, 10 ꝛc. Vereinsthlr.?

Aufl. 1 Vrsthlr. = 1 fl. 45 kr. = 1 fl. + $^1/_2$ fl. + $^1/_4$ fl.; 2 Vereinsthlr. machen 2mal so viel, 3 Vrsthlr. machen 3mal so viel u. s. f.; 8 Vrsthlr machen also 8mal so viel, nämlich 8 × 1 fl. + 8 × $^1/_2$ fl. + 8 × $^1/_4$ fl. Thut 14 fl.

Beispiel 3. Wie viel Gulden machen 4, 6, 10 ꝛc. Krthlr.?

Aufl. 1 Krthlr. = 2 fl. 42 kr. = 2 fl. + $^1/_2$ fl. + $^1/_5$ fl.; 2 Krthlr. machen 2mal so viel, 3 Krthlr machen 3mal so viel; 4 Krthlr. machen 4mal so viel, nämlich 4 × 2 fl. + 4 × $^1/_2$ fl. + 4 × $^1/_5$ fl. Thut 10 fl. 48 kr.

Beispiel 4. Das Pfd. Kaffee zu 34 kr.; was kostet der Ctr.?

Aufl. 1 Ctr. = 100 Pfd.; 1 Ctr. Kaffee ist also 100mal so viel als 1 Pfd.; daher kostet er auch 100mal so viel. Wenn also 1 Pfd. 34 kr. kostet, so kostet 1 Ctr. 100 × 34 kr. Macht 56 fl. 40 kr.

Beispiel 5. Ein Arbeiter verdient in 1 Tg. 1 fl. 26 kr.; wie viel in 4 Wch. und 3 Tg.?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel ein Arbeiter in 4 Wch. und 2 Tg. verdient. In 1 Tg verdient er 1 fl. 26 kr.; also verdient er in 2 Tg. 2 × 1 fl. 26 kr., in 3 Tg. 3 × 1 fl. 26 kr. u. s. f. Wie vielmal 1 fl. 26 kr. verdient er nun aber in 4 Wch. 3 Tg.? Das kann ich nur dann sagen, wenn ich weiß, wie viel Tage dieß sind. 4 Wch 3 Tg. = 4 × 6 + 3 od. 27 Tage. In 27 Tg. verdient er 27 × 1 fl. 26 kr. Ausrechnung!

Beispiel 6. 1 Mtz. Kartoffeln kostet 50 kr.; wie hoch kommen 8 Scheffel?

Erste Aufl. Wie viel 8 Schff. kosten, kann ich berechnen, wenn ich weiß, was 1 Schff. kostet. Das sagt mir die Aufgabe nicht; ich kann es aber finden, weil ich weiß, wie viel 1 Mtz. kostet. Ich suche daher zuerst, was 1 Schff. kostet, und dann, was 8 Schff. kosten. (Ich gehe von 1 Mtz. auf 1 Schff. und von 1 Schff. auf 8 Schff. Oder: Ich schließe von 1 Mtz. auf 1 Schff. und von 1 Schff. auf 8 Schff. Oder: Ich berechne zuerst 1 Schff. und dann 8 Schff.) Ausrechnung!

Zweite Aufl. 1 Mtz. kostet 50 kr., 2 Metz. kosten 2 × 50 kr.; 3 Mtz. kosten 3 × 50 kr. u. s. f. Wie vielmal 50 kr. die 8 Schff. kosten, kann ich nur dann sagen, wenn ich weiß, wie viel Metzen diese sind. 8 Schff. = 8 × 6 oder 48 Mtz; 8 Schff. oder 48 Mtz. kosten 48 × 50 kr. Ausrechnung!

Aufg. z. Kopf- od. Denkrechnen S. 8, Stufe 10—50.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. Eine Hausfrau verbraucht monatlich 85 ℔ weißes Mehl, wie viel demnach in 10 Jahren?

Auflösung und Ausrechnung:

In 1 Mon. verbraucht sie 85 ℔, in 2 M. 2 × 85 ℔, in 3 Mon. 3 × 85 ℔ u. s. f. Um also zu wissen, wie vielmal 85 ℔ sie in 10 Jahren

verbraucht; so muß ich die 10 J. zu Monat machen. 10 J = 10 × 12 oder 120 Mon. Folglich verbraucht sie in dieser Zeit 120 × 85 ℔ Mehl.

```
      85 ℔
     120
    ————
     170
     85
1(00 | 102(00 ℔ = 102 Ctr.
```

Beispiel 2. Ein Loth zu 3 kr. 3 pf., wie viel kosten 15 Pfd. 25 Loth?

Auflösung und Ausrechnung:

Berechnen soll ich, was 15 Pfd. 25 Loth kosten. 1 Loth kostet 3 kr. 3 pf. Daß die 15 Pfd. 25 Loth mehr kosten, ist leicht einzusehen. Aber wie vielmal 3 kr. 3 pf. sie kosten, weiß ich noch nicht. Bevor ich das wissen kann, muß ich 15 Pfd. 25 Loth ganz in Loth verwandeln.

```
 15 Pfd. 25 Loth          505
 32                        15
————                    ————
 30                       2525
45                        505          60
 25                  4 | 7575 pf.    | 1893 kr. | 31 fl.
————                      35           180
505 Loth                   37           93
                            15          60
                             3 pf.       33 kr
```

15 Pfd. 25 Lth. = 505 Lth.; also kosten sie auch 505 × 3 kr. 3 pf. Wie rechnest du das am bequemsten? Ich mache 3 kr. 3 pf. zu Pfennigen. 3 kr. 3 pf. = 15 pf. Nun wären die 15 pf. durch 505 zu multipliciren. Ich kehre es aber um u. rechne 15×505; 15×505=7575. Also sind 505×15 pf. 7575 pf. = 1893 kr. 3 pf. od. 31 fl. 33 kr. 3 pf.

Beispiel 3. Ein Metzger zahlt für einen Ochsen 18 Karolin und 2 Kronenthaler Kaufgeld und verkauft davon 832 Pfund Fleisch à 12 kr. 2 pf., 106 Pfund Unschlitt à 18 kr., die Haut von 96 Pfund Gewicht à 9 kr. 3 pf. und die Eingeweide zu 9 fl. 45 kr. Was verdient er daran?

Berechnung:

```
Ankauf = 198 fl.              Erlös: Fleisch     = 173 fl. 20 kr.
           5 fl. 24 kr.              Unschlitt   =  31 fl. 48 kr.
        ———————————                  Haut        =  15 fl. 36 kr.
         203 fl. 24 kr.              Eingeweide  =   9 fl. 45 kr.
                                                   ———————————
                                                   230 fl. 29 kr.
                                                   203 fl. 24 kr.
                                                   ———————————
                                                    27 fl.  5 kr.
```

Aufg. zum Zifferr. 26. Uebung.

Dividiren.

Hier erinnern wir den Lehrer an das, was im vorigen Cursus über den Unterschied der beiden Divisionsformen gesagt ist.

A. Enthaltensein.

3 Pfd. : 12 Pfd. = 4.

(3 Pfd. sind in 12 Pfd. 4mal enthalten.)

Divisor und Dividend sind benannte Zahlen; der Quotient ist eine reine Zahl.

A. Mündlich.

Beispiel 1. Wie oft sind 12 kr. in 7 fl. enthalten?

a. 7 fl. = 420 kr.; 12 kr. sind in 7 fl. eben so oft enthalten als in 420 kr.; 420 kr. = 360 kr. + 60 kr.; 12 kr. sind in 360 kr. 30mal u. in 60 kr. 5mal, in 420 kr. also 30mal + 5mal od. 35mal enthalten.

b. 12 kr. u. 7 fl. lassen sich geradaus zu Sechsern machen. 12 kr. = 2 Sechser, u. 7 fl. = 70 Sechser; 12 kr. sind daher in 7 fl. eben so oft enthalten, als 2 Sechser in 70 Sechsern, nämlich 35mal.

c. 12 kr. sind in 1 fl. 5mal, in 7 fl. also 7 × 5mal oder 35mal enthalten.

Beispiel 2. Wie oft liegen 9 Fuß in 8 Rth.?

Ausr. 8 Rth. = 8×12 oder 96 Fß.; 96 Fß. = 90 Fß. + 6 Fß.; 9 Fß. liegen in 90 Fß. 10mal, in 6 Fß. $^6/_9$mal, in 96 Fß. oder 8 Rth. also $10^6/_9$mal.

Beispiel 3. Wie oft sind 24 Pfd. in 1 Ctr. 15 Pfd. enthalten?

Ausr. 1 Ctr. 15 Pfd. = 115 Pfd.; 115 Pfd. = 96 Pfd. + 19 Pfd.; 24 Pfd. sind in 96 Pfd. 4mal, in 19 Pfd. $^{19}/_{24}$mal, in 115 Pfd. also $4^{19}/_{24}$mal enthalten.

Beispiel 4. Wie vielmal 4 kr. 1 pf. sind 16 kr.?

Ausr. 16 kr. sind so vielmal 4 kr. 1 pf., als diese in 16 kr. enthalten sind. 4 kr. 1 pf. = 17 pf.; 16 kr. = 64 pf.; 17 pf. sind in 64 pf. $3^{13}/_{17}$mal enthalten. Also sind 16 kr. = $3^{13}/_{17}$×4 kr. 1 pf.

Beispiel 5. Wie oft lassen sich 3 Wch. 4 Tg. von 10 Wch. 5 Tg. wegnehmen?

Ausr. 3 Wch. 4 Tg. lassen sich von 10 Wch. 5 Tg. so oft wegnehmen, als sie darin enthalten sind. 3 Wch. 4 Tg. = 25 Tg.; 10 Wch. 5 Tg = 75 Tg.; 25 Tg. sind in 75 Tg. 3mal enthalten; also können 3 Wch. 4 Tg. von 10 Wch. 5 Tg. 3mal weggenommen werden.

Aufgaben.

16 Ms. in 3 Eim. 3 pf. : 18 kr. 3 pf. 2 Loth 1 Qt. : 27 Loth.
36 kr. : 15 fl. 12 Tg. : 3 M. 18 Tg. 7 kr. 2 pf. : 45 kr.
8 Eim. : 7 Fdr. 7 Mon. : 5 J. 6 Mon. 2 Schff. 4 Mtz. : 28 Schff.
6 kr. 1 pf. : 18 kr. 3 pf. = ?
2 Rth. 6 Fß. : 12 Rth. 6 Fß. = ?

Mit angewandten Zahlen.

Beispiel 1. Eine Frau verbraucht täglich 1 Lth. 2 Qt. Kaffee; wie viel Tage lang hat sie an 21 Lth.?

Berechn. Von den 21 Lth. nimmt sie 1 Lth. 2 Qt. weg und reicht damit auf 1 Tag; vom Reste nimmt sie wieder 1 Lth. 2 Qt weg u. reicht damit wieder auf 1 Tg. u. s. f. So oft sie also 1 Lth. 2 Qt. von 21 Lth. wegnehmen kann, so vielmal 1 Tg. reicht sie mit diesen aus. 1 Lth. 2 Qt. können aber von 21 Lth. so oft weggenommen werden, als sie darin enthalten sind. 1 Lth. 2 Qt. = 6 Qt.; 21 Lth. = 84 Qt.; 6 Qt. sind in 84 Qt. 14mal enthalten. Also reicht die Frau mit 21 Lth. Kaffee 14 × 1 Tg. oder 14 Tg. aus.

Beispiel 2. Karl hat 8 kr. 3 pf. Sophie 56 kr. 1 pf.; wie vielmal so viel Geld hat Sophie, als Karl?

Berechn. 56 kr. 1 pf. sind so vielmal 8 kr. 3 pf., als diese in 56 kr. 1 pf. enthalten sind. 8 kr. 3 pf. = 35 pf.; 56 kr. 1 pf. = 225 pf. Wie oft sind nun aber 35 pf. in 225 pf. enthalten? 35 pf. sind in 70 pf. 2mal, in 2×70 oder 140 pf. 2mal so oft, in 3×70 od. 210 pf. 3mal so oft, also 6mal, und in den übrigen 15 pf. noch $^{15}/_{35}$mal enthalten. Also hat Sophie $6^{15}/_{35}$mal so viel Geld als Karl.

Aufgaben.

1) Mehrere Arbeiter haben zusammen 24 fl. verdient; jeder bekam 48 kr.; wie viel sind ihrer gewesen? 2) 3 Ctr. Waaren sind in Paquete von je 20 Pfund zu verpacken; wie viel Paquete gibt es? 3) Wenn das Pfd. Kirschen 3 kr. 3 pf. kostet, so kann man wie v. Pfd. für 15 kr. kaufen? 4) Einige Ackerbeete ertrugen 15 Schff. 2 Mtz. Kartoffeln; wie viel Beete waren es, wenn jedes 3 Schff. 5 Mtz. gab? 5) Wie viel Ellen erhält man für 36 fl., wenn die Elle 2 fl. 24 kr. kostet? 6) Auf wie viele Wochen reichen 27 Lth. 2 Qt. Gewürz, wenn jede Woche 5 Lth. 2 Qt. verbraucht werden? 7) Der Ctr. Roggenmehl kostet 1 fl. 30 kr.; wie viel Ctr. wird man für 22 fl. 30 kr. erhalten?

B. Schriftlich.

Beispiel 1. Wie oft sind 5 fl. 36 kr. in 240 fl. 48 kr. enthalten?

```
   5 fl. 36 kr.   |   240 fl. 48 kr.
   60             |    60
  ----------      |  -----------
  336 kr.         |  14448 kr. | 43
                  |  1344
                  |  -----------
                  |   1008
                  |   1008
                  |  -----------
```

5 fl. 36 kr. sind in 240 fl. 48 kr. so oft enthalten, als 336 kr. in 14448 kr. = 336 in 14448 = 43 mal.

Beispiel 2. A hat sich für 172 fl. 48 kr. Kronenthaler eingewechselt; wie viel Stück hat er erhalten?

Aufl. 1 Krthlr. = 2 fl. 42 kr. Man denkt sich's so: A nahm 2 fl. 42 kr. von 172 fl. 48 kr. weg und bekam dafür 1 Krthlr.; dann nahm er wieder 2 fl. 42 kr. vom Reste weg und bekam dafür wieder 1 Krthlr. u. s. f. Er hat daher im Ganzen so vielmal 1 Krthlr. erhalten, als 2 fl. 42 kr. in 172 fl. 48 kr. enthalten sind.

Ausr.	2 fl. 42 kr.	172 fl. 48 kr.	
	60	60	
		10368 kr.	64 Krthlr.
		972	(64 × 1 Krthlr. = 64 Krthlr.)
		648	
		642	

Aufg. z. Zifferr., 27. u. 28 Uebung.

B. Theilen.

3 : 12 Pfd. = 4 Pfd.

($^1/_3$ von 12 Pfd. = 4 Pfd.)

Der Divisor ist eine reine Zahl; der Dividend und der Quotient hingegen sind benannte Zahlen.

A. Mündlich.

a. Die zu theilenden benannten Zahlen sind, von ihrer Benennung abgesehen, **reine Vielfache** des Theilers.

Dergleichen Aufgaben bieten hinsichtlich ihrer Berechnung nichts Besonderes. Sie werden ohne Schwierigkeit gerechnet.

1) Wie viel ist die Hälfte von 6 fl. 32 kr.? von 14 fl. 42 kr.?
2) Suche $^1/_3$ von 12 Thlr. 18 Gr.! von 15 Ctr. 75 Pfd.!
3) Wie viel ist $^1/_4$ von 72 fl. 48 kr.? Wie viel $^1/_6$? $^1/_8$? $^1/_{12}$?
4) Wie groß ist der 5. Theil von 35 Pfd. 21 Lth.? Wie groß $^1/_7$?
5) Welches ist der 15. Theil von 45 fl. 30 kr.?

b. Die Zahl der höheren Sorte des Dividenden ist, als reine Zahl berechnet, kleiner als der Theiler.

Aufgaben dieser Art nehmen die volle Aufmerksamkeit in Anspruch. Um in jedem einzelnen Fall zu erkennen, welche Ausrechnungsweise die entsprechendere sei, ist Einsicht und Besonnenheit vonnöthen. Sehr förderlich ist es, einzelne Aufgaben ganz so, wie man sie frei im Kopfe rechnet, auch schriftlich behandeln zu lassen. Der Schüler hat dabei mehr Zeit, die Sache ruhig zu überlegen und des Grundes, warum man in dem einen Falle so und in dem andern wieder anders verfährt, sich klar bewußt zu werden.

Beispiel 1. $^1/_8$ von 7 Pfund, wie viel?

Ausr. Der 8. Theil von 7 Pfd. ist kein ganzes Pfd. Was ist zu thun? Jedes Pfund besteht aus Loth. Wir suchen daher, wie viel Loth auf $^1/_8$ von 7 Pfd. kommen. Und das können wir auf zweierlei Weise thun.

a. Wir suchen zunächst, wie viel Loth $^1/_8$ von 1 Pfd. beträgt. 1 Pfd. = 32 Loth; $^1/_8$ von 1 Pfd. oder 32 Loth = 4 Loth; also ist $^1/_8$ von 7 Pfd. = 7×4 oder 28 Loth.

b. Wir machen die 7 Pfd. sämmtlich zu Loth und suchen hernach $^1/_8$ davon. 7 Pfd. = 7×32 Loth; 7×32 Loth = 210+14 oder 224 Loth; 224 Loth = 160+64 Loth; $^1/_8$ von 160 Loth = 20 Loth, und $^1/_8$ von 64 Loth = 8 Loth; 20 Loth + 8 Loth = 28 Loth; also ɔc.

Welche von dieser doppelten Berechnungsweise ist die einfachere?

Beispiel 2. $^1/_8$ von 7 fl., wie viel?

Ausr. a. $^1/_8$ von 7 fl. ist nicht 1 fl.; 1 fl. = 60 kr.; $^1/_8$ von 60 kr. = 7 kr., Rest 4 kr.; also ist $^1/_8$ von 7 fl. = 7×7 oder 49 kr., Rest 7×4 od. 28 kr.; $^1/_8$ von 28 kr. = 3 kr., Rest 4 kr.; 49 kr. + 3 kr. = 52 kr.; 4 kr. = 16 pf.; $^1/_8$ von 16 pf. = 2 pf.; also ist $^1/_8$ von 7 fl. = 52 kr. 2 pf.

Ausr. b. 7 fl. = 7×60 oder 420 kr.; 420 kr. = 400+16+4 kr.; $^1/_8$ von 400 kr. = 50 kr.; $^1/_8$ von 16 kr. = 2 kr.; 50 kr. + 2 kr = 52 kr.; 4 kr. = 16 pf.; $^1/_8$ von 16 pf. = 2 pf.; also ist ɔc.

Diejenige Rechnungsweise, welche vorhin die einfachere war, ist hier die schwierige. Warum? Weil 8 in 32 aufgeht, in 60 aber nicht.

Bei Aufgaben dieser Art hat man daher vorzüglich darauf zu achten, ob der Divisor in der Reduktionszahl aufgeht, oder nicht. Geht der Theiler in der Reduktionszahl auf, so sucht man den verlangten Theil zunächst von einem Ganzen; wenn nicht, so thut man in den meisten Fällen am besten, die höhere Sorte vollständig in die nächste niedere aufzulösen.

Dieß ist nun an den Münzen, Maßen und Gewichten so lange zu üben, bis der Schüler augenblicklich erkennt, wie er bei jedem gegebenen Falle am leichtesten zum Ziele gelangt, und bis er im Stande ist, dergleichen Aufgaben mit Fertigkeit zu rechnen.

1) Wie heißt die Reduktionszahl zwischen Gulden und Kreuzer? Welche Zahlen gehen in 60 auf? (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.) Wie sucht man am besten $^1/_3$ von 2 fl.? $^1/_4$ von 3 fl.? $^1/_5$ von 4 fl.? u. s. w.

Antw.: $^1/_3$ von 1 fl. = 20 kr., von 2 fl. = 2×20 oder 40 kr.; $^1/_4$ von 1 fl. = 15 kr., von 3 fl. = 3×15 oder 45 kr.; $^1/_5$ von 1 fl. = 12 kr., von 2 fl. = 2×12 oder 24 kr., von 3 fl. = 3×12 oder 36 kr. u. s. f.

2) Wie heißt die Reduktionszahl zwischen Centner und Pfund? Welche Zahlen gehen in 100 auf? (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50.) Wie suchst du also am besten $^1/_4$ von 3 Ctr.? $^1/_5$ von 4 Ctr.? $^1/_{10}$ von 9 Ctr.? ɔc.

Antw.: $^1/_4$ von 1 Ctr. = 25 Pfd., von 3 Ctr. = 3 × 25 oder 75 Pfd. u. s. w.

Eben so, wie hier Gulden und Centner, lasse man auch Pfunde, Eimer, Fuder, Buch, Ries, Ruthe, Fuß, Thaler und Groschen theilen.

Dann gehe man zu nachstehenden Aufgaben über. Bei jeder derselben wird sogleich gefragt, wie sie sich am einfachsten rechnen lasse. Sind die Schüler verschiedener Meinung, so werde auch die Ausrechnung verschieden ausgeführt.

$^1/_3$ von 2 fl. $^1/_4$ v. 3 fl. $^1/_5$ v. 2 fl. $^1/_6$ v. 5 fl. $^1/_7$ v. 4 fl.
von 2 Ctr. v. 3 Schff. v. 4 Rth. v. 2 Ctr. $^1/_8$ v. 5 Ctr.
von 2 Bch. v. 3 Fuß v. 4 Ctr. v. 3 Rth. $^1/_9$ v. 6 fl.
von 2 Loth v. 3 Ries v. 3 Pfd. v. 4 Pfd. $^1/_{10}$ v. 7 Ctr.

Beisp. 3. Wie viel ist $^1/_{36}$ v. 18 fl.? $^1/_{48}$ v. 32 fl.? $^1/_{84}$ v. 63 fl.?

$^1/_{36}$ v. 36 fl. = 1 fl, von 18 fl. also nur die Hälfte von 1 fl. = 30 kr.
$^1/_{48}$ v. 48 fl. = 1 fl., v. 16 fl. = $^1/_3$ fl., v. 32 fl. = 2 × $^1/_3$ fl. = 40 kr.
$^1/_{84}$ v. 84 fl. = 1 fl., v. 21 fl. = $^1/_4$ fl., v. 63 fl. = 3 × $^1/_4$ fl. = 45 kr.

Beispiel 4. Wie groß ist $^1/_3$ von 2 Pfd. 25 Loth?

Ausr. a. $^1/_3$ von 1 Pfd. = 10 Loth, Rest 2 Loth; $^1/_3$ von 2 Pfd. = 2 × 10 oder 20 Loth, Rest 2 × 2 oder 4 Loth; 4 Loth + 25 Loth = 29 Loth; $^1/_3$ von 29 Loth = 9 Loth, Rest 2 Loth; 20 Loth + 9 Loth = 29 Loth; 2 Loth = 8 Qt; $^1/_3$ von 8 Qt. = $2^2/_3$ Qt. Also ist $^1/_3$ von 2 Pfd. 25 Loth = 29 Loth $2^2/_3$ Qt.

Ausr. b. 2 Pfd. 25 Lth = 64 + 25 oder 89 Loth; 89 Loth = 60 + 29 Loth; $^1/_3$ von 60 Loth = 20 Loth 2c.

Aufgaben:

1) Wie viel beträgt $^1/_4$ von 3 fl. 36 kr.? Wie viel $^1/_5$? $^1/_6$? $^1/_8$?
2) Wie groß ist $^1/_7$ von 6 fl. 57 kr.? Wie groß $^1/_8$? $^1/_9$? $^1/_{12}$?
3) Suche $^1/_4$ von 3 Pfd. 30 Loth! Ferner $^1/_6$! $^1/_8$! $^1/_{10}$!
4) Welches ist der 4. Theil von 3 Eim. 45 Ms.? Welches der 8. Theil?
5) Wie suchst du den 9. Theil von 8 Schff. 5 Mtz.? Wie $^1/_{12}$?
6) Wie viel kommt auf $^1/_4$ von 3 Centner 75 Pfund 24 Loth?

c. Die Zahl der höheren Sorte des Dividenden ist, als reine Zahl betrachtet, ein vermischtes Vielfaches vom Theiler.

Ist das Bisherige gehörig geübt, so hat diese Stufe keine Schwierigkeit. Man hat die zu theilende Zahl nur entsprechend zu zerlegen und hernach von den einzelnen Posten den verlangten Theil zu suchen.

Beispiel 1. Suche von 11 fl. die Hälfte! $^1/_3$! $^1/_4$! 2c.

11 fl. = 10 fl. + 1 fl.; die Hälfte von (10 fl. + 1 fl.) = 5 fl. 30 kr.
11 fl. = 9 fl. + 2 fl; 1 Drittel von (9 fl. + 2 fl) = 3 fl. 40 kr.
11 fl. = 8 fl. + 3 fl; 1 Viertel von (8 fl. + 3 fl.) = 2 fl. 45 kr. 2c.

Beispiel 2. $^1/_5$ von 168 fl. = ?

Ausr. 168 fl. = 150 + 18 fl., und 18 fl. = 15 + 3 fl.; $^1/_5$ v. 150 fl. = 30 fl.; $^1/_5$ von 15 fl. = 3 fl.; 30 fl. + 3 fl. = 33 fl.; $^1/_5$ von 3 fl. = 3 × 12 oder 36 Kreuzer. Also ist $^1/_5$ von 168 fl. = 33 fl. 36 kr.

Beispiel 3. $^1/_4$ von 43 fl. 27 kr. = ?

Ausr. $^1/_4$ von 40 fl. = 10 fl.; $^1/_4$ von 3 fl. = 3 × 15 oder 45 kr.; zusammen 10 fl. 45 kr.; $^1/_4$ von 27 kr. = 6 kr. 3 pf.; 10 fl. 45 kr. + 6 kr. 3 pf. = 10 fl. 51 kr. 3 pf. Also 2c.

1) $^1/_2$ von 13 fl. 15 kr. = ?	7) $^1/_{12}$ von 75 Pfd. 30 Loth = ?
2) $^1/_8$ von 20 fl. 16 kr. = ?	8) $^1/_{15}$ von 100 Thlr. 25 Gr. = ?
3) $^1/_4$ von 15 Pfd. 30 Loth = ?	9) $^1/_{20}$ von 75 fl. 50 kr. = ?
4) $^1/_7$ von 52 Wch. 1 Tag = ?	10) $^1/_{24}$ von 100 fl. 6 kr. = ?
5) $^1/_3$ von 50 fl. 20 kr. = ?	11) $^1/_{30}$ von 132 fl. 45 kr. = ?
6) $^1/_6$ von 81 Eim. 25 Ms. = ?	12) $^1/_{16}$ von 45 Pfd. 24 Lth. = ?

d. Mit angewandten Zahlen.

Beispiel 1. 9 Personen haben 87 fl. unter sich zu theilen; wie viel erhält jede?

Aufl. Die 87 fl. werden unter die 9 Personen gleichheitlich vertheilt. Folglich bekommt jede den 9. Theil von 87 fl. Ausr. 87 fl. = 81 fl. + 6 fl.; $^1/_9$ von 81 fl. = 9 fl.; $^1/_9$ von 3 fl. = $^1/_3$ fl., von 6 fl. also 2 × $^1/_3$ fl. oder 40 kr. Also erhält jede von den 9 Personen 9 fl. 40 kr.

Beisp. 2. 15 Ctr. Heu kosten 24 fl. 30 kr.; was kostet 1 Ctr.?

Aufl. Von den 15 Ctrn. kostet 1 Ctr. so viel, als der andere. Die 24 fl. sind daher auf die 15 Ctr. gleichheitlich zu vertheilen. Also kommt auf 1 Ctr. $^1/_{15}$ von 24 fl. 30 kr. Ausr. 24 fl. 30 kr. = 15 fl. + 9 fl. 30 kr.; $^1/_{15}$ von 15 fl. = 1 fl.; $^1/_{15}$ von 9 fl. = 9 × 4 oder 36 kr., und $^1/_{15}$ von 30 kr. = 2 kr.; 1 fl. 36 kr. + 2 kr. = 1 fl. 38 kr. Also kostet 1 Ctr. ꝛc.

Beisp. 3. 12 Schff. Korn kosten 150 fl.; was kostet 1 Schff.?

Aufl. Wenn 12 Schff. 150 fl. kosten, so kostet 1 Schff. $^1/_{12}$ von 150 fl. Ausr. 150 fl. = 120 + 24 + 6 fl.; $^1/_{12}$ von 120 fl = 10 fl.; $^1/_{12}$ von 24 fl. = 2 fl.; 10 fl. + 2 fl. = 12 fl.; $^1/_{12}$ von 6 fl. = 30 kr. Also kostet 1 Schff. 12 fl. 30 kr.

Beisp. 4. 3 Fdr. 4 Eim. Wein kosten 264 fl.; wie berechnet sich der Eimer?

Aufl. Wenn 2 Eim. Wein 264 fl. kosten, so kostet 1 Eim. die Hälfte davon; wenn 3 Eim. 264 fl. kosten, so kostet 1 Eim. $^1/_3$ davon u. s. f. Wenn ich also weiß, was irgend eine Anzahl von Eimern kostet, so kann ich dann finden, was 1 Eimer kostet. Was thun wir daher mit den 3 Fdr. 4 Eim.? Wir verwandeln sie ganz in Eimer. 3 Fdr. 4 Eim. = 40 Eimer. Jetzt heißt die Aufgabe: 40 Eim. Wein kosten 264 fl.; was kostet 1 Eimer? 1 Eim. ist $^1/_{40}$ von 40 Eim.; also kostet 1 Eim. auch $^1/_{40}$ von 264 fl. Ausr. 264 fl. = 240 fl. + 24 fl. = 240 fl. + 20 fl. + 4 fl.; $^1/_{40}$ davon beträgt 6 fl. 36 kr.; 1 Eim. kostet also 6 fl. 36 kr.

Beisp. 5. 3 Ctr. Salz kosten 20 fl.; wie hoch kommt 1 Pfd.?

Aufl. a. Was sollen wir hiernach suchen? Was 1 Pfd. kostet. Und was sagt uns die Aufgabe? Was 3 Ctr. kosten. Wie thun wir, wenn wir wissen, was 1 Pfd. kostet, und suchen sollen, was 3 Ctr. kosten? Wir gehen von 1 Pfd. auf 1 Ctr. und von 1 Ctr. auf 3 Ctr. Hier ists umgekehrt. Wie werden wir also rechnen? Wir gehen von 3 Ctr.

auf 1 Ctr. und von 1 Ctr. auf 1 Pfd. Das ist der Gang. Nun geht's zur Ausrechnung. Resultat: 4 kr.

Aufl. b. 3 Ctr. = 300 Pfd.; diese kosten 20 fl.; also kostet 1 Pfd. den 300. Theil von 20 fl.; 20 fl. = 1200 kr.; $1/_{300}$ von 1200 kr. = 4 kr.

Aufg. z. Kopf- oder Denkrechnen S. 17, Stufe 9—14.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. $1/_8$ von 1256 fl. 56 kr. =?

Ausrechnung:

```
8 | 1256 fl. 56 kr. | 157 fl.  7 kr.
  |  8       56     |           8
    ---      --     ---------------
    45              1256 fl. 56 kr.
    40
     56
     56
     --
```

Der 8. Theil von 1256 fl. = 157 fl., und der 8. Theil von 56 kr. = 7 kr.; also ist der 8. Theil von 1256 fl. 56 kr. = 157 fl. 7 kr. Nimmt man den 8. Theil 8mal, so ergibt sich das Ganze. 8 × 157 fl. 7 kr. gibt wieder 1256 fl. 56 kr.

Beisp. 2. Wie viel ist a) $1/_{24}$ von 21 fl.? b) $1/_{36}$ von 31 Pfd. 16 Lth.?

Ausrechnung.

```
a) 24 | 21 fl. | — fl.              b) 36 | 31 ℔ 16 Lth. | — ℔
      | 60                                | 32
       ------                              ---
       1260 kr. | 52 kr.                   62
       120                                93
       ---                                 16
        60                           36 | 1008 Lth. | 28 Lth.
        48                                 72
       ---                                ---
        12 kr.                            288
         4                                288
       ---                                ---
   24 | 48 pf. | 2 pf.
        48
       ---
```

a. Der 24. Theil von 21 fl. ist nicht 1 fl.; ich mache daher die 21 fl. durch 60 zu Kreuzer; 21 fl. = 1260 kr.; der 24. Theil von 1260 kr. = 52 kr., Rest 12 kr.; 12 kr. = 12 × 4 oder 4 × 12 = 48 pf.; der 24. Theil von 48 pf. = 2 pf. Also ꝛc.

b. Der 36. Theil von 31 Pfund ist nicht 1 Pfund; ich mache sie daher zu Loth und zähle die 16 Loth dazu. 1 Pfd. = 32 Loth, also sind 31 Pfund = 31 × 32 oder 32 × 31 Loth; 32 × 31 Loth + 16 Loth = 1008 Loth. Der 36. Theil von 1008 Loth = 28 Loth; also ꝛc.

Beispiel 3. Wie viel beträgt $^1/_{25}$ von 837 fl. 48 kr. 3 pf.?

Ausrechnung.

```
25 | 837 fl.    48 kr.     3 pf. | 33 fl. 30 kr. 3 pf.
      75       720        72
      ---      ---        ---
      87       768 kr.    75 pf.
      75        75        75
      ---      ---        ---
      12        18
      60         4
      ---      ---
     720        72
```

Der 25. Theil von 837 fl. = 33 fl., Rest 12 fl.; 12 fl. = 720 kr.; 720 kr. + 48 kr. = 768 kr.; der 25. Theil von 768 kr. = 30 kr., Rest 18 kr. oder 72 pf.; 72 pf. + 3 pf. = 75 pf.; der 25. Theil von 75 pf. = 3 pf. Also ist ꝛc.

Beispiel 4. Das Pfd. Saffran zu 37 fl. 20 kr.; wie hoch kommt das Quint?

Aufl. Was 1 Qt. kostet, kann ich berechnen, wenn ich weiß, was 2 Qt., oder 3 Qt., oder 4 Qt. ꝛc. kosten. Ich mache daher das Pfd. zu Quint. 1 Pfd. = 32 Lth. = 128 Qt. Jetzt heißt die Aufgabe: 128 Qt. Saffran kosten 37 fl. 20 kr.; wie hoch kommt 1 Qt.? 1 Qt. ist von 128 Qt. $^1/_{128}$; also kostet 1 Qt. auch den 128. Theil von 37 fl. 20 kr. Der 128. Theil von 37 fl. ist kein ganzer Gulden; daher mache ich die Gulden sogleich zu Kreuzer.

```
Ausr.        3 7 fl.  2 0 kr.
               6 0
      1 2 8 | 2 2 4 0 kr. | 1 7 kr.
            | 1 2 8
              -----
                9 6 0
                8 9 6
                -----
                  6 4
                    4
       1 2 8 | 2 5 6 pf. | 2 pf.
             | 2 5 6
```

Das Quint kostet also 17 kr. 2 pf.

Aufg. z. Zifferr., 29. u. 30. Uebung.

Regeldetri= oder Verhältniß=Aufgaben,

durch Schlüsse aufgelöst.

Die Regeldetri= oder Verhältnißaufgaben sind, wenn man blos auf die Zahlen sieht, dreierlei Art. Bei ihrer Auflösung schließt man entweder

a. von der Einheit auf eine Mehrheit, oder
b. von einer Mehrheit auf die Einheit, oder
c. von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit.

Aufgaben der beiden ersten Arten haben wir bisher schon in jedem Kursus behandelt, besonders beim Multipliciren und Dividiren benannter Zahlen. Da hierbei aber einmal nur Aufgaben aus der Multiplikations-Regeldetri und dann wieder nur Aufgaben aus der Divisions-Regeldetri gegeben worden sind; so ist es jetzt nothwendig, daß den Schülern beide Arten vermischt vorgeführt werden. Das geschieht nun zuerst, dann gehen wir auf den dritten Fall über.

1) Es wird von der Einheit auf eine Mehrheit geschlossen und umgekehrt.

1) 1 Pfd. Mehl kostet 7 kr. 2 pf.; wie hoch kommen 25 Pfd.? (25 ℔ = 25 × 1 ℔; also kosten sie auch 25 × 7 kr. 2 pf.; 25 × 7 kr. 2 pf. = 25 × $^1/_8$ fl. = $3^1/_8$ fl. oder 3 fl. $7^1/_2$ kr.) 2) Aus 8 Schock Roggen wurden 7 Schff. gedroschen; wie viel aus 1 Schock? (1 Schck. ist $^1/_8$ von 8 Schck.: also wurde aus 1 Schck. auch nur $^1/_8$ von 7 Schff. gedroschen. 7 Schff. = 7 × 6 oder 42 Mtz.; $^1/_8$ von 42 Mtz. = 5 Mtz., Rest 2 Mtz.; 2 Mtz. = 8 Vrtl.; $^1/_8$ von 8 Vrtl. = 1 Vrtl. Also wurden aus 1 Schck. 5 Mtz. 1 Vrtl. gedroschen.) — 3) A hat eine monatliche Einnahme von 37 fl.; wie viel beträgt seine jährliche? (1 Jahr = 12 × 1 Monat; also nimmt A in 1 Jahre 12mal so viel ein, als in 1 Monat, nämlich 12 × 37 fl.; 12 × 37 fl. = 444 fl. — 4) B hat eine jährliche Einnahme von 720 fl.; wie viel beträgt seine monatliche? (1 Mon. = $^1/_{12}$ von 1 Jahre; also beträgt der monatliche Gehalt $^1/_{12}$ des jährlichen. Der 12. Theil von 720 fl. = 60 fl.) — 5) Ein Kostgänger zahlt täglich 42 kr.; wie viel in 6 Wch. 3 Tg.? (6 Wch. 3 Tg. = 6 × 7 + 3 oder 45 Tg.; für 1 Tag beträgt das Kostgeld 42 kr., für 45 Tg. also 45 × 42 kr.; 45 × 42 kr. = 31 fl. 30 kr.) — 6) Ein Taglöhner verdient in 2 Wch. 3 Tg. 13 fl.; wie viel täglich? (2 Wch. 3 Tg. = 2 × 6 + 3 oder 15 Arbeitstage; verdient er in 15 Tg. 13 fl., so kommt auf 1 Tg. $^1/_{15}$ von 13 fl., nämlich 52 kr.) — 7) 1 Buch Papier gibt 8 Schreibhefte; wie viel Schreibhefte geben 6 Ries? (Ich schließe von 1 Buch auf 1 Ries und von 1 Ries auf 6 Ries. Also: 1 Buch gibt 8 Schreibhefte; 1 Rs. = 20 × 1 Bch., also gibt es 20 × 8 Hefte = 160 Hefte; 6 Rs. geben daher 6 × 160 Hefte, macht 960 Hefte.) — 8) A schenkt an 4 Fdr. Bier 96 Tg. lang aus; wie lange an 1 Eimer? (Ich gehe von 4 Fdr. auf 1 Fdr. und von 1 Fdr. auf 1 Eimer. 4 Fdr. reichen auf 96 Tg., 1 Fdr. reicht den 4. Theil so lang, d. i. auf 24 Tg.; reicht aber 1 Fdr. auf 24 Tg., so reicht 1 Eimer auf den 12. Theil dieser Zeit, d. i. auf 2 Tage.) — 9) Für 48 kr. kauft man 1 ℔ Tabak; wie viel für 12 fl. (Für 12 fl. erhält man so vielmal 1 ℔ Tabak, als 48 kr. in 12 fl. enthalten sind. Macht 15 × 1 ℔ oder 15 ℔.)

Aufgaben z. Zifferr., 31. Uebung.

2. Es wird von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit geschlossen.

Hier unterscheiden sich wieder zweierlei Fälle.

a) Die eine Mehrheit ist ein reines Vielfaches, oder ein einfacher Theil von der andern.

Zuerst werden Gruppen von Aufgaben über einzelne Produktzahlen und deren Faktoren gebildet. Z. B.

$$12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2.$$

a.	b.
12 ℔ sind 2mal so viel als 6 ℔	Von 12 ℔ sind 6 ℔ die Hälfte.
3 „ „ „ „ 4 ℔	4 ℔ ein Drittel.
4 „ „ „ „ 3 ℔	3 ℔ ein Viertel.
6 „ „ „ „ 2 ℔	2 ℔ ein Sechstel.

a. Wenn **6** Pfd. Mehl 45 kr. kosten, so kosten 12 Pfd. 2mal so viel, also 2 × 45 kr. oder 1 fl. 30 kr. Wenn **4** Pfd. Mehl 45 kr. kosten, so kosten 12 Pfd. 3mal so viel, also 3 × 45 kr. oder 2 fl. 15 kr. Wenn **3** Pfd. Mehl 45 kr. kosten, so kosten 12 Pfd. 4mal so viel, also 4 × 45 kr. oder 3 fl. Wenn **2** Pfd. Mehl 45 kr. kosten, so kosten 12 Pfd. 6mal so viel, also 6 × 45 kr. oder 4 fl. 30 kr.

b. Wenn 12 Pfd. Kaffee 9 fl. kosten, so kosten **6** Pfd. davon $^1/_2$mal so viel, also nur die Hälfte von 9 fl. oder 4 fl. 30 kr.; **4** Pfd. kosten nur $^1/_3$mal so viel, also nur den 3. Theil von 9 fl. oder 3 fl.; **3** Pfd. kosten nur $^1/_4$mal so viel, also nur den 4. Theil von 9 fl. oder 2 fl. 15 kr.; **2** Pfd. kosten nur $^1/_6$ mal so viel, also nur den 6. Theil von 9 fl. oder 1 fl. 30 kr.

In dieser Weise behandle der Lehrer noch einige Produktzahlen und bilde Aufgaben dazu. So etwas muß aus dem Stegreife gehen, frisch und frei. Auch die Schüler werden dazu aufgefordert. Nur darf es bei diesen kein „Müssen" sein. Derartige selbstständige Arbeiten machen ihnen aber in der Regel Freude. Gestattet der Lehrer, daß sie die zu behandelnden Zahlen selbst bestimmen, so wird ihnen die Arbeit ganz und gar als eine frei gewählte erscheinen, und sie werden dieselbe dann um so lieber verrichten.

Nach dieser Uebung werden folgende Aufgaben ohne Schwierigkeit gerechnet werden, wobei übrigens folgende Auflösungsweise zu empfehlen sein dürfte.

Beispiel 1. 12 Mann verdienen 13 fl., wie viel 96 Mann?

Aufl. Berechnet soll werden, was 96 Mann verdienen; nach der Aufgabe wissen wir, was 12 Mann verdienen; 12 Mann verdienen 13 fl.; 96 Mann sind 8 × 12 Mann; also verdienen sie auch 8 × 13 fl.; 8 × 13 fl. = 80 + 24 oder 104 fl. Also ꝛc.

Beispiel 2. 96 Mrg. ertrugen 118 Schff., wie viel 16 Mrg.?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel 16 Mrg. ertrugen; die Aufgabe sagt uns, wie viel 96 Mrg. ertrugen; 96 Mrg. ertrugen 118 Schff.; 16 Mrg. sind von 96 Mrg der sechste Theil; mithin ertrugen sie auch den 6. Theil von 118 Schff.; 118 Schff. = 60 + 58 Schff.; der 6. Theil von 60 Schff. = 10 Schff., von 58 Schff. = $9^2/_3$ Schff., von 118 Schff. also $19^2/_3$ Schff. Folglich ertrugen ꝛc.

1) Für 4 Thlr. erhält man 13 ℔ Flachs; wie viel für 48 Thlr.? 2) 84 Ellen Leinwand kosten 34 fl.; wie hoch kommen 21 Ellen? 3) 3 ℔ Mehl geben 4 ℔ Brod; wie viel Brod geben demnach 120 ℔ Mehl? 4) 45 Personen, worunter 1 Vater mit 2 Söhnen, haben im Gasthause für 48 fl. gezehrt; wie viel muß der Vater für sich und seine Söhne daran zahlen? 5) 6 ℔ Garn geben 25 Ellen Tuch; wie viel Tuch geben 54 ℔ Garn von derselben Sorte? 6) Von 1200 Mann fielen in einem Gefechte 96; wie viel von 100 Mann? 7) An 15 ℔ verdient ein Kaufmann 2 fl. 12 kr.; wie viel an 90 ℔) 8) In 360 Tg. gehen bei einer Familie 8 Schff. Roggen auf; wie viel in 30 Tg.? 9) In 13 Wochen verbrauchte eine Hausfrau 75 Pfd. Mehl; wie viel in 1 Jahre? 10) Der Ctr. Heu kostet 2 fl. 30 kr.; wie berechnen sich 20 Pfd.? 11) In 7 Std. mahlt ein Müller 5 Schff. 4 Mtz.; wie viel in 2 Tg. 18 Std.? 12) Für 1 fl. 12 kr. erhalte ich 1 Elle; wie viel für 8 fl. 24 kr.?

Aufg. z. Zifferr., 32. Uebung.

b. Die eine Mehrheit ist weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von der andern.

Beispiel. 3 ℔ kosten 27 kr.; was ist für 10 ℔ zu zahlen?

Verfahren: Was soll nach unserer Aufgabe berechnet werden? (Was 10 ℔ kosten.) Welche Zahlen sind einfache Theile von 10? (1, 2, 5.) Und von welchen Zahlen ist 10 selbst wieder ein einfacher Theil? (Von 20, 30, 40 rc.) Was 10 ℔ kosten, können wir also auf einmal finden, wenn wir wissen, was 1 Pfd. kostet, oder was 2 Pfd., 5 Pfd., 20 Pfd. rc. kosten. Das wissen wir aber nicht; denn die Aufgabe sagt uns, was 3 Pfd. kosten. Wie kommen wir nun von 3 Pfd. auf 10 Pfd.? Welche Zahl ist ein einfacher Theil von 3 und von 10 zugleich? (1) Wie werden wir also rechnen? (Wir gehen von 3 Pfd. auf 1 Pfd und von 1 Pfd. auf 10 Pfd.) Ausr. 3 Pfd. kosten 27 kr.; 1 Pfd. kostet $\frac{1}{3}$ von 27 kr. oder 9 kr., und 10 Pfd. kosten 10 × 9 kr. oder 1 fl. 30 kr.

Aufgaben.

1) Von 6 Morgen erntet man 21 Schock Weizen; wie viel von 11 Mrg.? 2) 7 Ellen zu 56 kr., was kosten 24 Ellen? 3) In 5 Tg. verdient man 4 fl. 15 kr.; wie viel in 12 Tg.? 4) 8 Loth kosten 1 fl. 36 kr.; was kosten 23 Loth? 5) In 4 Tg. verdient Jemand 2 fl. 48 kr.; wie viel in einer Woche? in 4 Wch.? 6) 10 Ms. zu 6 fl., was kosten 15 Ms.? (Auf zweierlei Weise.) 7) 24 Stück zu 36 fl., was kosten 16 Stück? 8) 20 Ellen zu 48 fl., was kosten 45 Ellen?

B. Schriftlich.

Beisp. 8 Pfd. kosten 17 fl. 48 kr.; wie hoch kommen 15 Pfd.?

Ausrechnung.

8 Pfd. kosten 17 fl. 48 kr.
1 Pfd. kostet $\frac{1}{8}$ × 17 fl. 48 kr. = 2 fl. 13 kr. 2 pf.
15 Pfd. kosten 15 × 2 fl. 13 kr. 2 pf. = 33 fl. 22 kr. 2 pf.

Anm. Hier ist den Schülern besonders zu bemerken, daß $^1/_2 \times 4$ so viel ist, als die Hälfte von 4, $^1/_3 \times 6 = {^1/_3}$ von 6, $^1/_4 \times 24 = {^1/_4}$ von 24, daß man also anstatt $^1/_8$ von 17 fl. 48 kr. setzen könne: $^1/_8 \times$ 17 fl. 48 kr., und daß man dies der einfacheren Bezeichnung wegen thue.

Aufgaben z. Zifferr., 33. Uebung.

Fragen und Aufgaben für Präparanden und Seminaristen.

1) Was heißt resolviren? was reduciren? **2)** Wie kann die Zahl 8 Ctr. 72 Pfd. 15 Loth 2 Qt. noch auf dreierlei Art ausgedrückt werden? **3)** Eben so 27583 Bg.? **4)** Rechne 13 × 275 Schff. 4 Mt. auf zweierlei Weise! **5)** Eben so $^1/_{17} \times$ 7251 fl. 4 kr.! **6)** Rechne jede von den folgenden 4 Aufgaben auf doppelte Art aus, ohne jedoch die höhere Sorte in die niedere zu verwandeln!

a. 5 × (1783 fl. 51 kr. + 3275 fl. 47 kr.) =?
b. 7 × (375 Ctr. 74 Pfd. — 187 Ctr. 92 Pfd.) =?
c. $^1/_5 \times$ (764 Schff. 1 Mtz. + 647 Schff. 3 Mtz.) =?
d. $^1/_7 \times$ (890 Fdr. 9 Eim. — 586 Fdr. 10 Eim.) =?

7) Vervielfache und theile die Zahl 7284 fl. 30 kr., ohne die Gulden in Kreuzer aufzulösen, auf je dreierlei Weise durch 15! (6 Rechnungen.) **8)** In welchem Sinne ist die Aufgabe 37 Pfd. : 7328 Pfd. =? zu lösen? **9)** In welchem Sinne 43 : 8425 Ellen =? **10)** Wenn 1 Loth Kaffee 1 kr. 2 pf. kostet, wie viel Pfd. erhält man für 100 fl.? **11)** Ein Lehrer gibt wöchentlich 3 Std. Privatunterricht und erhält dafür vierteljährig 11 fl. 42 kr.; wie theuer kommt die Stunde? **12)** Wie viel Krthlr. machen 216 Vereinsthlr.? **13)** Ein Winzer verkauft von 17 Fdr. 3 E. $^4/_9$ und vom Reste wieder $^4/_5$; wie viel bleibt ihm? **14)** A hat jährlich den 20. Theil eines erborgten Kapitals als Interesse zu entrichten; wie groß ist dasselbe, wenn er monatlich 13 fl. 48 kr. Zins zu zahlen hat? **15)** Ein Landmann erntet 143 Schock 20 Garben Korn und Weizen; davon sind 25 Schock 48 G. weniger Korn als Weizen; wie viel von jeder Art? **16)** Der Ladenpreis eines Buches ist 3 fl. 51 kr.; bei einer Abnahme von 10 Exemplaren wird das 11. gratis gegeben; wie theuer kommt dann 1 Exemplar? **17)** An Vereinsthlr. und Krthlr. besitzt Jemand 155 fl. 27 kr., an Krthlr. und Fünffrkthlr. 130 fl. 22 kr., an Vrsthlr. und Fünffrkthlr. 118 fl. 25 kr. Wie viel Stück hat er von jeder Sorte?

Fünfter Cursus.

Die gemeinen Brüche.

Da der einfache gemeine Bruch durch zwei ganze Zahlen bezeichnet wird, und jede Operation an demselben die Veränderung der einen, oder der andern, oder beider in sich schließt; so ist das Bruchrechnen zuletzt auch nur ein Rechnen mit ganzen Zahlen. Wie viel z. B. $^3/_4 \times ^2/_5$ ist, wird gefunden, indem man 2 durch 3 und 5 durch 4 multiplicirt. Die Ausführung der Operationen macht daher dem Schüler keine Schwierigkeit. Er braucht nur zu wissen, wie in jedem Falle zu verfahren ist. Darum läßt sich die ganze Bruchrechnung auch so abfertigen, daß man für jeden Fall das Verfahren durch eine bestimmte Vorschrift oder Regel bezeichnet und dann an einer Anzahl von Aufgaben einübt. Auf diese Weise von einer Operation und Regel zur andern übergehend, macht der Unterricht allerdings wenig Mühe und geht äußerst rasch von Statten; aber das Sprichwort: „Wie gewonnen, so zerronnen" bestätigt sich auch hier. Nur das durch Mühe und Arbeit langsam Erworbene ist bleibendes Eigenthum. Was der menschliche Geist nicht vollständig verarbeitet, in ein gewissermassen sich Gleichartiges verwandelt und sich assimilirt hat, hält er auf die Dauer nicht fest. Sind daher Regeln blos gedächtnißmäßig aufgefaßt, so werden sie früher oder später, oft schon in wenigen Wochen oder Monaten, wieder vergessen, und mit ihnen ist auch das Können dahin.

Dieß erkennend, sucht man schon seit vielen Jahren dem Unterrichte im Bruchrechnen dadurch einen nachhaltigen Erfolg zu sichern und zugleich einen bildenden Einfluß abzugewinnen, daß man eine Operation nach der andern einigemal anschaulich darstellt, hieraus die Regel ableiten läßt und dann zur Einübung übergeht. Das Lehrverfahren ist gewiß das rechte. Der Lehrgang jedoch ist der alte und darum auch der Erfolg nicht der gehoffte. Durch die gleichzeitige Vorführung ähnlicher Fälle, welche nach dem Lehrgange nothwendig stattfinden muß, wird dem Schüler sogleich von vornherein die Regel zu nahe gelegt und daher so schnell ergriffen, daß der Lehrer gegen ihre sofortige und gedankenlose Anwendung sofort auch anzukämpfen hat. Der Schüler wird mit dem Objekte selbst nicht genug vertraut. Der zwischen

der Sache und der Regel bestehende innere Zusammenhang wird von ihm durch die paarmalige Veranschaulichung nicht so tief erfaßt, daß er sich dessen später beliebig wieder bewußt sein kann. Die Regel gleicht daher gar bald einem abgetrennten Reis und ist dann wie dieses dem Verkommen verfallen.

Soll der Unterricht im Bruchrechnen in der That von nachhaltigem Erfolge sein, so muß der allgemeinen Bruchlehre ein Begründungskursus vorausgehen, in dem nicht die Operation und Regel, sondern das Objekt selbst, die Bruchzahl, Grund der Eintheilung ist, in dem also von Stufe zu Stufe ein Bruch nach dem andern einzeln, anschaulich und allseitig behandelt wird. Begreiflich geschieht solches mit Brüchen, welche der Anschauung leicht zugänglich sind und im praktischen Rechnen häufig angewendet werden. Ein großer Vorzug dieses Lehrgangs besteht also schon darin, daß der Schüler mit den gebräuchlichsten Brüchen vollständig vertraut wird. Durch die allseitige und wiederholte äußere und innere Anschauung eines jeden derselben verbinden sich Sache und Zeichen, Begriff und Ausdruck so innig miteinander, daß eine Trennung kaum mehr stattfinden kann. Der Besitz ist gesichert. Ein anderer Vorzug ist, daß der Schüler auf jeder Stufe mit der Bruchzahl sogleich auch rechnet, daß er dieß zunächst nur bei unmittelbarer Anschauung thut, daß er bei dem darauf folgenden freien Kopfrechnen keine Aufgabe löst und lösen kann, ohne sich die Sache deutlich vorzustellen, und daß das Zifferrechnen wieder nichts anderes als ein in Ziffern ausgeführtes Kopfrechnen ist.

Die Methode, die allgemeine Bruchlehre durch die individuelle Behandlung einer Reihe von Brüchen zu begründen, trägt daher die Gewähr eines nachhaltigen Erfolges schon in sich. Ihre Zweckmäßigkeit hat sich aber auch bereits durch die Praxis herausgestellt. Darum kann und muß man wünschen, daß sie überall Eingang finde. Wer den redlichen Willen hat, diesen Theil der Arithmetik so zu lehren, daß dem Schüler ein bleibender Gewinn daraus erwachse, der wird, hat er den Gegenstand einmal in nachstehender Weise behandelt, sich nimmer entschließen können, davon abzuweichen. Nur ist unverrückt im Auge zu behalten, daß es zunächst weniger auf Fertigkeit, als auf klares Verständniß abzusehen sei.

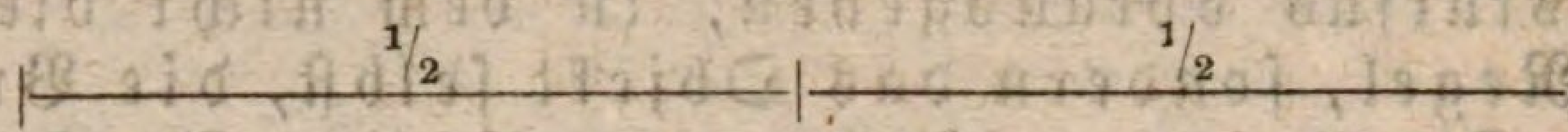
Was die bisherigen Curse für die ganze Zahl sind, das ist der gegenwärtige für die Bruchzahl. Derselbe zerfällt in drei Abtheilungen. Die erste Abtheilung entspricht dem ersten (und zweiten) Cursus und hat die individuelle Behandlung einer Anzahl von Brüchen zum Gegenstande; die zweite Abtheilung entspricht dem dritten Cursus und hat es mit der Lehre von den Brüchen überhaupt und zwar in reinen und einfach benannten Zahlen zu thun; die dritte Abtheilung endlich entspricht dem vierten Cursus und beschäftigt sich mit dem Bruchrechnen in mehrfach benannten Zahlen.

Erste Abtheilung.

Die Behandlung einzelner Brüche.

Halbe.

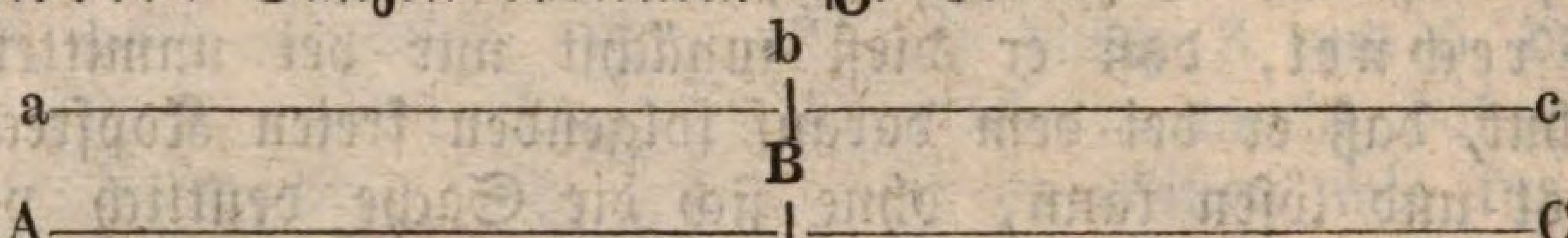
A. Mündlich und durchaus mit Anschauung.



Theile ich dieses Ganze (ein Stäbchen, einen Papierstreifen, eine Nuß, 1 Apfel, 1 Linie) in zwei gleiche Theile; so erhalte ich zwei Halbe. Ein Theil davon ist ein Halbes. Ein Halbes erhalte ich daher, wenn ich 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theile und einen davon nehme. — Wie viel beträgt $^1/_2$ fl.? $^1/_2$ Schff.? ꝛc.

a.	b.	c.	d.
$^1/_2 + {}^1/_2 = 1$	$2 \times {}^1/_2 = 1$	$^1/_2$ in $^1/_2 = 1$mal	1 in 1 = 1mal.
$1 - {}^1/_2 = {}^1/_2$	$^1/_2 \times 1 = {}^1/_2$	$^1/_2 : 1 = 2$mal	$1 : {}^1/_2 = {}^1/_2$mal.

Zur anschaulichen Behandlung der Aufgaben unter c und d muß man sich zweier Ganzen bedienen. Z. B.



Ich denke mir das Halbe a b in das Halbe A B gelegt, und da sich beide vollständig decken, so ist $^1/_2$ in $^1/_2$ genau einmal enthalten.

Das Halbe ab kann ich mir einmal in AB gelegt denken und einmal in BC; also ist $^1/_2$ in $^2/_2$ oder in 1 Ganzen 2mal enthalten.

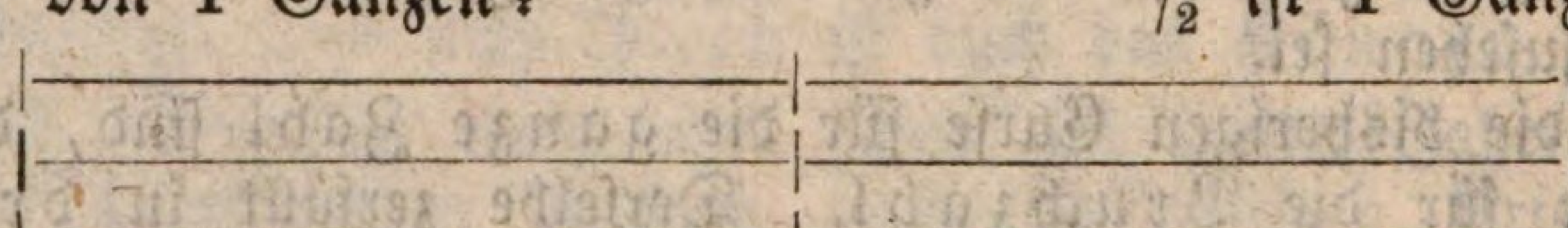
Die 2 Halben ab und bc können in das eine Halbe AB oder BC nicht vollständig, sondern nur zur Hälfte gelegt werden; $^2/_2$ sind daher in $^1/_2$ nur $^1/_2$mal enthalten; 1 liegt in $^1/_2$ nur $^1/_2$mal.

So verfahre man später auch bei den 3teln, 4teln ꝛc.

c. Wie groß ist der Unterschied zwischen $^1/_2$ und 1?

Der wie vielte Theil ist $^1/_2$ von 1 Ganzen? Das Wievielfache von $^1/_2$ ist 1 Ganzes?

f.



Das erste Ganze = $^2/_2$; das andere G. gibt wieder $^2/_2$; 2 G. machen also $2 \times {}^2/_2$ oder $^4/_2$; das dritte G. gibt wieder $^2/_2$; 3 G. machen also $3 \times {}^2/_2$ oder $^6/_2$ u. s. w.

So zuerst; dann

5 G. = $5 \times {}^2/_2$ od. $^{10}/_2$; 8 G. = $8 \times {}^2/_2$ od. $^{16}/_2$ u. s. w.

$1^1/_2 = {}^2/_2 + {}^1/_2 = {}^3/_2$; $5^1/_2 = {}^{10}/_2 + {}^1/_2 = {}^{11}/_2$; $8^1/_2 = {}^{17}/_2$ ꝛc.

Wie viel Ganze machen $^8/_2$? $^2/_2 = 1$ G. Nehme ich daher $^2/_2$ von $^8/_2$ weg, so habe ich 1 G.; nehme ich vom Reste wieder $^2/_2$, so habe ich wieder 1 G. u. s. f.; $^8/_2$ sind daher so vielmal 1 G.,

als $^2/_2$ in $^8/_2$ enthalten sind; $^2/_2$ sind in $^8/_2$ 4 mal enthalten; also sind $^8/_2 = 4 \times 1$ G. oder 4 G.

$^{14}/_2 = ?$ G. $^2/_2$ sind in $^{14}/_2$ 7 mal enthalten; $^{14}/_2 = 7$ G.
$^{10}/_2 = ?$ G. $^2/_2$ sind in $^{10}/_2$ 5 mal enthalten; $^{10}/_2 = 5$ G.
$^{18}/_2 = ?$ G. $^2/_2$ sind in $^{18}/_2$ 9 mal enthalten; $^{18}/_2 = 9$ G. ꝛc.

So wieder zuerst; dann $^{16}/_2 = 8$, $^{28}/_2 = 14$, $^{44}/_2 = 22$ ꝛc.

$^{11}/_2 = {}^{10}/_2 + {}^1/_2 = 5^1/_2$; $^{17}/_2 = {}^{16}/_2 + {}^1/_2 = 8^1/_2$; $^{25}/_2 = 12^1/_2$ u. s. w.

B. Frei im Kopfe.

a. $^1/_2 + {}^1/_2 = 1$
$1 + {}^1/_2 = 1^1/_2$ od. anderthalb
$1^1/_2 + {}^1/_2 = 2$
$2 + {}^1/_2 = 2^1/_2$ od. dritthalb
So fort bis 10.

b. $10 - {}^1/_2 = 9^2/_2 - {}^1/_2 = 9^1/_2$.
$9^1/_2 - {}^1/_2 = 9$
$9 - {}^1/_2 = 8^2/_2 - {}^1/_2 = 8^1/_2$
$8^1/_2 - {}^1/_2 = 8$
u. s. w.

c. $5+3^1/_2=?$ Antw.: $5+3=8$, $8+{}^1/_2=8^1/_2$; $5+3^1/_2=8^1/_2$.
$8^1/_2+4=?$ Antw.: $8+4=12$, $12+{}^1/_2=12^1/_2$; $8^1/_2+4=12^1/_2$.
$4^1/_2+5^1/_2=?$ Antw.: $4+5=9$, $^1/_2+{}^1/_2=1$, $9+1=10$. Oder: $4^1/_2+5=9^1/_2$, $9^1/_2+{}^1/_2=10$.

d. $6^1/_2-2=?$ Die Ganzen von den G.; $6-2=4$; $6^1/_2-2=4^1/_2$.
$8-5^1/_2=?$ Antw.: $8-5=3$, $3-{}^1/_2=2^1/_2$; $8-5^1/_2=2^1/_2$.
$9^1/_2-4^1/_2=?$ Antw.: $9^1/_2-4=5^1/_2$, $5^1/_2-{}^1/_2=5$; $9^1/_2-4^1/_2=5$. Od.: 4 von 9 bleibt 5, $^1/_2$ von $^1/_2$ geht auf; also ist ꝛc.

e. $3\times2^1/_2=?$ Antw.: $3\times2^1/_2=3\times2+3\times{}^1/_2=6+1^1/_2=7^1/_2$.
$^1/_2\times5=?$ Antw.: $^1/_2\times1={}^1/_2$, $^1/_2\times5={}^5/_2=2^1/_2$.
$4^1/_2\times6=?$ Antw.: $4^1/_2\times6=4\times6+{}^1/_2\times6=24+3=27$.

f. $^1/_2 : 4=?$ $^1/_2$ ist in 1 G. 2mal, in 4 G. 4mal so oft, also 8mal.
$1^1/_2 : 6=?$ $1^1/_2={}^3/_2$, $6={}^{12}/_2$; $^3/_2$ sind in $^{12}/_2$ 4mal enthalten.
$2^1/_2 : 7^1/_2=?$ $2^1/_2={}^5/_2$, $7^1/_2={}^{15}/_2$; $^5/_2$ sind in $^{15}/_2$ 3mal enth.

C. Schriftlich.

Was Seite 17 über die Einführung in das schriftliche Rechnen mit der ganzen Zahl gesagt ist, gilt hier auch in Betreff der Brüche. Denn das schriftliche Rechnen fällt auch hier der Ausführung nach mit dem mündlichen zusammen.

Aufgaben z. Zifferr., 34. Uebung.

Aufgaben verschiedener Art.

1) Wie viel muß man zu $3^1/_2$ legen, um 8 zu erhalten? Wie viel ist $8 - 3^1/_2$? Wie groß ist also der Unterschied zwischen $3^1/_2$ und 8? 2) Was für ein Theil ist $^1/_2$ von 3? von $3^1/_2$? 3) Wie vielmal so groß, als $^1/_2$, ist $4^1/_2$? 4) A kauft die Maas Wein um $13^1/_2$ kr. und verkauft sie wieder mit $4^1/_2$ kr. Gewinn, wie theuer also?

5) Von 10 Ctr. Kaffee werden $4\frac{1}{2}$ Ctr. verkauft; wie viel bleibt? 6) 25 doppelte Vereinsthlr. (à $3\frac{1}{2}$ fl.), wie viele Gulden? 7) Was kosten 4 Pfd., wenn $\frac{1}{2}$ Pfd. 42 kr. kostet? 8) Wie hoch kommen $4\frac{1}{2}$ Eimer Bier, der Eimer zu 7 fl.? 9) $1\frac{1}{2}$ Elle zu 36 kr., was kosten 3 Ellen? (Auf zweierlei Weise.)

Drittel.

$\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$

Theile ich 1 Ganzes in 3 gleiche Theile, so erhalte ich Drittheile oder Drittel. $1 = \frac{3}{3}$. Ein Theil davon ist $\frac{1}{3}$, 2 Theile davon $= \frac{2}{3}$. Ein Drittel erhalte ich daher, wenn ich 1 Ganzes in 3 gleiche Theile zerlege und 1 Th. davon nehme; $\frac{2}{3}$ erhalte ich 2c. Sucht auf diese Weise $\frac{1}{3}$ von 1 fl., von 1 Buch Papier, von 1 Dutzend! Eben so $\frac{2}{3}$!

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$	$2 \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$
$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$	$1 - \frac{1}{3}$	$1 \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} : 1$	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3}$	$3 \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} : 1$	$1 : \frac{2}{3}$

Wie groß ist der Unterschied von $\frac{2}{3}$ u. $\frac{1}{3}$? von $\frac{1}{3}$ u. 1?

Der wie vielte Theil ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$? $\frac{1}{3}$ von 1?

Das Wievielfache ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{3}$? 1 von $\frac{1}{3}$?

Verwandlung ganzer Zahlen in 3tel und umgekehrt.

(Das Verfahren ist wie bei den Halben.

---

a. $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$;
$1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\frac{3}{3}=2$;
$2+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$;
$2\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2\frac{4}{3}=3\frac{1}{3}$;
u. s. f.

b. $10-\frac{2}{3}=9\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=9\frac{1}{3}$;
$9\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=9\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}$;
$8\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=8$;
$8-\frac{2}{3}=7\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=7\frac{1}{3}$;
u. s. f.

c.	d.	e.	f.
$4+5\frac{1}{3}$	$6-4\frac{1}{3}$	$8\times 6\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ in $4=\frac{1}{3} : 1$, 4mal $=$?
$6\frac{2}{3}+7$	$8\frac{2}{3}-5$	$\frac{1}{3}\times 4$	$\frac{2}{3} : 9=\frac{2}{3} : \frac{27}{3}=$
$3\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}$	$7\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times 4$	$1\frac{1}{3} : 6\frac{2}{3}=\frac{4}{3} : \frac{20}{3}=$
$5\frac{2}{3}+8\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}$	$4\frac{2}{3}\times 9$	$3\frac{1}{3} : 10=\frac{10}{3} : \frac{30}{3}=$

$9\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}=$? $9\frac{1}{3}-3=6\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=6\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=5\frac{2}{3}$. Oder:
$9\frac{1}{3}-3=6\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=5\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=5\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}\times 4=$? $\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Aufg. z. Zifferr., 35. Uebung.

---

1) Suche die Hälfte von $\frac{2}{3}$! von $4\frac{2}{3}$! von $1\frac{1}{3}$! von $7\frac{1}{3}$!
Die Hälfte von $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, von $4\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$. Die Hälfte von 1 ist nicht 1

Ganzes; $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; die Hälfte von $\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Auf die Hälfte von $7\frac{1}{3}$ kommen Ganze. $7\frac{1}{3} = 6 + 1\frac{1}{3} = 6 + \frac{4}{3}$; die Hälfte von $6\frac{4}{3} = 3\frac{2}{3}$.

2) Wie groß ist der Unterschied zwischen $4\frac{2}{3}$ und $10\frac{1}{3}$? **3)** Wie vielmal so groß als $\frac{2}{3}$ ist 6? (Wird gefunden, indem man sucht, wie oft $\frac{2}{3}$ in 6 enthalten ist.) **4)** Ziehe $12\frac{1}{3}$ von 25 ab! **5)** Von welcher Zahl sind $\frac{2}{3} = 12$? ($\frac{2}{3} = 12$, $\frac{1}{3} = 6$, die ganze Zahl also $= 3 \times 6$ oder 18.) **6)** Ein Winzer erntet von einem Weinberg $11\frac{2}{3}$ Eimer und von einem andern $13\frac{1}{3}$ Eimer; er verkauft davon $18\frac{2}{3}$ E.; wie viel behält er für sich? **7)** $\frac{1}{3}$ Fdr. zu $25\frac{1}{2}$ fl., was kosten $\frac{2}{3}$ Fdr.? **8)** $1\frac{1}{3}$ Elle zu 45 kr.; was kostet $\frac{1}{3}$ Elle?

Viertel.

| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 4 gleiche Theile zerlegt? — Wie erhalte ich $\frac{1}{4}$ von 1 Ganzen? Wie $\frac{3}{4}$ von 1 Ganzen? — Suche auf diese Weise $\frac{3}{4}$ von 1 fl., von 1 Ctr., von 1 Pfd., von 1 Eimer!

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$	$2 \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} : \frac{2}{4}$
$\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} - \frac{2}{2}$	$3 \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$	$\frac{2}{4} : \frac{1}{4}$
$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$	$1 - \frac{3}{4}$	$4 \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} : 1$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$

Der wie vielte Theil ist $\frac{1}{4}$ von 1? $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$? Das Wievielfache ist 1 von $\frac{1}{4}$? $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{4}$?

Verwandlung ganzer Zahlen in 4tel und umgekehrt.

---

a. $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}$
$1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=1\frac{5}{4}=2\frac{1}{4}$
$2\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=2\frac{4}{4}=3$
2c.

b. $10-\frac{3}{4}=9\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=9\frac{1}{4}$
$9\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=9\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=8\frac{2}{4}$
$8\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=8\frac{2}{4}-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=7\frac{3}{4}$;
2c.

c. $12 + 7\frac{1}{4}$	d. $9\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4}$	e. $12 \times 2\frac{3}{4}$	f. $\frac{3}{4} : 8\frac{1}{4}$
$15\frac{2}{4} + 8$	$10 - 3\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4} \times 7$	$1\frac{1}{4} : 10$
$5\frac{3}{4} + 4\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{4} \times 9$	$2\frac{3}{4} : 8\frac{1}{4}$

Aufg. z. Ziffërr., 36. Uebung.

---

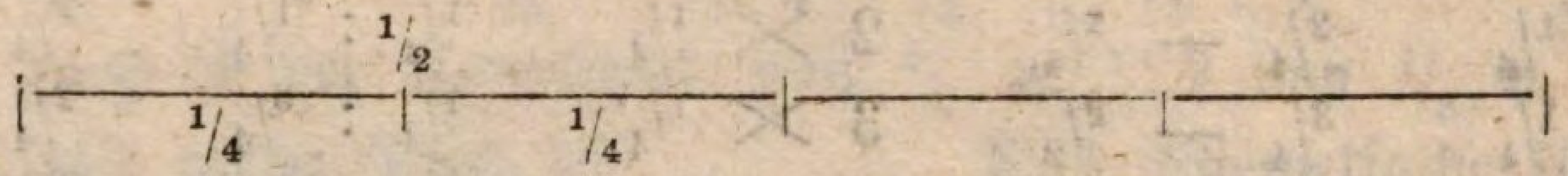
1) Wie viel beträgt der dritte Theil von $\frac{3}{4}$? von $2\frac{1}{4}$? von $3\frac{3}{4}$? von $7\frac{2}{4}$? — **2)** Suche $\frac{1}{5}$ von $2\frac{2}{4}$! $\frac{1}{6}$ von $28\frac{2}{4}$! **3)** Wie groß ist der Unterschied zwischen $4\frac{1}{4}$ und $11\frac{3}{4}$? — **4)** Ein Pfund zu $2\frac{3}{4}$ fl., wie viel kosten 12 Pfund? — **5)** Zu einem Rock braucht man $3\frac{3}{4}$ Ellen und zu einem Paar Beinkleider $2\frac{1}{4}$ Ellen; wie viel im Ganzen? — **6)** $\frac{1}{4}$ Ctr. zu $12\frac{1}{2}$ fl.; wie hoch kommt der Ctr.?

7) $^3/_4$ Eimer kosten 74 fl. 48 kr.; was kostet $^1/_4$ Eimer? — 8) Für $1^3/_4$ fl. fahre ich auf der Eisenbahn 12 Stunden weit; wie weit für $5^1/_4$ fl.? ($3 \times 12 = 36$ St.)

Halbe, Drittel, Viertel.

Hier theile ich ein Ganzes (1 Stäbchen oder einen Streifen Papier) in 2 gleiche Theile. Welcher von euch ist im Stande, aus diesen 2 Theilen 3 gleiche Theile zu machen? (Es wird versucht, aber es geht nicht; denn theilt man nur ein Halbes in 2 gleiche Theile, so werden aus den 2 Halben 3 ungleiche Theile, und theilt man jedes Halbe in 2 gleiche, so entstehen nicht 3, sondern 4 gleiche Theile.) Ist also einmal das Ganze in 2 gleiche Theile getheilt, so kann man es nicht mehr in 3 gleiche Theile theilen. Halbe lassen sich nicht in Drittel verwandeln.

Nun theile ich 1 Ganzes wieder in 2 gleiche Theile. Wer macht 4 gleiche Theile daraus? (Ein Schüler thut es.) Aus 2 gleichen Theilen lassen sich also 4 gleiche Theile machen; Halbe lassen sich in Viertel verwandeln.



$$^1/_2 = {^2/_4}; \; ^2/_4 = {^1/_2}.$$

Fragen: Was ist mehr: $^1/_2$ oder $^2/_4$? Was kann ich daher setzen für $^1/_2$? und was kann ich setzen für $^2/_4$? Nun könnt ihr auch folgende Aufgaben rechnen.

a.	b.	c.	d.	e.
$^1/_2 + {^1/_4}$	$^1/_2 - {^1/_4}$	$^1/_2 \times 1$	$^1/_4 : {^1/_2}$	$^1/_2 : {^3/_4}$
$^3/_4 + {^1/_2}$	$^3/_4 - {^1/_2}$	$^1/_2 \times {^1/_2}$	$^1/_2 : {^1/_4}$	$^3/_4 : {^1/_2}$

Bei a und b wird das Halbe in Viertel verwandelt. Bei c ist dem Schüler zur Einsicht zu bringen, daß Etwas $^1/_2$mal genommen wird, wenn man die Hälfte davon nimmt. $^1/_2 \times 1$ ist die Hälfte von 1; $^1/_2 \times {^1/_2}$ ist die Hälfte von $^1/_2$. — Zu d und e: Wie oft liegt $^1/_4$ in $^1/_2$? Antwort: So oft, als $^1/_4$ in $^2/_4$, nämlich 2mal ꝛc. Wie oft liegt $^1/_2$ in $^3/_4$? Antwort: So oft, als $^2/_4$ in $^3/_4$. Nun sind $^3/_4 = {^2/_4} + {^1/_4}$; $^2/_4$ sind in $^2/_4$ 1mal und in $^1/_4$ noch $^1/_2$mal, in $^3/_4$ also $1^1/_2$mal enthalten.

Wie groß ist der Unterschied zwischen $^1/_4$ u. $^1/_2$? $^1/_2$ u. $^3/_4$?
Der wie vielte Theil ist $^1/_4$ von $^1/_2$? Das Wievielfache ist $^1/_2$ v. $^1/_4$?
$^1/_4$ Pfd. Kaffee zu 12 kr. 2 pf.; wie theuer ist $^1/_2$ Pfd.?
$^1/_2$ Ctr. Mehl zu 3 fl. 45 kr.; was kostet $^1/_4$ Ctr.?
Was ist mehr: $^1/_3$ oder $^1/_4$? $^2/_3$ oder $^2/_4$? $^2/_3$ oder $^3/_4$?

Daß $^1/_3$ größer ist, als $^1/_4$, und daß eben darum auch $^2/_3$ größer sind als $^2/_4$, liegt nahe. Eine nähere Betrachtung verlangt die dritte Frage. Daß $^3/_4$ mehr betragen als $^2/_3$, wird erkannt: a) an zwei gleich großen Linien, wovon die eine in 3, die andere in 4 gleiche Theile getheilt ist; b) an $^2/_3$ und $^3/_4$ von einer Zahl, welche

durch 3 und 4 zugleich theilbar ist, z. B. von 12; $^2/_3$ von 12 = 8, $^3/_4$ von 12 = 9; c) indem man ins Auge faßt, daß zu $^2/_3$ noch $^1/_3$, zu $^3/_4$ aber nur noch $^1/_4$ auf ein Ganzes fehlt: denn hieraus folgt, daß der Bruch $^3/_4$ dem Ganzen näher steht, als der Bruch $^2/_3$, und demnach größer ist, als dieser.

Aufg. z. Ziffe rr., 37. Uebung.

Fünftel.

|—— $^1/_5$ ——|—— $^1/_5$ ——|—— $^1/_5$ ——|—— $^1/_5$ ——|—— $^1/_5$ ——|

Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 5 gleiche Theile theilt? — Wie erhalte ich also $^1/_5$ von 1 Ganzen? Wie $^2/_5$? $^3/_5$? $^4/_5$? — Sucht auf diese Weise $^2/_5$ von 1 fl., $^3/_5$ von 1 Thlr., $^4/_5$ von 1 Ctr.!

$^2/_5 + ^1/_5$	$^4/_5 - ^2/_5$	$3 \times ^1/_5$	$^2/_5 : ^4/_5$	$^3/_5 : ^2/_5$
$^2/_5 + ^2/_5$	$^3/_5 - ^2/_5$	$2 \times ^2/_5$	$^4/_5 : ^2/_5$	$^4/_5 : ^3/_5$
$^3/_5 + ^2/_5$	$1 - ^3/_5$	$^1/_5 \times 1$	$^3/_5 : ^4/_5$	$^2/_5 : 1$

Verwandlung ganzer Zahlen in 5tel und umgekehrt.

---

a. $^4/_5 + ^4/_5 = ^8/_5 = 1^3/_5$ b. $10 - ^4/_5 = 9^5/_5 - ^4/_5 = 9^1/_5$
$^8/_5 + ^4/_5 = ^{12}/_5 = 2^2/_5$ $9^1/_5 - ^4/_5 = 9^1/_5 - ^1/_5 - ^3/_5 = 8^2/_5$
$^{12}/_5 + ^4/_5 = ^{16}/_5 = 3^1/_5$ 2c. $8^2/_5 - ^4/_5 = 7^3/_5$ u. s. w.

c. $8 + 5^1/_5$	d. $5^4/_5 - 2$	e. $8 \times ^4/_5$	f. $^1/_5 : 8$
$9^3/_5 + 4$	$10 - 3^3/_5$	$6 \times 7^3/_5$	$^4/_5 : 12$
$4^2/_5 + 7^1/_5$	$12^3/_5 - 4^1/_5$	$^3/_5 \times 6$	$^3/_5 : 2^2/_5$
$5^4/_5 + 8^3/_5$	$11^1/_5 - 7^4/_5$	$2^1/_5 \times 10$	$1^1/_5 : 6$

Aufg. z. Zifferr., 38. Uebung.

---

1) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen $^3/_5$ und 1? zwischen 1 und $^2/_5$? — 2) Was für ein Theil ist $^1/_5$ von $^2/_5$? von $^3/_5$? von $^4/_5$? von 1? von 4? — 3) Das Wievielfache sind $^2/_5$ von $^1/_5$? $^4/_5$ von $^2/_5$? $1^1/_5$ von $^3/_5$? — 4) Suche die Hälfte von $4^4/_5$! den dritten Theil von $6^3/_5$! den 4. Theil von $10^2/_5$! ($10^2/_5 = 8 + 2^2/_5 = 8 + ^{12}/_5$; $^1/_4$ von $8^{12}/_5 = 2\ ^3/_5$.) — 5) Ich nehme $4^2/_5$ fl. und $8^4/_5$ fl. ein und gebe $10^3/_5$ fl. davon aus; wie viel bleibt mir übrig? — 6) $^1/_5$ Ctr. kostet $3^4/_5$ fl., was kosten $1^1/_5$ Ctr.? — 7) $^4/_5$ Rs. Papier zu 3 fl. 48 kr.; was kostet $^1/_5$ Rs.? — 8) Wie oft sind 24 kr. oder $^2/_5$ fl. in 100 fl. enthalten?

Halbe, Drittel, Viertel und Fünftel.

Ich theile dieses Stäbchen in 2 gleiche Theile. Wer von euch macht aus diesen zwei Theilen fünf gleiche Theile?

Theilt man jedes Halbe in zwei gleiche Theile, so werden aus den 2 Halben 2×2 oder 4 Theile, also Viertel. Theilt man aber jedes Halbe in 3 gleiche

Theile; so werden aus den 2 Halben 2 × 3 Theile oder 6 Theile, also **Sechstel**. Halbe lassen sich daher zwar in 4tel und 6tel verwandeln, aber nicht in 5tel.

Auf dieselbe Weise muß der Schüler erkennen, daß sich auch **Drittel** und **Viertel** nicht in Fünftel verwandeln lassen.

Was ist mehr: $^1/_2$ oder $^1/_5$? $^1/_3$ oder $^1/_5$? $^1/_4$ oder $^1/_5$?
$^2/_3$ oder $^2/_5$? $^3/_4$ oder $^4/_5$?

Sechstel.



Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 6 gleiche Theile theilt? Zeige mir an dieser Linie $^1/_6$! $^2/_6$! 2c. — Wie erhalte ich $^1/_6$ von 1 Ganzen? Wie $^2/_6$? 2c. — Suche auf diese Weise $^5/_6$ von 1 Buch Papier, von 1 fl., von 1 Thlr.

$^1/_6 + ^1/_6$	$1 - ^1/_6$	$3 \times ^1/_6$	$^2/_6 : ^4/_6$	$^2/_6 : ^2/_6$
$^2/_6 + ^1/_6$	$^5/_6 - ^1/_6$	$2 \times ^2/_6$	$^2/_6 : 1$	$^2/_6 : ^1/_6$
$^3/_6 + ^2/_6$	$^4/_5 - ^2/_6$	$^1/_6 \times 1$	$^3/_6 : ^3/_6$	$^4/_6 : ^4/_6$
$^3/_6 + ^3/_6$	$1 - ^5/_6$	$^5/_6 \times 1$	$^3/_6 : 1$	$^4/_6 : ^2/_6$

Der wie vielte Theil ist
$^1/_6$ von $^5/_6$? $^1/_6$ von 1?
$^2/_6$ von $^4/_6$? $^2/_6$ von 1?

Das Wievielfache ist
$^5/_6$ von $^1/_6$? 1 von $^1/_6$?
$^4/_6$ von $^2/_6$? 1 von $^2/_6$?

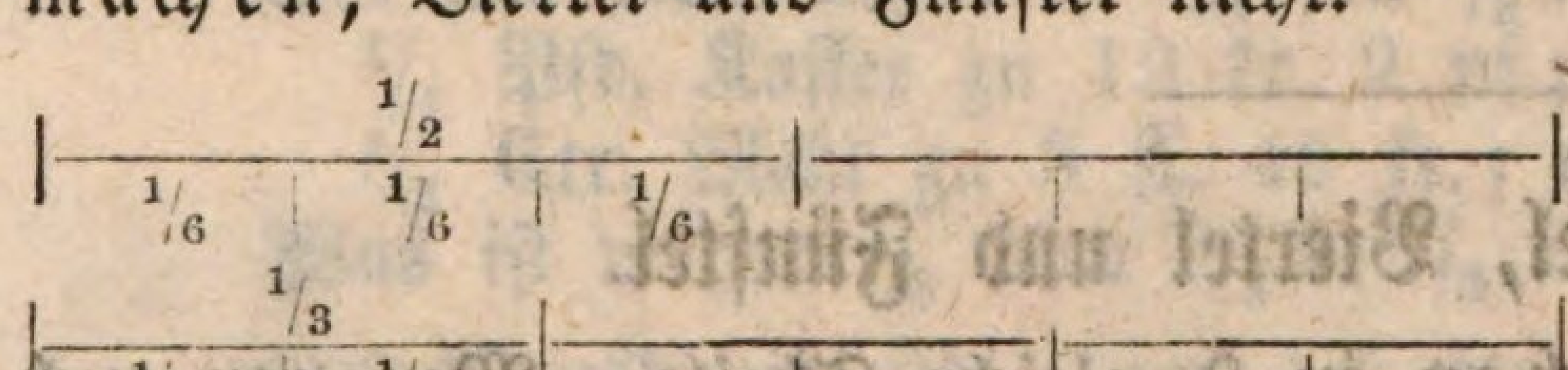
Das Verwandeln ganzer Zahlen in Sechstel und umgekehrt.

$^5/_6 + ^5/_6 = ^{10}/_6 = 1^4/_6$ $10 - ^5/_6 = 9^6/_6 - ^5/_6 = 9^1/_6$
$1^4/_6 + ^5/_6 = 1^9/_6 = 2^3/_6$ $9^1/_6 - ^5/_6 = 8^7/_6 - ^5/_6 = 8^2/_6$
$2^3/_6 + ^5/_6 = 2^8/_6 = 3^2/_6$ 2c. $8^2/_6 - ^5/_6 = 7^8/_6 - ^5/_6 = 7^3/_6$ 2c.

Aufg. z. Zifferr., 39. Uebung.

Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel und Sechstel.

a) Man theile ein Ganzes (1 Stäbchen, Papierstreifen) in **zwei** gleiche Theile, ein anderes in 3 gleiche Theile, wieder eines in 4 gleiche Theile und noch eines in 5 gleiche Theile; die Schüler aber untersuchen in jedem einzelnen Falle, ob die entstandenen Theile in **Sechstel** verwandelt werden können, oder nicht. — Das Resultat ist: **Halbe** und **Drittel lassen sich zu Sechsteln machen**, Viertel und Fünftel nicht.



$^1/_2 = ^3/_6$; $^3/_6 = ^1/_2$.
$\begin{cases} ^1/_3 = ^2/_6; \; ^2/_6 = ^1/_3. \\ ^2/_3 = ^4/_6; \; ^4/_6 = ^2/_3. \end{cases}$

Fragen: Was ist mehr: $^3/_6$ oder $^1/_2$? $^1/_3$ oder $^2/_6$? $^4/_6$ oder $^2/_3$? — Was kann ich also setzen für $^1/_2$? für $^1/_3$? für $^2/_3$? für $^3/_6$? für $^2/_6$? für $^4/_6$?

b) $^1/_2 + ^1/_6$ $^1/_2 - ^1/_6$ $^1/_2 + ^1/_3$ $^1/_3 \times ^1/_2$ $^1/_6 : ^1/_2$
$^1/_3 + ^1/_6$ $^1/_3 - ^1/_6$ $^2/_3 + ^1/_2$ $^2/_3 \times ^1/_2$ $^1/_6 : ^1/_3$
$^5/_6 + ^1/_2$ $^5/_6 - ^1/_2$ $^1/_2 - ^1/_3$ $^1/_2 \times ^1/_3$ $^1/_3 : ^1/_2$
$^2/_3 + ^5/_6$ $^5/_6 - ^2/_3$ $^2/_3 - ^1/_2$ $^1/_2 \times ^2/_3$ $^1/_2 : ^1/_6$

Alles mit Anschauung an oben stehenden Linien. So ergibt sich in Bezug auf das Multipliciren, daß

$^1/_3 \times ^1/_2$ oder 1 Drittel von $^1/_2 = ^1/_6$.
$^2/_3 \times ^1/_2$ oder 2 Drittel von $^1/_2 = 2 \times ^1/_6 = ^2/_6 = ^1/_3$.
$^1/_2 \times ^1/_3$ oder die Hälfte von $^1/_3 = ^1/_6$.
$^1/_2 \times ^2/_3$ oder die Hälfte von $^2/_3 = ^1/_3$.

1) Um wie viel ist $^1/_3$ größer als $^1/_6$? — 2) Um wie viel ist $^1/_6$ kleiner, als $^1/_3$? — 3) Um wie viel unterscheiden sich $^1/_3$ und $^1/_2$ von einander? — 4) $^1/_2$ Pfund Zucker zu 12 kr.; was kostet $^1/_3$ Pfd.? (Man geht von $^1/_2$ Pfd. auf 1 Pfd. und von 1 Pfd. auf $^1/_3$ Pfd., oder man geht von $^1/_2$ Pfd. auf $^1/_6$ Pfd. und von $^1/_6$ Pfd. auf $^1/_3$ Pfd.) — 5) Wie viel ist $^1/_2$ fl. + $^2/_3$ fl.? — 6) Von $^5/_6$ Ellen werden $^2/_3$ Ellen abgeschnitten, wie viel bleibt?

Aufg. z. Zifferr., 40. Uebung.

Siebentel.

|—$^1/_7$—|——|——|——|——|——|——|

Was für Theile entstehen, wenn man 1 Ganzes in 7 gleiche Theile theilt? Zeige du mir an dieser Linie $^1/_7$! $^2/_7$! 2c. — Wie erhalte ich $^1/_7$ von 1 Ganzen? Wie $^2/_7$? $^3/_7$? 2c. — Suche auf diese Weise $^3/_7$ von einer Woche?

$^1/_7 + ^1/_7$ $^6/_7 - ^3/_7$ $2 \times ^1/_7$ $^1/_7 : 1$ $^4/_7 : ^4/_7$
$^3/_7 + ^2/_7$ $^5/_7 - ^4/_7$ $5 \times ^1/_7$ $^2/_7 : ^4/_7$ $^4/_7 : ^2/_7$
$^2/_7 + ^4/_7$ $1 - ^1/_7$ $^1/_7 \times 1$ $^2/_7 : ^6/_7$ $^6/_7 : ^6/_7$
$^4/_7 + ^3/_7$ $1 - ^5/_7$ $^4/_7 \times 1$ $^3/_7 : ^6/_7$ $^6/_7 : ^2/_7$

Der wie vielte Theil ist — Das Wievielfache ist
$^1/_7$ von 1? $^2/_7$ von $^4/_7$? — 1 von $^1/_7$? $^4/_7$ von $^2/_7$?
$^2/_7$ von $^6/_7$? $^3/_7$ von $^6/_7$? — $^6/_7$ von $^2/_7$? $^6/_7$ von $^3/_7$?

Verwandlung ganzer Zahlen in 7tel und umgekehrt.

---

a. $^6/_7 + ^6/_7 = ^{12}/_7 = 1^5/_7$ b. $10 - ^6/_7 = 9^7/_7 - ^6/_7 = 9^1/_7$
$1^5/_7 + ^6/_7 = 1^{11}/_7 = 2^4/_7$ $9^1/_7 - ^6/_7 = 8^8/_7 - ^6/_7 = 8^2/_7$
$2^4/_7 + ^6/_7 = 2^{10}/_7 = 3^3/_7$ 2c. $8^2/_7 - ^6/_7 = 7^9/_7 - ^6/_7 = 7^3/_7$ 2c.

c. $8 + 3^2/_7$ d. $11^6/_7 - 5^4/_7$ e. $8 \times 4^5/_7$ f. $^1/_7 : 5$
$5^3/_7 + 4$ $12 - 4^3/_7$ $^4/_7 \times 5$ $^3/_7 : 1^2/_7$
$10^4/_7 + 2^6/_7$ $8^2/_7 - 5^4/_7$ $3^1/_7 \times 14$ $1^1/_7 : 6^6/_7$

Wie suchst du
den 3. Theil von $1^5/_7$? den 4. Theil von $2^6/_7$?
den halben Th. von $9^3/_7$? den 5. Theil von $13^4/_7$?

Aufg. z. Zifferr., 41. Uebung.

Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel und Siebentel.

a. Wir untersuchen, ob sich Halbe, Drittel 2c. in Siebentel verwandeln lassen, oder nicht. — Ein Ganzes hat 2 Halbe. Theilt man jedes Halbe in 2 gleiche Theile, so entstehen 2×2 oder 4 gleiche Theile, also Viertel; theilt man jedes Halbe in 3 gleiche Theile, so entstehen 2×3 oder 6 gleiche Theile, also Sechstel; und theilt man jedes Halbe in 4 gleiche Theile, so entstehen 2×4 oder 8 gleiche Theile, also Achtel. Halbe lassen sich also zwar in Viertel, in Sechstel und in Achtel verwandeln, aber weder in Drittel, noch in Fünftel, noch in Siebentel.

Eben so mit den Dritteln, Vierteln, Fünfteln und Sechsteln. — Resultat: In 7tel lassen sich weder die Halben, noch die 3tel, noch die 4tel, noch die Fünftel, noch die 6tel verwandeln.

b. Was ist mehr:
$^1/_3$ oder $^1/_7$? $^1/_4$ oder $^1/_7$? $^1/_5$ oder $^1/_7$? $^5/_6$ oder $^5/_7$?
$^2/_3$ oder $^2/_7$? $^3/_4$ oder $^3/_7$? $^4/_5$ oder $^4/_7$? $^5/_6$ oder $^6/_7$?

Achtel.

|—$^1/_8$—|———|———|———|———|———|———|———|

Was für Theile entstehen, wenn man ein Ganzes in 8 gleiche Theile theilt? Welches Stück von dieser Linie ist $^1/_8$ derselben? Zeige mir $^3/_8$! $^5/_8$! 2c. — Wie erhalte ich also $^1/_8$ von einem Ganzen? Wie $^3/_8$? $^5/_8$? $^7/_8$? — Wie viel betragen $^3/_8$ von 1 Buch Papier? $^5/_8$ von einem Pfund? $^7/_8$ von 1 Eimer. $^1/_8$ fl., $^3/_8$ fl., $^5/_8$ fl., $^7/_8$ fl.?

$^2/_8 + {}^2/_8$	$^2/_8 - {}^1/_8$	$4 \times {}^1/_8$	$^1/_8 : 1$	$^5/_8 : {}^5/_8$
$^5/_8 + {}^1/_8$	$^7/_8 - {}^2/_8$	$8 \times {}^1/_8$	$^2/_8 : {}^6/_8$	$^5/_8 : {}^1/_8$
$^3/_8 + {}^2/_8$	$1 - {}^3/_8$	$^1/_8 \times 1$	$^3/_8 : {}^6/_8$	$^6/_8 : {}^6/_8$
$^4/_8 + {}^4/_8$	$1 - {}^7/_8$	$^5/_8 \times 3$	$^4/_8 : 1$	$^6/_8 : {}^3/_8$

Der wie vielte Theil ist
$^1/_8$ von $^5/_8$? $^1/_8$ von 1?
$^2/_8$ von $^6/_8$? $^2/_8$ von 1?
$^3/_8$ von $^6/_8$? $^4/_8$ von 1?

Das Wievielfache ist
1 von $^1/_8$? 1 von $^2/_8$?
1 von $^4/_8$? $^4/_8$ von $^2/_8$?
$^6/_8$ von $^2/_8$? $^6/_8$ von $^3/_8$?

Das Verwandeln ganzer Zahlen in Achtel und umgekehrt.

$^7/_8 + ^7/_8 = ^{14}/_8 = 1^6/_8$ $\qquad$ $10 - ^7/_8 = 9^8/_8 - ^7/_8 = 9^1/_8$

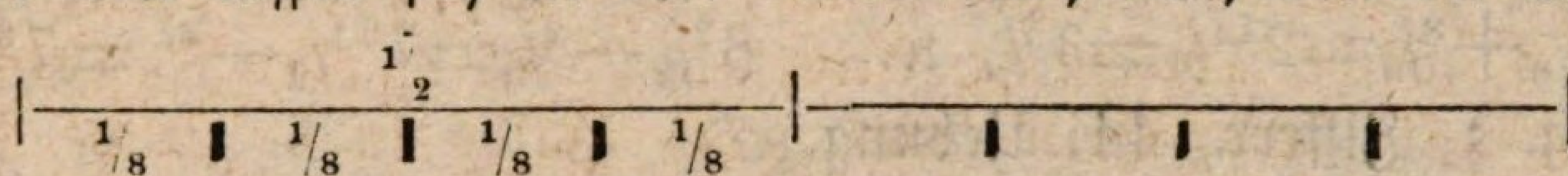
$1^6/_8 + ^7/_8 = 1^{13}/_8 = 2^5/_8$ $\qquad$ $9^1/_8 - ^7/_8 = 8^9/_8 - ^7/_3 = 8^2/_8$

$2^5/_8 + ^7/_8 = 2^{12}/_8 = 3^4/_8$ ꝛc. $\qquad$ $8^2/_8 - ^7/_8 = 7^{10}/_8 - ^7/_8 = 7^3/_8$ ꝛc.

Aufg. z. Zifferr., 42. Uebung.

Halbe, 3tel, 4tel, 5tel, 6tel, 7tel und 8tel.

a. Zuerst wird untersucht, welche Theile sich in Achtel verwandeln lassen, und welche nicht. Wie man dabei zu Werke geht, ist bekannt. Ein Schüler übernimmt die Halben, ein anderer die 3tel ꝛc. Resultat: Halbe und 4tel lassen sich in 8tel verwandeln, 3tel, 5tel ꝛc. nicht.



$^1/_2 = ^4/_8;\ ^4/_8 = ^1/_2$



$^1/_4 = ^2/_8;\ ^2/_8 = ^1/_4$

$^3/_4 = ^6/_8;\ ^6/_8 = ^3/_4$

Was ist mehr: $^1/_2$ oder $^4/_8$? $^2/_8$ oder $^1/_4$? $^3/_4$ oder $^6/_8$? Was kann ich daher setzen für $^1/_2$? für $^4/_8$? für $^1/_4$? für $^2/_8$? für $^3/_4$? für $^6/_8$? Was ist die Hälfte von $^1/_4$? $^1/_4$ von $^1/_2$?

b.	$^1/_2 + ^1/_8$	$^1/_2 + ^5/_8$	$^1/_2 - ^1/_8$	$^1/_2 \times 1$	$^1/_8$ in $^1/_4$	$^3/_8 : ^1/_2$
	$^1/_8 + ^1/_4$	$^5/_8 + ^1/_4$	$^3/_8 - ^1/_4$	$^1/_2 \times ^1/_4$	$^1/_4 : ^1/_8$	$^1/_2 : ^3/_8$
	$^3/_4 + ^1/_8$	$^3/_4 + ^5/_8$	$^3/_4 - ^3/_8$	$^1/_4 \times 1$	$^1/_8 : ^1/_2$	$^3/_8 : ^3/_4$
	$^3/_8 + ^1/_2$	$^7/_8 + ^1/_4$	$^5/_8 - ^1/_2$	$^1/_4 \times ^1/_2$	$^1/_2 : ^1/_8$	$^3/_4 : ^3/_8$
	$^1/_4 + ^3/_8$	$^1/_2 + ^7/_8$	$^3/_4 - ^5/_8$	$^1/_2 \times ^3/_4$	$^1/_4 : ^3/_8$	$^5/_8 : ^3/_4$
	$^3/_8 + ^3/_4$	$^7/_8 + ^3/_4$	$^7/_8 - ^3/_4$	$^3/_4 \times ^1/_2$	$^2/_8 : ^3/_4$	$^3/_4 : ^7/_8$

Der wie vielte Theil ist $\qquad$ Das Wievielfache ist

$^1/_8$ von $^1/_2$? $^1/_8$ von $^1/_4$? $\qquad$ $^1/_4$ von $^1/_8$? $^1/_2$ von $^1/_8$?

1) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen $^1/_4$ und $^1/_8$? zwischen $^3/_8$ und $^3/_4$? zwischen $^1/_2$ und $^5/_8$? — 2) Für $^1/_8$ fl. erhalte ich 3 Loth; wie viel für $^1/_2$ fl.? — 3) $^1/_4$ Eimer zu 5 fl. 15 kr.; was kostet $^1/_8$ Eimer? — 4) $^1/_2$ Ctr. kostet 22 fl. 48 kr.; wie hoch kommt $^1/_8$ Ctr.? ꝛc.

Aufg. z. Zifferr., 43. Uebung.

Neuntel.



In wie viele gleiche Theile habe ich das Ganze getheilt? Was für Theile sind es daher? Zeige $^1/_9$! $^2/_9$! rc. — Wie erhält man also $^1/_9$ von 1 Ganzen? Wie $^3/_9$? $^5/_9$? Wie entsteht der Bruch $^7/_9$? $^8/_9$?

$^3/_9 + ^2/_9$	$^8/_9 - ^1/_9$	$4 \times ^1/_9$	$^1/_9 : 1$	$^4/_9 : ^4/_9$
$^5/_9 + ^3/_9$	$^7/_9 - ^4/_9$	$8 \times ^1/_9$	$^2/_9 : ^8/_9$	$^4/_9 : ^1/_9$
$^4/_9 + ^4/_9$	$1 - ^1/_9$	$^1/_9 \times 4$	$^4/_9 : ^8/_9$	$^8/_9 : ^8/_9$
$^3/_9 + ^6/_9$	$1 - ^4/_9$	$^7/_9 \times 2$	$^3/_9 : 1$	$^8/_8 : ^4/_9$

Der wie vielte Theil sind
$^2/_9$ von $^4/_9$? $^2/_9$ von $^6/_9$?
$^3/_9$ von $^6/_9$? $^3/_9$ von 1?

Das Wievielfache sind
$^8/_9$ von $^4/_9$? $^8/_9$ von $^2/_9$?
$^6/_9$ von $^3/_9$? $^6/_9$ von $^2/_9$?

Verwandlung ganzer Zahlen in 9tel und umgekehrt.

$^8/_9 + ^8/_9 = ^{16}/_9 = 1^7/_9$ $\quad 10 - ^8/_9 = 9^9/_9 - ^8/_9 = 9^1/_9$.
$1^7/_9 + ^8/_9 = 1^{15}/_9 = 2^6/_9$ $\quad 9^1/_9 - ^8/_9 = 8^{10}/_9 - ^8/_9 = 8^2/_9$.
$2^6/_9 + ^8/_9 = 2^{14}/_9 = 3^5/_9$ rc. $\quad 8^2/_9 - ^8/_9 = 7^{11}/_9 - ^8/_9 = 7^3/_9$ rc.

Aufg. z. Zifferr., 44. Uebung.

Halbe, Drittel rc. und Neuntel.

a. Die Schüler untersuchen, ob Halbe, Drittel, Viertel rc. in Neuntel verwandelt werden können, oder nicht. Resultat:
3tel lassen sich in 9tel verwandeln, Halbe, 4tel, 5tel rc. nicht.



$^1/_3 = ^3/_9$; $^3/_9 = ^1/_3$.
$^2/_3 = ^6/_9$; $^6/_9 = ^2/_3$.

Was kann man setzen für $^1/_3$? für $^2/_3$? für $^6/_9$? für $^3/_9$?

Wie viel beträgt der 3. Theil a. von $^1/_3$? b. von $^2/_3$? Suche zweimal den 3. Theil a. von $^1/_3$! b. von $^2/_3$!

b.

$^1/_3 + ^1/_9$	$^1/_3 - ^1/_9$	$^1/_3 \times ^1/_3$	$^1/_9 : ^1/_3$	$^1/_3 : ^7/_9$
$^4/_9 + ^1/_3$	$^5/_9 - ^1/_3$	$^1/_3 \times ^2/_3$	$^1/_3 : ^1/_9$	$^4/_9 : ^2/_3$
$^2/_3 + ^5/_9$	$^2/_3 - ^4/_9$	$^2/_3 \times ^1/_3$	$^2/_9 : ^2/_3$	$^2/_3 : ^8/_9$
$^7/_9 + ^2/_3$	$^8/_9 - ^2/_3$	$^2/_3 \times ^2/_3$	$^2/_3 : ^2/_9$	$^7/_9 : ^2/_3$

---

1) Wie groß ist der Unterschied zwischen $^1/_3$ und $^1/_9$? zwischen $^7/_9$ und $^2/_3$? — **2)** Das Drittel einer Summe Geldes ist 270 fl.; wie viel beträgt $^1/_9$ derselben? — **3)** Man hat von einer Zahl den 9ten Theil genommen und 75 erhalten; wie viel würde man erhalten haben, wenn man $^1/_3$ von derselben genommen hätte?

Aufg. z. Zifferr., 45. Uebung.

Zehntel.



In wie viele gleiche Theile ist das Ganze hier getheilt? Was für Theile sind

es daher? Zeige mit $\frac{1}{10}$! $\frac{2}{10}$! $\frac{3}{10}$! ꝛc. — Wie erhält man also $\frac{1}{10}$ von 1 Ganzen? Wie $\frac{4}{10}$? $\frac{7}{10}$? Wie entsteht der Bruch $\frac{9}{10}$? — Suche auf diese Weise $\frac{3}{10}$ von 1 fl.! $\frac{7}{10}$ von 1 Thlr.! $\frac{9}{10}$ von 1 Ctr.!

$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}-\frac{5}{10}$	$3\times\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}:1$	$\frac{9}{10}:\frac{9}{10}$
$\frac{5}{10}+\frac{4}{10}$	$\frac{8}{10}-\frac{3}{10}$	$10\times\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}:\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}:\frac{3}{10}$
$\frac{2}{10}+\frac{6}{10}$	$1-\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}\times4$	$\frac{4}{10}:\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}:\frac{3}{10}$
$\frac{5}{10}+\frac{5}{10}$	$1-\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}\times6$	$\frac{2}{10}:1$	$\frac{8}{10}:\frac{2}{10}$

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen

$\frac{3}{10}$ u. $\frac{5}{10}$? $\frac{9}{10}$ u. $\frac{2}{10}$? 1 u. $\frac{5}{10}$
$\frac{7}{10}$ u. $\frac{4}{10}$? $\frac{8}{10}$ u. 1? $\frac{6}{10}$ u. $\frac{1}{10}$

Der wie vielte Theil ist
$\frac{1}{10}$ von $\frac{3}{10}$? $\frac{1}{10}$ von 1?
$\frac{2}{10}$ von $\frac{6}{10}$? $\frac{2}{10}$ von 1?
$\frac{3}{10}$ von $\frac{9}{10}$? $\frac{5}{10}$ von 1?

Das Wievielfache ist
1 G. von $\frac{1}{10}$? 1 von $\frac{2}{10}$?
1 G. von $\frac{5}{10}$? $\frac{6}{10}$ von $\frac{2}{10}$?
$\frac{8}{10}$ von $\frac{2}{10}$? $\frac{9}{10}$ von $\frac{3}{10}$?

Das Verwandeln ganzer Zahlen in 10tel und umgekehrt.

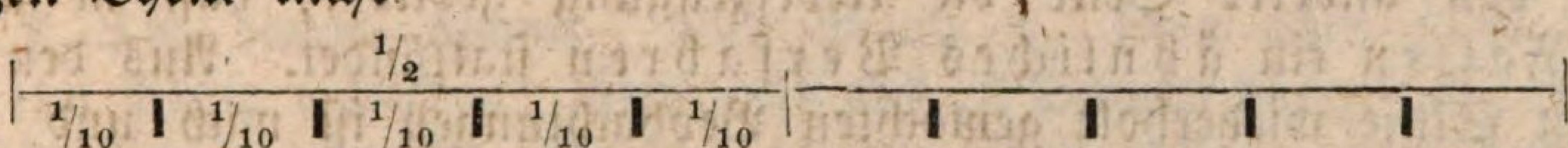
$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}=\frac{18}{10}=1\frac{8}{10}$ $\qquad 10-\frac{9}{10}=9\frac{10}{10}-\frac{9}{10}=9\frac{1}{10}$
$1\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=1\frac{17}{10}=2\frac{7}{10}$ $\qquad 9\frac{1}{10}-\frac{9}{10}=8\frac{11}{10}-\frac{9}{10}=8\frac{2}{10}$
$2\frac{7}{10}+\frac{9}{10}=2\frac{16}{10}=3\frac{6}{10}$ ꝛc. $\qquad 8\frac{2}{10}-\frac{9}{10}=7\frac{12}{10}-\frac{9}{10}=7\frac{3}{10}$ ꝛc.

Aufg. z. Zifferr., 46. Uebung.

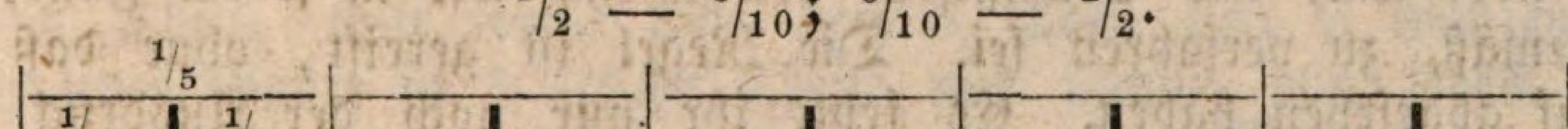
Halbe, Drittel, Viertel ꝛc. und Zehntel.

a. Zuerst wird auf die bekannte Weise untersucht, welche Theile in 10tel verwandelt werden können, und welche nicht. Resultat:

Halbe und Fünftel lassen sich in 10tel verwandeln, die übrigen Theile nicht.



$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$; $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.



a. $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$, $\frac{2}{5}=2\times\frac{2}{10}=\frac{4}{10}$ $\qquad \frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\frac{4}{10}=2\times\frac{2}{10}=\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}=3\times\frac{2}{10}=\frac{6}{10}$ $\qquad \frac{6}{10}=3\times\frac{2}{10}=\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}=4\times\frac{2}{10}=\frac{8}{10}$ $\qquad \frac{8}{10}=4\times\frac{2}{10}=\frac{4}{5}$

Was kann man setzen für $\frac{1}{2}$? für $\frac{1}{5}$? für $\frac{4}{5}$? für $\frac{2}{5}$? ꝛc.
für $\frac{5}{10}$? für $\frac{2}{10}$? für $\frac{6}{10}$? für $\frac{4}{10}$? ꝛc.

b.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}:\frac{1}{5}$
$\frac{3}{10}+\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}:\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}+\frac{4}{10}$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}:\frac{3}{5}$
$\frac{7}{10}+\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{10}:\frac{4}{5}$

c. Der wie vielte Theil ist
$\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{5}$? $\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{2}$?

Wie viel mal so groß ist
$\frac{1}{5}$ als $\frac{1}{10}$? $\frac{1}{2}$ als $\frac{1}{10}$?

d. Wie viel ist $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$? $\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}$? $\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$? $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$?
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$? $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$? $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$? $\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}$?

Angeschaut an obenstehenden Linien:

$^1/_5 \times {}^1/_2$ oder der 5. Theil von $^1/_2 = {}^1/_{10}$.

$^2/_5 \times {}^1/_2$ oder 2 × der 5. Th. von $^1/_2 = 2 \times {}^1/_{10} = {}^2/_{10}$:c.

$^1/_2 \times {}^1/_5$ oder die Hälfte von $^1/_5 = {}^1/_{10}$:c.

---

1) Um wie viel unterscheiden sich $^3/_{10}$ und $^3/_5$ von einander? Um wie viel $^1/_2$ und $^7/_{10}$? $^9/_{10}$ u. $^4/_5$? $^1/_5$ u. $^1/_2$? 2) Für $^1/_{10}$ fl. erhält man 3 Lth. 2 Qt.; wie viel für $^1/_2$ fl.? 3) $^1/_5$ Ctr. kostet 7 fl. 36 kr.; was kostet $^1/_{10}$ Ctr.? 4) In $^1/_2$ Monat verzehrt Jemand 18 fl. 30 kr., wie viel in $^1/_5$ Monat?

Aufg. z. Zifferr., 47. Uebung.

Der wichtigere Theil von der Bruchrechnung, der Begründungs- oder Anschauungskursus, ist nun durchgearbeitet. Der Schüler weiß, wie aus der Grundeinheit aller Zahlen, aus der Eins, auch die Bruchzahlen entstehen. Er weiß, wenn auch nur in beschränktem Umfange, wie das Ganze und seine Theile, sowie diese selbst sich zu einander verhalten. Er hat mit den behandelten Brüchen rechnen gelernt und dadurch von den verschiedenen Operationen deutliche Begriffe gewonnen. Es ist ein Boden geschaffen, worin die nun folgende allgemeine Lehre von den Brüchen tief und kräftig wurzelt. Dieselbe ist für uns eigentlich nichts anderes, als eine Wiederholung und Weiterführung des Bisherigen in anderer Ordnung. Wir können daher überall bei Bekanntem anschließen und werden selten mehr nöthig haben, das Verständniß durch die Anschauung zu vermitteln. Zugleich hat sich in dem Schüler ohne Zuthun von anderer Seite die Ueberzeugung gebildet, daß in ähnlichen Fällen ein ähnliches Verfahren stattfindet. Aus den von Stufe zu Stufe wiederholt gemachten Beobachtungen ist nach und nach, langsam aber klar, das Bewußtsein erwachsen, wie in jedem Falle, der Sache gemäß, zu verfahren sei. Die Regel ist gereift, ohne daß wir es darauf abgesehen haben. Es fehlt ihr nur noch der Ausdruck oder die Fassung. Weil nicht im Treibhause und künstlich, sondern auf natürliche Weise erzeugt, so ist sie auch von Dauer; sie ist keine frühreife Frucht. Unser Schüler ist stets bereit, sie durch die Anschauung oder durch das Wort klar und einfach zu begründen. Dazu ist er mit der Sache auch in seiner geistigen Entwicklung fortgeschritten und daher jetzt fähig, die allgemeine Verfahrungsweise z. B. im Erweitern, im Kürzen, im Auffinden des Hauptnenners :c. schnell und vollständig zu begreifen. Das Folgende wird eben darum auch in verhältnißmäßig kurzer Zeit bewältigt werden können.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Brüchen überhaupt.

A. Begriff, Bezeichnung, Art und Formveränderung der Brüche.

1) Begriff der Brüche.

Erste Ansicht.

Wie entstehen Halbe? (Halbe entstehen, wenn man 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theilt.) Wie entstehen Drittel, 5tel, 8tel, 12tel, 18tel? rc. — Wie erhalte ich $^1/_3$ und wie $^2/_3$? ($^1/_3$ erhalte ich, wenn ich 1 Ganzes in 3 gleiche Theile theile und *einen* davon nehme; $^2/_3$, wenn ich 1 G. in 3 Theile theile und *zwei* davon nehme.) Wie erhalte ich $^1/_4$ und wie $^3/_4$? $^1/_8$ und $^5/_8$? $^1/_{10}$ und $^7/_{10}$? $^1/_{12}$ und $^{11}/_{12}$? $^1/_{16}$ und $^{13}/_{16}$? u. s. w. — Was versteht man also unter $^1/_3$ und was unter $^2/_3$? ($^1/_3$ ist *einer* von 3 gleichen Theilen, und $^2/_3$ sind *zwei* von 3 gleichen Theilen.) Was versteht man unter $^1/_4$ und $^3/_4$? unter $^1/_6$ und $^5/_6$? unter $^1/_9$ und $^7/_9$? unter $^1/_{13}$ und $^{11}/_{13}$? u. s. w.

Die *ganzen Zahlen* entstehen, indem man die Eins wiederholt zu sich nimmt; die *Theil-* oder *Bruchzahlen*, indem man von der Eins, d. i. von *einem* Ganzen einen oder mehrere gleiche Theile wegbricht oder wegnimmt. *Unter einem Bruche versteht man daher einen oder mehrere gleiche Theile von einem Ganzen.* Das ist die unsern Schülern schon bekannte gewöhnliche Auffassung.

Zweite Ansicht.

Wie entsteht der Bruch $^1/_3$? Wenn man 1 G. in 3 gleiche Theile theilt und 1 Theil davon nimmt. Eine andere Weise ist nicht denkbar. Wie entsteht der Bruch $^2/_3$? Wenn man 1 G. in 3 gleiche Theile theilt und 2 Th. davon nimmt. Der Bruch $^2/_3$ kann aber noch auf eine *zweite* Weise entstehen. Wer weiß es? 3 Schüler haben sich in 2 Aepfel gleichheitlich zu theilen; den wie vielten Theil erhält einer von ihnen? Den 3. Theil. Wie erhält man den 3. Theil von 2 Ganzen? Man theilt jedes Ganze in 3 gleiche Theile und nimmt von jedem 1 Theil. Wie viel hat man dann? $^1/_3 + ^1/_3$ oder $^2/_3$. Der Bruch $^2/_3$ kann demnach auch dadurch entstehen, daß man den dritten Theil von 2 G. nimmt.

Mithin kann der Bruch $^2/_3$ entstehen,

|—— $^1/_3$ ——|—— $^1/_3$ ——|——————|

a. indem man von 1 Ganzen den 3. Theil *zweimal* nimmt;

|—— $^1/_3$ ——|——————|——————|

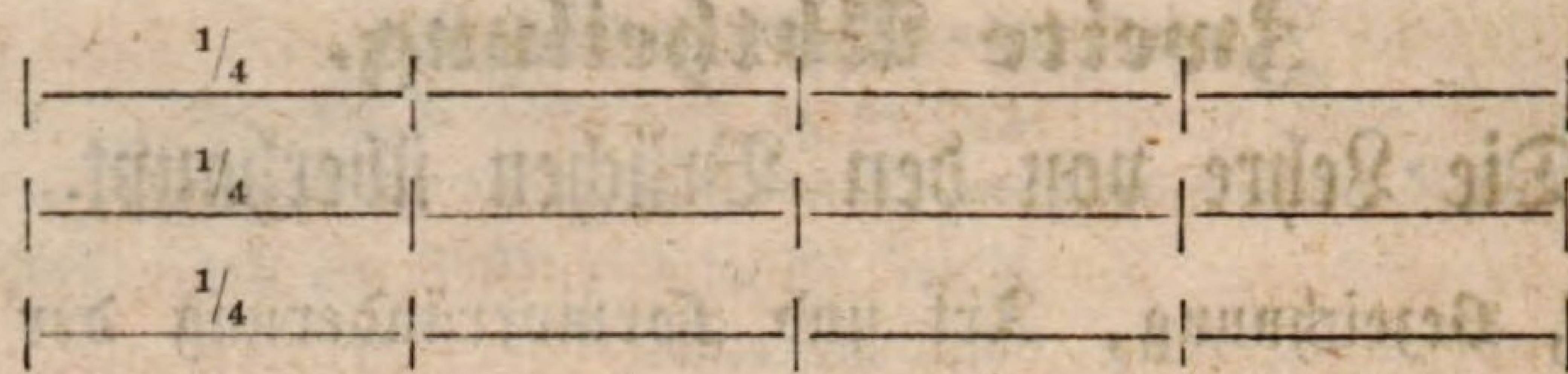
|—— $^1/_3$ ——|——————|——————|

b. indem man von 2 Ganzen den 3. Theil *einmal* nimmt.

Der Bruch $^1/_4$ wird nur auf die eine Weise erhalten, daß man den 4. Th. von 1 G. einmal nimmt. Der Bruch $^3/_4$ kann auf zweierlei Weise entstehen.

|—— $^1/_4$ ——|—— $^1/_4$ ——|—— $^1/_4$ ——|——————|

a. Man nimmt von *einem* Ganzen den 4. Theil *dreimal*.



b. Man nimmt von 3 Ganzen den 4. Theil einmal.

Der Bruch $^4/_5$ kann entstehen, indem von 1 G. der 5te Theil 4mal, oder indem von 4 G. der 5te Theil einmal genommen wird.

Wie kann demnach der Bruch $^5/_6$ entstehen? Wie $^3/_7$? $^7/_{12}$? $^{15}/_{16}$? rc.

2) Bezeichnung der Brüche.

Welcher Bruch hat einen höhern Werth: $^1/_2$ oder $^1/_4$? Warum? Weil der halbe Theil von 1 G. größer ist, als der vierte Theil. Welcher Bruch gilt mehr: $^1/_4$ oder $^3/_4$? Warum? Weil der Bruch $^3/_4$ drei Theile enthält, wie der Bruch $^1/_4$ einen. Der Werth eines Bruches hängt also von Zweierlei ab: von der Größe seiner Theile und von der Anzahl seiner Theile. Daher sind zur Bezeichnung eines Bruches zwei Zahlen erforderlich. Um den Bruch drei Viertel mit Ziffern zu schreiben, setzt man

$$^3/_4$$

Wie groß die Theile eines Bruches sind, kommt auf die Anzahl der Theile an, in welche das Ganze getheilt worden ist. Das sagt uns bei $^3/_4$ die Ziffer 4. Das Ganze ist in 4 gleiche Theile getheilt. Folglich ist jeder Theil der 4te Theil vom Ganzen. Ist dieß ein Gulden, so ist jeder Theil = 15 kr.

Theilt man 1 Ganzes in 4 gleiche Theile, so heißen die Theile 4tel. Also sagt die 4 zugleich, wie die Theile des Bruches heißen. Sie benennt die Theile. Darum ist sie der Nenner des Bruchs.

Wie viele Theile der Bruch enthält, bezeichnet die Ziffer 3. Sie zählt die Theile des Bruches. Deßhalb heißt sie der Zähler.

Der Nenner zeigt demnach an, in wie viel gleiche Theile ein Ganzes getheilt ist, und hierdurch zugleich, wie groß die Theile sind und wie sie heißen. Der Zähler aber sagt, wie viele Theile der Bruch enthält.

Jeder in Ziffern dargestellte Bruch kann auf zweierlei Weise ausgesprochen oder gelesen werden. Steht $^3/_4$, so kann ich sagen: 3 Viertel, und das ist die gewöhnliche Leseart. Ich kann aber auch sagen: 3 getheilt durch 4. Im Grunde ist dieß das Nämliche, denn der 4. Theil von 3 = 3 Viertel.

Wie lassen sich demnach folgende (an die Tafel geschriebene) Brüche aussprechen: $^{17}/_{31}$, $^{72}/_{97}$, $^{113}/_{136}$, $^{371}/_{569}$? rc.

3) Die Arten der Brüche.

Die Zahlen 1, 2, 3, 4 rc. sind ganze Zahlen; ihre Anzahl ist unendlich groß. Die Zahlen $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^1/_5$ rc. sind Bruchzahlen oder Brüche; auch ihre Anzahl geht ins Unendliche. Mit der ganzen Zahl läßt sich jeder Bruch verbinden. So erhalten wir

$1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{4}$ ꝛc.; $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{4}$ u. s. f. Dieß sind gemischte Zahlen oder gemischte Brüche.

Jede ganze und gemischte Zahl läßt sich in Bruchform bringen. $1 = \frac{4}{4}$, $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Auf diese Weise entstehen Bruchzahlen, von denen man nicht sagen kann, daß sie einen oder mehrere gleiche Theile von einem Ganzen enthalten. Man nennt sie deßhalb unächte Brüche. Ihr Zähler ist entweder dem Nenner gleich, oder größer als derselbe. Im Gegensatze zu ihnen heißen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc., welche in Wirklichkeit nur aus einem oder mehreren Theilen eines Ganzen bestehen, ächte Brüche.

4) Ganze und gemischte Zahlen in unächte Brüche zu verwandeln.

Mündlich.

a. Verwandle die Zahl 8 in 4tel! (1 G. $= \frac{4}{4}$; 8 G. $= 8 \times \frac{4}{4}$ oder $\frac{32}{4}$.) Drücke die Zahl 16 in 8tel aus! (1 G. $= \frac{8}{8}$; 16 G. $= 16 \times \frac{8}{8}$; 16×8 oder $8 \times 16 = 128$; $16 \times \frac{8}{8} = \frac{128}{8}$; also sind 16 G. $= \frac{128}{8}$.) Mache 6 G. zu 12tel! (1 G. $= \frac{12}{12}$; 6 G. $= 6 \times \frac{12}{12}$ oder $\frac{72}{12}$.)

7 Ganze, wie viel 9tel? 11tel? 15tel? 18tel? 20stel?

Dergleichen Aufgaben bis zur Fertigkeit!

b. Verwandle die gemischte Zahl $5\frac{3}{4}$ in einen unächten Bruch! (5 G. $= 5 \times 4$ oder $\frac{20}{4}$, $\frac{20}{4} + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$; $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.) Drücke $8\frac{5}{6}$ ganz in 6tel aus! (8 G. $= 8 \times 6$ oder $\frac{48}{6}$, $\frac{48}{6} + \frac{5}{6} = \frac{53}{6}$; $8\frac{5}{6} = \frac{53}{6}$.)

$7\frac{1}{2} = ?$	$4\frac{1}{11} = ?$	$1\frac{17}{25} = ?$	$11\frac{1}{4} = ?$	$21\frac{3}{10} = ?$
$9\frac{2}{3} = ?$	$3\frac{5}{12} = ?$	$3\frac{16}{31} = ?$	$15\frac{3}{5} = ?$	$25\frac{7}{8} = ?$
$5\frac{5}{6} = ?$	$6\frac{11}{15} = ?$	$2\frac{13}{48} = ?$	$12\frac{1}{7} = ?$	$30\frac{5}{9} = ?$

Schriftlich.

Aufg. Wie viele 13tel geben a. 8 G.? b. 375 G.?

Aufl. 1 Ganzes $= \frac{13}{13}$; 8 Ganze $= 8 \times 13$ Dreizehntel, und 375 Ganze $= 375 \times 13$ Dreizehntel.

Ausr. a. 13 (Dreiz.)

$$\begin{array}{r} 13 \\ 8 \\ \hline 104 = \frac{104}{13} \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} 375 \\ 13 \\ \hline 1125 \\ 375 \\ \hline 4875 = \frac{4875}{13}. \end{array}$$

Aufg. a. $563\frac{5}{6} = ?$ b. $8457\frac{43}{48} = ?$

Ausrechnung:

a.

$$\begin{array}{r} 563\frac{5}{6} \\ 6 \\ \hline 3378 \\ +\ 5 \\ \hline 3383 = \frac{3383}{6}. \end{array}$$

kürzer:

$$\begin{array}{r} 563\frac{5}{6} \\ \hline 3383 \\ \hline 6 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} 8457\frac{43}{48} \\ 48 \\ \hline 67656 \\ 33828 \\ +\ 43 \\ \hline 405979 = \frac{405979}{48}. \end{array}$$

Aufz. z. Zifferr., 48. u. 49. Uebung.

5) Unächte Brüche auf ganze oder gemischte Zahlen zurückzuführen.

$^{24}/_4$, wie viel Ganze? $^4/_4 = 1$ G.; $^{24}/_4$ sind daher so vielmal 1 G., als $^4/_4$ in $^{24}/_4$ enthalten sind. $^4/_4$ sind in $^{24}/_4$, wie 4 in 24, 6mal enthalten; also sind $^{24}/_4 = 6 \times 1$ G. $= 6$ G.

Wie viel Ganze sind $^{75}/_8$? $^8/_8 = 1$ G.; so oft also $^8/_8$ in $^{75}/_8$ enthalten sind, so viel Ganze habe ich. $^8/_8$ sind in $^{75}/_8$ 9mal enthalten, und $^3/_8$ bleiben im Reste; mithin sind $^{75}/_8 = 9^3/_8$.

$^{27}/_2 =$? $^2/_2 = 1$; $^2/_2 : {}^{27}/_2 = 13$mal, Rest $^1/_2$; $^{27}/_2 = 13^1/_2$.

$^{32}/_5 =$? $^5/_5 = 1$; $^5/_5 : {}^{32}/_5 =$ 6mal, Rest $^2/_5$; $^{32}/_5 = 6^2/_5$.

$^{11}/_2=$?	$^{13}/_5=$?	$^{17}/_4=$?	$^{23}/_2=$?	$^{31}/_5=$?	$^{43}/_8=$?	$^{75}/_{12}=$?
$^{11}/_3=$?	$^{13}/_6=$?	$^{17}/_8=$?	$^{23}/_3=$?	$^{31}/_6=$?	$^{43}/_9=$?	$^{75}/_{16}=$?
$^{11}/_4=$?	$^{13}/_7=$?	$^{17}/_9=$?	$^{23}/_4=$?	$^{31}/_7=$?	$^{43}/_{10}=$?	$^{75}/_{24}=$?

Aufgabe: $\frac{2483}{9}$, wie viel Ganze?

```
9 | 2483 | 275
    18
    --
     68
     63
     --
      53
      45
      --
       8
```

Also sind $\frac{2483}{9} = 275^8/_9$.

Aufg. z. Zifferr., 50. Uebung.

6) Brüche zu erweitern.

Mündlich.

Wir knüpfen bei dem bereits Bekannten an.

a) Welche Theile lassen sich in 6tel verwandeln? (Halbe und 3tel.) Welche in 8tel? in 9tel? 10tel? — Wie entstehen aus den Halben 4tel? 6tel? 8tel? 10tel? (Viertel entstehen, wenn man ein Halbes wieder in zwei gleiche Theile theilt, Sechstel, wenn man $^1/_2$ wieder in 3 gleiche Theile theilt u. s. f.) — Theilt nun 1 Halbes auch in 6 und in noch mehr gleiche Theile und seht zu, was für Theile entstehen. (Theile ich $^1/_2$ in 6 gleiche Theile, so gibt das Ganze 2×6 oder 12 gleiche Theile, also 12tel; theile ich 2c.) Demnach ist (an die Wandtafel geschrieben)

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \frac{10}{20} \text{ 2c.}$$

Die Nenner 4, 6, 8 2c. sind Vielfache oder Produktzahlen aus 2; Halbe lassen sich also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 2 sind.

Wie entstehen aus den Dritteln 6tel und 9tel? (6tel, wenn man $^1/_3$ in 2 gleiche Theile theilt, und 9tel, wenn man $^1/_3$ in drei gleiche Theile theilt.) — Theilt nun $^1/_3$ auch in 4 und mehr gleiche

Theile und seht zu, was für Theile entstehen! (Theile ich $^1/_3$ in 4 gleiche Theile, so gibt das Ganze 3 × 4 oder 12 gleiche Theile, also 12tel; theile ich $^1/_3$ in 5 gleiche Theile; so gibt &c.) Demnach ist

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{6}{18}=\frac{7}{21}=\frac{8}{24}=\frac{9}{27}=\frac{10}{30}\ \text{\&c.}$$

Die Nenner 6, 9, 12 &c. sind Vielfache oder Produktzahlen aus 3; Drittel lassen sich also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 3 sind.

Nun werdet ihr auch wissen, in was für Theile sich 4tel, 5tel, 6tel &c. verwandeln lassen (4tel lassen sich in 8tel, 12tel, 16tel, 20stel &c., also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 4 sind. 5tel lassen sich in 10tel, 15tel, 20stel &c., also in solche Theile verwandeln, deren Nenner Produktzahlen aus 5 sind u. s. f.)

b) Von welchen Zahlen ist 12 die Produktzahl? (Von 2, 3, 4, 6.) Welche Theile lassen sich daher in 12tel verwandeln? (Halbe, 3tel, 4tel und 6tel.) Von welchen Zahlen ist 14 die Produktzahl? Welche Theile lassen sich daher in 14tel verwandeln? u. s. w.

c) In wie viel Theile muß man

Halbe theilen, um 12tel (18tel, 24stel &c.) zu erhalten?
Drittel, um 12tel (18tel, 24stel, 36stel &c.) zu bekommen?
Viertel, damit 12tel, (20stel, 32stel, 40stel &c.) entstehen?
&c. &c.
Zwanzigstel, wenn 40stel, 60stel, 80stel &c. entstehen sollen?

Ein Ganzes hat 2 Halbe. Will ich aus den 2 Halben 12tel oder 12 gleiche Theile erhalten, so muß ich jedes Halbe wieder in 6 gleiche Theile theilen; will ich aus den 2 Halben 18tel oder 18 gleiche Theile erhalten, so muß ich jedes Halbe in 9 gleiche Theile theilen u. s. w.

d) Wie viel 12tel gibt $^1/_3$? $^1/_4$? $^1/_6$? — Wie viel 14tel gibt $^1/_2$? $^1/_7$? — Wie viel 15tel gibt $^1/_3$? $^1/_5$? — Wie viel 16tel gibt $^1/_2$? $^1/_4$? $^1/_8$? — Wie viel 18tel gibt $^1/_2$? $^1/_3$? $^1/_6$? $^1/_9$? u. s. w. Ist recht tüchtig zu üben.

e) Verwandle $^2/_3$ in 12tel! $^7/_8$ in 24stel! $^9/_{10}$ in 60stel!
$^4/_5$ in 15tel! $^5/_6$ in 48stel! $^7/_{15}$ in 75stel!
$^7/_9$ in 18tel! $^{11}/_{12}$ in 48stel! $^{17}/_{20}$ in 100tel!

(1 G. = $^{12}/_{12}$, $^1/_3$ = $^4/_{12}$, $^2/_3$ = 2 × 4 oder $^8/_{12}$.)

Wie viel 24stel geben $^2/_3$? $^3/_4$? $^5/_6$? $^7/_8$? $^{11}/_{12}$?
Wie viel 60stel machen $^2/_3$? $^3/_4$? $^4/_5$? $^5/_6$? $^9/_{19}$? $^{11}/_{12}$?

Schriftlich.

$^3/_4$, wie viel 96stel?

1 G. = $^{96}/_{96}$; $^1/_4$ gibt den 4. Theil von den 96 Theilen, und $^3/_4$ geben 3mal so viel, als $^1/_4$.

```
4 | 9 6 | 2 4
    8       3
   ---   -----
    1 6   7 2
    1 6
   ----
```

$$\frac{3}{4}=\frac{72}{96}$$

$$1=\frac{96}{96}$$

$$^1/_4=\frac{24}{96}$$

$$^3/_4 = 3 \times 24 \text{ oder } \frac{72}{96}$$

Der Bruch $^3/_4$ ist dem Werthe nach $= {}^{72}/_{96}$, nur ist er jetzt in größeren Zahlen ausgedrückt. Jedes 4tel ist in 24 gleiche Theile getheilt. Zähler und Nenner von $^{72}/_{96}$ sind daher auch 24mal so groß, als Zähler und Nenner von $^3/_4$. Und eben deßhalb wird das Verwandeln eines Bruches in kleinere Theile „das Erweitern" desselben genannt.

Aufg. z. Ziffërr., 51. Uebung.

7) Brüche zu kürzen oder zu heben.

Das Kürzen der Brüche ist das Entgegengesetzte vom Erweitern derselben. Beim Erweitern wird ein Theil wieder in 2 oder mehrere gleiche Theile zerlegt; beim Kürzen werden immer 2 oder mehrere gleiche Theile in einen vereinigt. Dort findet eine Verkleinerung der Theile und darum eine Vermehrung der Anzahl der Theile statt; hier ist es eine Vergrößerung der Theile, mithin eine Verminderung der Anzahl der Theile.

$^4/_4 = 1$ G.; $^2/_4$ in einen Theil vereinigt $= {}^1/_2$.

$^6/_6 = 1$; $^3/_6$ vereinigt $= {}^1/_2$; $^2/_6 = {}^1/_3$; $^4/_6$ sind so vielmal $^1/_3$, als $^2/_6$ in $^4/_6$ enthalten sind; $^2/_6 : {}^4/_6 = 2$mal; also sind $^4/_6 = {}^2/_3$.

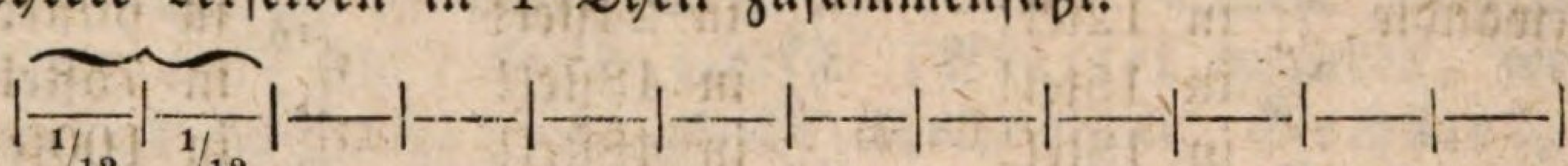
$^8/_8 = 1$; $^4/_8 = {}^1/_2$; $^2/_8 = {}^1/_4$; $^2/_8$ sind in $^6/_8$ 3mal enthalten, also sind $^6/_8 = {}^3/_4$.

$^9/_9 = 1$; $^3/_9 = {}^1/_3$; $^3/_9$ sind in $^6/_9$ 2mal enthalten, also sind $^6/_9 = {}^2/_3$.

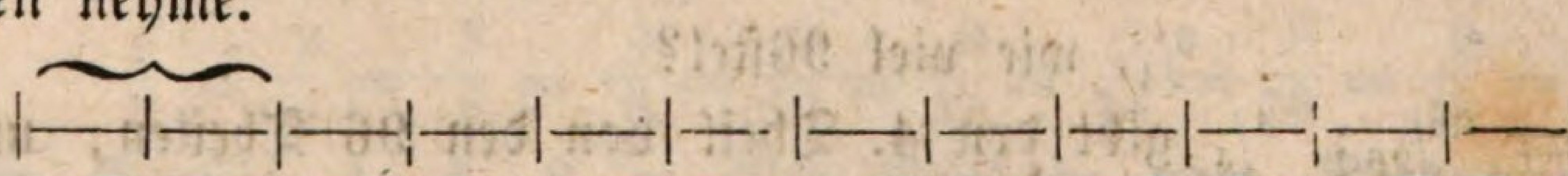
$^{10}/_{10} = 1$; $^5/_{10} = {}^1/_2$; $^2/_{10} = {}^1/_5$; $^2/_{10}$ sind in $^4/_{10}$ 2mal, in $^6/_{10}$ 3mal, in $^8/_{10}$ 4mal enthalten; also sind $^4/_{10} = {}^2/_5$, $^6/_{10} = {}^3/_5$, $^8/_{10} = {}^4/_5$.

Das Alles hat der Schüler auch schon aus der Anschauung erkannt.

Nun theilen wir 1 Ganzes in 12 gleiche Theile, also in 12tel, und sehen zu, was für Theile sich bilden, wenn man je zwei oder mehrere derselben in 1 Theil zusammenfaßt.



Fasse ich $^2/_{12}$ zusammen, so entsteht 1 Theil, der doppelt so groß ist, als $^1/_{12}$. Um aber sagen zu können, was für 1 Theil er vom Ganzen ist, so muß ich wissen, wie viele solche Theile das Ganze hat. Das erfahre ich, wenn ich von allen 12 Theilen je 2 zusammen nehme.

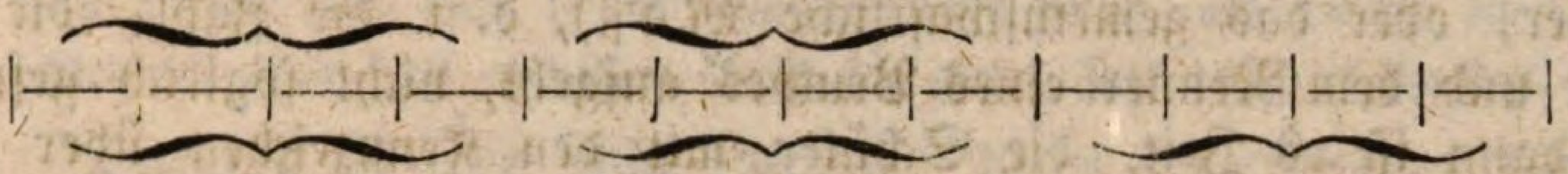
 $^2/_{12} = {}^1/_6$.

Vereinige ich von $^{12}/_{12}$ je $^2/_{12}$ in 1 Theil, so bilden sich aus den 12 Theilen so viele größere Theile, als 2 in 12 enthalten ist, nämlich 6, also sind $^2/_{12} = {}^1/_6$.

 $^3/_{12} = {}^1/_4$.

Fasse ich $^3/_{12}$ zusammen, so bildet sich 1 Theil, der 3 mal so groß ist, als $^1/_{12}$, und aus dem Ganzen entstehen so viele dergleichen Theile, als 3 in 12 enthalten ist, nämlich 4; also sind $^3/_{12} = {}^1/_4$.

So fortfahrend, findet der Schüler, daß $^4/_{12} = {}^1/_3$, daß $^5/_{12}$ sich nicht in 1 Theil zusammenfassen lassen, weil 5 in 12 nicht aufgeht, daß $^6/_{12} = {}^1/_2$, und daß auch $^7/_{12}$ nicht in 1 Th. vereinigt werden können. Bei $^8/_{12}$ kommen wir auf das Verwandeln eines Bruches in zwei oder mehrere größere Theile.

 $^8/_{12} = {}^2/_3$.

$^8/_{12}$ können wir nicht in 1 Theil zusammenfassen, so wenig als $^5/_{12}$ und $^7/_{12}$. (Warum?) In größere Theile lassen sich $^8/_{12}$ aber doch verwandeln. Wer weiß es? Ihr dürft euch nur an eine Zahl erinnern, die in 8 und in 12 zugleich ohne Rest enthalten ist. Nehmen wir je 4 Theile zusammen, so bilden sich aus den 8 Theilen so viele Theile, als 4 in 8 enthalten ist, nämlich 2, und aus den 12 Theilen bilden sich so viele Theile, als 4 in 12 enthalten ist, nämlich 3; $^8/_{12} = {}^2/_3$.

Eben so wird gefunden, daß $^9/_{12} = {}^3/_4$, $^{10}/_{12} = {}^5/_6$, und daß $^{11}/_{12}$ sich nicht in größere Theile verwandeln lassen, weil es außer 1 keine Zahl gibt, die in 11 und in 12 zugleich ohne Rest enthalten ist.

Das Zusammenfassen je zweier oder mehrerer gleicher Theile in einen Theil heißt Kürzen oder Heben. Kürzen oder heben läßt sich daher ein Bruch, wenn es eine Zahl gibt, die in dem Zähler und in dem Nenner desselben zugleich ohne Rest enthalten ist, und es geschieht, indem man mit dieser Zahl in Zähler und Nenner dividirt.

Uebungen und Aufgaben.

1) Welcher Theil vom Ganzen bildet sich, wenn man $^3/_{15}$ in einen Theil vereinigt? Eben so $^5/_{15}$, $^2/_{16}$, $^4/_{16}$, $^3/_{24}$ ꝛc.
2) Kürzt $^3/_{21}$, $^5/_{25}$, $^{20}/_{40}$, $^5/_{40}$, $^8/_{32}$, $^{25}/_{75}$, $^{33}/_{66}$ ꝛc.
3) Welche Zahl geht im Zähler und Nenner auf bei $^{10}/_{15}$? $^{12}/_{15}$? $^{15}/_{18}$? $^{12}/_{18}$? $^{18}/_{24}$? $^{20}/_{30}$? $^{40}/_{50}$? $^{30}/_{45}$ ꝛc.
4) Sucht Brüche auf, die sich durch 3, durch 5, durch 7 ꝛc. heben lassen!
5) Kürzt folgende Brüche:

$^3/_{15}$	$^4/_{16}$	$^5/_{20}$	$^6/_{24}$	$^{33}/_{44}$	$^{24}/_{48}$	$^{36}/_{72}$
$^{12}/_{15}$	$^{12}/_{16}$	$^{15}/_{20}$	$^{18}/_{24}$	$^{45}/_{60}$	$^{32}/_{48}$	$^{48}/_{72}$
$^5/_{15}$	$^6/_{18}$	$^7/_{21}$	$^4/_{24}$	$^{12}/_{60}$	$^{30}/_{48}$	$^{60}/_{72}$
$^{10}/_{15}$	$^{12}/_{18}$	$^{14}/_{21}$	$^{20}/_{24}$	$^{10}/_{60}$	$^{40}/_{48}$	$^{75}/_{100}$.

Hierbei werden die Schüler von selbst auf die mehrmalige Kürzung kommen.

Schriftlich.

Es sei der Bruch $^{75}/_{100}$ zu kürzen.

Der Bruch $^{75}/_{100}$ enthält 75 von 100 gleichen Theilen. In 75 und in 100 geht 25 auf. Nimmt man je 25 Th. in 1 Th. zusammen, so bilden sich aus den

75 Th. so viele größere Theile, als 25 in 75, und aus den 100 Th. so viele, als 25 in 100 enthalten ist. Steht so:

$$\frac{75}{100}\Big|\overset{25}{\smile}\frac{3}{4} \qquad \text{Oder:} \qquad \frac{75}{100}\Big|\overset{5}{\smile}\frac{15}{20}\Big|\overset{5}{\smile}\frac{3}{4}$$

Aufg. z. Zifferr., 52. Uebung.

Tritt der Fall ein, daß die Hebezahl (der gemeinschaftliche Theiler, oder das gemeinschaftliche Maß), d. i. die Zahl, die in dem Zähler und dem Nenner eines Bruches aufgeht, nicht sogleich gefunden wird, dann ist es Zeit, die Schüler mit den Kennzeichen über die Theilbarkeit der Zahlen bekannt zu machen.

Durch **2** ist jede Zahl theilbar, in deren Einerstelle entweder eine Null, oder eine durch 2 theilbare Zahl steht. Z. B. 70, 430, 74, 596, 718, 1352.

Denn in den Zehnern, Hunderten rc. geht 2 ohnehin auf. Sind daher auch die Einer durch 2 theilbar, so ist es die ganze Zahl.

Durch **4** ist jede Zahl theilbar, wo am Ende wenigstens zwei Nullen stehen, oder wo die Summe der Zehner und Einer durch 4 theilbar ist. Z. B. 7200, 7548, 236, 9308, 7860.

Denn in den Hundertern, Tausendern rc. geht 4 in allen Fällen auf. Ist daher auch die Summe der Zehner und Einer durch 4 theilbar, so ist es die ganze Zahl.

Durch **8** ist jede Zahl theilbar, wo am Ende wenigstens drei Nullen stehen, oder wo 8 in den drei letzten Stellen aufgeht. Z. B. 9000, 75000, 5648, 3064, 5408, 98320.

Denn in den Tausendern und allen höhern Stellen geht 8 jedenfalls auf. Ist daher 8 auch in den drei letzten Stellen ohne Rest enthalten, so ist die ganze Zahl durch 8 theilbar.

Durch **5** ist jede Zahl theilbar, welche am Ende eine 5 oder eine 0 hat. (65; 170; 285; 3700; 7845.)

Grund: Alle Zehner, Hunderter rc. sind durch 5 theilbar; steht nun in der Einerstelle eine 5 oder eine 0, so muß die ganze Zahl durch 5 theilbar sein.

Durch **10** ist jede Zahl theilbar, welche am Ende eine oder mehrere Nullen hat. (20; 450; 900; 7400.)

Durch **100** ist jede Zahl theilbar, welche am Ende zwei oder noch mehr Nullen hat. (800; 9000; 7800 rc.)

Durch **25** ist jede Zahl theilbar, die in den beiden untersten Stellen entweder Nullen oder eine durch 25 theilbare Zahl hat. (3800; 45850; 29825; 47975.) Grund!

Durch **9** ist eine Zahl theilbar, in deren Quersumme 9 aufgeht. Z. B. 7542. Man betrachtet nämlich die 7 Tausender, 5 H. und 4 Z. auch als Einer und zählt sie mit den 2 Einern zusammen, als 7 + 5 + 4 + 2 = 18; 18 ist durch 9 theilbar, also geht auch 9 in 7542 auf.

Grund: Theilt man mit 9, so bleibt von jedem Zehner (= 9 + 1), von

jedem Hunderter (= 99 + 1), von jedem Tausender (= 99 + 1) 1 Einer als Rest.

Von 7 Tausendern bleiben also 7 Einer;
Von 5 Hundertern „ „ 5 „ ;
Von 4 Zehnern „ „ 4 „ ;
Fügt man hiezu auch die schon vorhandenen 2 „ ; so ergibt sich,

daß von 7542 die Summe aller Reste = 18 Einer ist.

In dem, was die Zahl 7542 mehr beträgt als 18 Einer, geht 9 ohnehin auf. Ist nun 9 (wie hier) auch in der Summe aller Reste, als welche die Quersumme zu betrachten ist, ohne Rest enthalten, so ist die ganze Zahl durch 9 theilbar.

Durch 3 ist jede Zahl theilbar, deren Quersumme durch 3 theilbar, z. B. 87645.

$8 + 7 + 6 + 4 + 5 = 30$; 30 ist durch 3 theilbar, also auch die Zahl 87645. — Grund: wie oben bei 9.

Durch 6 ist jede Zahl theilbar, welche theilbar ist durch 2 und durch 3; durch 12 jede Zahl, welche theilbar ist durch 3 und durch 4; durch 15 jede Zahl, welche theilbar ist durch 3 und durch 5 xc. Die Gründe lassen sich leicht erkennen.

Durch 11 sind dreistellige Zahlen theilbar, wenn ihre mittlere Stelle als die Summe der beiden äußeren erscheint. (253; 297; 572.)

Der Grund wird erkannt, wenn man die Zahlen 23, 27, 52 durch 11 multiplicirt.

Weitere Regeln über die Theilbarkeit der Zahlen geben wir nicht, weil sie leichter vergessen, als gelernt und begriffen werden würden. Auch ist von dem nachstehenden Verfahren, wornach man bei zwei noch so großen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß sicher finden kann, nur wenn es die Zeit wohl erlaubt, in der Schule Gebrauch zu machen.

Man theilt nämlich mit dem Zähler in den Nenner. Geht es auf, so ist der Zähler selbst die verlangte Zahl. Bleibt ein Rest, so dividirt man mit demselben in den Zähler. Geht es auf, so ist der als Theiler gebrauchte Rest die Zahl zum Heben, bleibt aber wieder ein Rest, so theilt man mit diesem Rest wieder in den vorigen Theiler, und so fort. Der Theiler, wodurch es endlich aufgeht, ist als Hebezahl zu nehmen. Z. B. $^{111}/_{407} = ?$

```
111 | 407 | 3                     37
      333                     111 | 3
      ---------               ----+----
       74 | 111 | 1           407 | 11
             74                   |
            ---------
             37 | 74 | 2
                  74
```

Dieß Verfahren beruht zunächst auf den zwei Sätzen:

1) W e n n e i n e Z a h l i n z w e i e i n z e l n e n Z a h l e n o h n e R e s t e n t h a l t e n i s t , s o g e h t s i e a u c h i n d e r e n S u m m e a u f .

37 geht in sich selbst und in 74 auf; also ist 37 auch in der Summe von 37 und 74 d. i. in 111 ohne Rest enthalten. (37 liegt in 111 genau so oft, als in 37 und 74 zusammengenommen.)

2) Wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, so geht sie auch in jedem Vielfachen derselben auf.

37 geht auf in 111; also liegt 37 auch in 3mal 111, d. i. in 333 ohne Rest. (37 liegt in 333 gerade 3mal so oft als in 111.)

Wir haben bereits gefunden, daß 37 in 74 und in 333 ohne Rest enthalten ist; mithin geht 37 (nach dem ersten Satze) auch in der Summe von 74 und 333 d. i. in 407 auf.

37 geht also im Zähler 111 und im Nenner 407 auf. Mithin kann der Bruch $^{111}/_{407}$ durch 37 gehoben werden.

(Ist der letzte Rest 1, so kann der Bruch, da 1 nicht theilt, nicht aufgehoben werden.)

Aufg. $^{89}/_{267}$, $^{4063}/_{4541}$, $^{7711}/_{9113}$, $^{1003}/_{2419}$, $^{1679}/_{1932}$, $^{533}/_{1189}$.

8) Brüche gleichnamig zu machen.

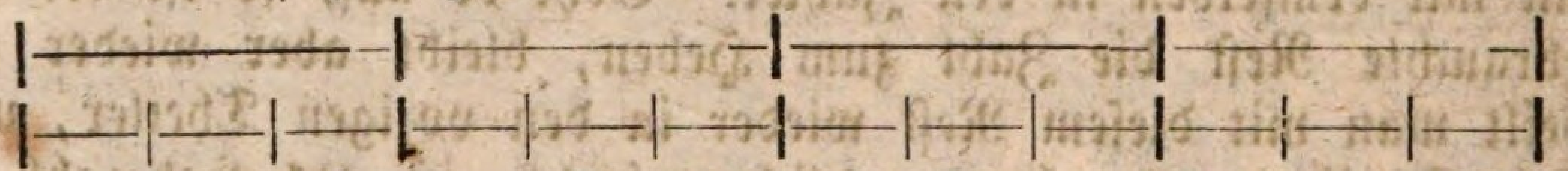
a. Die kleineren Nenner gehen in den größeren auf.

Wenn $^{1}/_{2}$ zu $^{3}/_{4}$ gezählt, oder von $^{3}/_{4}$ abgezogen werden soll, kann es so ohne Weiteres geschehen? Nein; man muß zuvor das Halbe auch zu Viertel machen. Man muß also $^{1}/_{2}$ in solche Theile verwandeln, woraus der Bruch $^{3}/_{4}$ besteht. Thut es! $^{1}/_{2} = {}^{2}/_{4}$. Jetzt sind die Theile des einen Bruches von der nämlichen Größe, wie die des andern. Die Nenner der Brüche $^{2}/_{4}$ und $^{3}/_{4}$ sind einander gleich. Die Theile haben gleiche Namen; die Brüche sind gleichnamig.

Sind die Brüche $^{1}/_{2}$ und $^{5}/_{6}$ gleichnamig, oder ungleichnamig? Macht sie gleichnamig! $^{1}/_{2} = {}^{3}/_{6}$. Anstatt $^{1}/_{2}$ und $^{5}/_{6}$ haben wir jetzt $^{3}/_{6}$ und $^{5}/_{6}$. Jetzt könnte man sie addiren und subtrahiren.

Macht eben so gleichnamig: $^{1}/_{2}$ u. $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{2}$ u. $^{7}/_{10}$, $^{3}/_{4}$ u. $^{3}/_{8}$, $^{2}/_{3}$ u. $^{1}/_{6}$, $^{2}/_{3}$ u. $^{5}/_{9}$, $^{4}/_{5}$ u. $^{7}/_{10}$.

Weiterführung.



4tel.
12tel.

Ihr seht hier zweimal dasselbe Ganze. Das eine Mal ist es in 4 gleiche Theile oder in 4tel, das andere Mal in 12 gl. Th. oder in 12tel getheilt. Die Theile sind verschieden und haben daher auch verschiedene Namen. 4tel und 12tel sind ungleichnamige Theile. Wir können sie aber in gleiche und gleichnamige verwandeln. Wer weiß und thut es? Ich theile jedes 4tel in 3 12tel.



12tel.
12tel.

So sind nun 4tel und 12tel in gleiche und gleichnamige Theile verwandelt.

1) In welche kleineren Theile lassen sich 4tel noch verwandeln? In welche Theile lassen sich verwandeln Halbe? 3tel? 5tel? ꝛc.

2) Macht gleichnamig:

$^1/_2$ u. $^1/_6$	$^1/_3$ u. $^1/_6$	$^3/_4$ u. $^7/_{24}$	$^1/_2$, $^1/_4$ u. $^1/_8$
$^1/_2$ u. $^1/_{14}$	$^1/_3$ u. $^1/_{12}$	$^4/_5$ u. $^4/_{25}$	$^1/_3$, $^1/_6$ u. $^1/_{12}$
$^1/_2$ u. $^1/_{20}$	$^1/_3$ u. $^1/_{18}$	$^5/_6$ u. $^7/_{36}$	$^1/_4$, $^1/_8$ u. $^1/_{32}$
$^1/_2$ u. $^1/_{24}$	$^1/_3$ u. $^1/_{30}$	$^7/_8$ u. $^9/_{48}$	$^1/_{12}$, $^1/_{48}$ u. $^1/_{24}$

b. Die kleinern Nenner gehen nicht in den größern auf.

Beispiel 1. Macht $^1/_2$ und $^1/_3$ gleichnamig!

Läßt sich das Halbe in 3tel verwandeln? Nein. Oder das 3tel in Halbe? Noch weniger. Wir müssen also sowohl $^1/_2$ als $^1/_3$ in kleinere Theile theilen.

$^1/_2$ in 2 Theile getheilt $= ^2/_4$; $^1/_3$ in 2 Theile getheilt $= ^2/_6$.
$^1/_2$ in 3 " " $= ^3/_6$.

Nun sind sie gleichnamig. $^1/_2 = ^3/_6$, und $^1/_3 = ^2/_6$.

Eben so mit $^1/_2$ und $^1/_5$.

Beispiel 2. 3tel und 4tel gleichnamig zu machen.



Daß ich die 3tel nicht in 4tel und die 4tel nicht in 3tel verwandeln kann, springt in die Augen. Ich muß daher sowohl die 3tel, als die 4tel in kleinere Theile zerfällen, nur fragt es sich, in welche oder in wie viele, um gleiche und gleichnamige Theile zu erhalten. — 3tel lassen sich verwandeln in 6tel, 9tel, 12tel rc., also in eine solche Zahl von Theilen, in welcher 3 aufgeht; und 4tel lassen sich verwandeln in 8tel, 12tel, 16tel rc., also in eine solche Zahl von Theilen, in welcher 4 aufgeht. Was für eine Zahl von Theilen wird es nun sein, in welche sich 3tel und 4tel zugleich verwandeln lassen? Eine solche, worin 3 und 4 zugleich ohne Rest enthalten sind. Und diese ergibt sich, wenn man 3 und 4 miteinander multiplicirt. $3 \times 4 = 12$. Ich verwandle also die 3tel und 4tel ist 12tel. $^1/_3 = ^4/_{12}$, und $^1/_4 = ^3/_{12}$.



12tel.
12tel.

Für die ungleichen und ungleichnamigen Theile haben wir jetzt gleiche und daher auch gleichnamige Theile. Ihr gemeinschaftlicher Name ist 12tel, ihr gemeinschaftlicher oder Hauptnenner ist 12.

Beispiel 3. $^4/_5$ und $^5/_6$ gleichnamig zu machen.

5tel und 6tel lassen sich, da $5 \times 6 = 30$, in 30stel verwandeln (kommen in 30stel zusammen). $^1/_5 = ^6/_{30}$, und $^4/_5 = 4 \times 6$ oder $^{24}/_{30}$; $^1/_6 = ^5/_{30}$, und $^5/_6 = 5 \times 5$ oder $^{25}/_{30}$. Also sind $^4/_5$ und $^5/_6 = ^{24}/_{30}$ und $^{25}/_{30}$.

Macht gleichnamig:

$^3/_4$ u. $^5/_7$,	$^4/_7$ u. $^7/_8$,	$^5/_6$ u. $^9/_{11}$,	$^4/_5$ u. $^7/_{12}$,	$^1/_2$ u. $^{17}/_{19}$.
$^6/_7$ u. $^8/_9$,	$^3/_{10}$ u. $^9/_{10}$,	$^5/_8$ u. $^5/_{11}$,	$^{10}/_{11}$ u. $^9/_{10}$,	$^3/_5$ u. $^{13}/_{18}$.

Beispiel 4. $^9/_{10}$ u. $^7/_{15}$ gleichnamig zu machen.

10tel und 15tel lassen sich, da $10 \times 15 = 150$, in 150stel verwandeln. Es gibt jedoch eine viel kleinere Zahl, worin 10 und 15 aufgehen. Diese Zahl ist 30; 30 aber ist genau $^1/_5$ von 150. Daß hier eine nur $^1/_5$ mal so große Zahl als Hauptnenner möglich ist, als das Produkt der beiden Nenner, liegt darin, daß 10 und 15 die Zahl 5 zum gemeinschaftlichen Maße haben. Ist nämlich 15 auch nicht durch 10 theilbar, so ist sie es doch durch das gemeinschaftliche Maß, durch 5. Und um aus einer Zahl, die schon durch 5 theilbar ist, eine andere zu erzeugen, in welcher 10 oder 2×5 aufgeht, so genügt es, sie nur noch durch 2 zu multipliciren. $2 \times 15 = 30$.

$^9/_{10} = 9 \times 3$ oder $^{27}/_{30}$, und $^7/_{15} = 7 \times 2$ oder $^{14}/_{30}$.

Beispiel 5. $^1/_9$ und $^1/_{12}$.

9tel und 12tel geben, da $9 \times 12 = 108$, 108tel. 9tel und 12tel lassen sich aber auch in 72stel, sowie in 36stel verwandeln. 36 ist $^1/_3$ von 108. Woher kommt es nun, daß ein Hauptnenner möglich ist, der nur $^1/_3$ von dem Produkte aus 9 und 12 beträgt? Daher, weil 9 und 12 die Zahl 3 als gemeinschaftliches Maß — als gemeinschaftlichen Faktor — haben. 12 ist zwar nicht theilbar durch 9 selbst, aber doch durch das gemeinschaftliche Maß — durch einen Faktor von 9 — durch 3. Um daher aus 12 eine Zahl zu erzeugen, worin 9 oder 3×3 aufgeht, so braucht man 12 nur durch eine 3 zu multipliciren. $3 \times 12 = 36$; $^1/_9 = {^4/_{36}}$, und $^1/_{12} = {^3/_{36}}$.

Beispiel 6. $^{11}/_{18}$ und $^{19}/_{24}$.

Die Nenner 18 und 24 haben mehrere gemeinschaftliche Maße, nämlich 2, 3 und 6. Das größte derselben ist 6; 6 liegt in 18 3 mal; $3 \times 24 = 72$. — $^1/_{18} = {^4/_{72}}$, und $^{11}/_{18} = 11 \times 4$ oder $^{44}/_{72}$; $^1/_{24} = {^3/_{72}}$, und $^{19}/_{24} = 19 \times 3$ oder $^{57}/_{72}$.

Welches ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner von

$^1/_{12}$ u. $^1/_{15}$?	$^1/_{14}$ u. $^1/_{21}$?	$^1/_{18}$ u. $^1/_{27}$?	$^1/_{30}$ u. $^1/_{40}$?
$^1/_{12}$ u. $^1/_{16}$?	$^1/_{15}$ u. $^1/_{20}$?	$^1/_{20}$ u. $^1/_{30}$?	$^1/_{32}$ u. $^1/_{48}$?
$^1/_{12}$ u. $^1/_{18}$?	$^1/_{16}$ u. $^1/_{24}$?	$^1/_{20}$ u. $^1/_{25}$?	$^1/_{50}$ u. $^1/_{75}$?

Bringt auf gleiche Nenner:

$^5/_6$ u. $^9/_{10}$;	$^3/_7$ u. $^7/_9$;	$^5/_8$ u. $^8/_{20}$;	$^1/_2$, $^2/_3$ u. $^3/_4$;
$^7/_9$ u. $^5/_{36}$;	$^7/_{20}$ u. $^3/_{50}$;	$^5/_8$ u. $^7/_{11}$;	$^2/_3$, $^3/_4$ u. $^4/_5$;
$^{11}/_{12}$ u. $^7/_{30}$;	$^{11}/_{20}$ u. $^{17}/_{60}$;	$^7/_8$ u. $^7/_{24}$;	$^3/_4$, $^4/_5$ u. $^5/_6$;

Schriftlich.

a. Die kleinern Nenner sind in dem größten Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten.

Beispiel. $^{11}/_{12}$, $^7/_{15}$, $^{19}/_{20}$, $^{23}/_{30}$, $^{47}/_{60}$ =?

Der größte Nenner dieser Brüche ist 60 Die Nenner 12, 15, 20 und 30 gehen darin auf. Die Brüche $^{11}/_{12}$, $^7/_{15}$, $^{19}/_{20}$ und $^{23}/_{30}$ lassen sich daher gleichfalls in 60stel verwandeln.

	60		
$^{11}/_{12}$	5	55	$^{1}/_{12} = {^{6}/_{60}}$; $^{11}/_{12}$ = 11mal 5 oder $^{55}/_{60}$.
$^{7}/_{15}$	4	28	$^{1}/_{15} = {^{4}/_{60}}$; $^{7}/_{15}$ = 7mal 4 oder $^{28}/_{60}$.
$^{9}/_{20}$	3	27	$^{1}/_{20} = {^{3}/_{60}}$; $^{9}/_{20}$ = 9mal 3 oder $^{27}/_{60}$.
$^{23}/_{30}$	2	46	$^{1}/_{30} = {^{2}/_{60}}$; $^{23}/_{30}$ = 23mal 2 oder $^{46}/_{60}$.
$^{47}/_{60}$	1	47	$^{47}/_{60} = {^{47}/_{60}}$.

$1 = {^{60}/_{60}}$.

Aufg. z. Ifferr., 53. Uebung.

b. **Die Nenner der gegebenen Brüche sind Primzahlen unter sich.**

Beispiel: $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{7}$ und $^{2}/_{3}$.

Von 4, 7 und 3 geht weder eine Zahl in der andern auf, noch haben sie ein gemeinschaftliches Maß. (Sie sind Primzahlen unter sich.) Der möglichst kleinste Hauptnenner ist daher 4 $\times$ 7 $\times$ 3 oder 84. Die Brüche werden also in 84stel verwandelt.

Steht so:

	84		Hauptn.: 4 $\times$ 7 $\times$ 3 = 84.
$^{3}/_{4}$	21	63	$^{1}/_{4} = {^{21}/_{84}}$, $^{3}/_{4} = {^{63}/_{84}}$.
$^{5}/_{7}$	12	60	$^{1}/_{7} = {^{12}/_{84}}$, $^{5}/_{7} = {^{60}/_{84}}$.
$^{2}/_{3}$	28	56	$^{1}/_{3} = {^{28}/_{84}}$, $^{2}/_{3} = {^{56}/_{84}}$.

Aufg. z. Zifferr., 54. Uebung.

c. **Die Nenner der gegebenen Brüche haben ein gemeinschaftliches Maß.**

Beispiel 1. $^{5}/_{21}$ und $^{13}/_{28}$.

Kein Nenner der gegebenen Brüche geht in dem andern auf. Also ist für beide ein gemeinschaftlicher Nenner zu suchen. 21 $\times$ 28 oder 588 kann jedenfalls als solcher stehen. Da aber 21 und 28 ein gemeinschaftliches Maß haben, so ist ein kleinerer Hauptnenner möglich. Das gemeinschaftliche Maß ist hier 7; 28 ist durch 7 theilbar. Um aus 28 eine Zahl zu erzeugen, in welcher auch 21 oder 3mal 7 aufgeht, multiplicire ich 28 blos durch 3; 3mal 28 = 84.

Da 28 = 4 . 7, so ist 3 . 28 = 3 . 4 . 7. Um also eine durch 21 und 28 zugleich theilbare Zahl zu finden, so bedarf man eigentlich nur der drei Faktoren 3 . 4 . 7. Diese erhalten wir auch auf folgende Weise:

$$21 = 3 . 7.$$
$$28 = 4 . 7.$$

Das ist, wir zerlegen die Nenner in ihre Faktoren und lassen den gemeinschaftlichen Faktor 7 nur **einmal** gelten. Ganz dasselbe geschieht bei dem gewöhnlichen Verfahren.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 21.\ \ 28 \\ \hline & 3.\ \ \ 4 \end{array}$$

Das gemeinschaftliche Maß (der Faktor) steht hier als Divisor. 7 in 21 ist 3mal, 21 = 7 × 3; und 7 in 28 ist 4mal, 28 = 7 × 4. Anstatt der 4 Faktoren 7. 3. 7. 4 ergeben sich hier gleich nur diejenigen derselben, welche man braucht, um den kleinsten Hauptnenner zu erhalten, nämlich 7. 3. 4. Mit einander multiplicirt, geben sie 84. Die beiden gegebenen Brüche werden in 84stel verwandelt.

Beispiel 2. Wie heißt der Hauptnenner für 12tel, 15tel und 18tel?

a. 12 = 2 . 2 . 3.
15 = ~~3~~ . 5.
18 = ~~2~~ . ~~3~~ . 3.

12 = 2 × 6 = 2 × 2 × 3; 15 = 3 × 5. Der Faktor 3 findet sich schon bei 12 und wird daher gestrichen. Auch von 18 oder 2 × 3 × 3 finden sich die Faktoren 2 und 3 bei 12; sie werden daher ebenfalls gestrichen. Es bleiben also noch die Faktoren

2 . 2 . 3 . 5 . 3.

Hierunter kommen die Grundfaktoren von jedem unserer Nenner vor; also müssen diese auch in dem Produkte aus 2 . 2 . 3 . 5 . 3 ohne Rest enthalten sein. Und so ist es.

12 oder **2.2.3** liegt in **2.2.3**.5.3 gerade 5.3mal,
15 oder **3.5** liegt in 2.2.**3.5**.3 gerade 2.2.3mal,
18 oder **2.3.3** liegt in **2**.2.**3**.5.**3** gerade 2.5mal.

b. 2	12.	15.	18
3	6.	15.	9
	2.	5.	3

12 ist hier zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und den Quotienten 2; 15 ist zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und in den Quotienten 5, und 18 ist zerlegt in die beiden Theiler 2. 3 und in den Quotienten 3.

Der Hauptnenner ist also

nach a: 2 × 2 × 3 × 5 × 3 = 180
nach b: 2 × 3 × 2 × 5 × 3 = 180.

Die Faktoren stehen zwar das eine Mal nicht ganz in derselben Ordnung wie das andere Mal; es hat dieß aber, wie wir sehen, auf das Produkt nicht den geringsten Einfluß.

Beispiel 3. Wie heißt der Hauptnenner für 9tel, 20stel, 18tel, 16tel, 12tel, 15tel und 24stel.

Das kürzeste Verfahren.

I.	2	~~9~~.	20.	18.	16.	~~12~~.	15.	24.
II.	2		10.	9.	8.		15.	12
III.	3		~~5~~.	9.	4.		15.	6
				3.	4.		5.	~~2~~.

I. Zuerst sehen wir zu, ob sich unter den gegebenen Nennern auch solche befinden, welche in einem der größeren Nenner ohne Rest enthalten sind. Dieß ist bei 9 und 12 der Fall. 9 geht in 18, und

12 in 24 auf. Jede Zahl, welche theilbar ist durch 18, ist es auch durch 9, und jede Zahl, welche theilbar ist durch 24, ist es auch durch 12. (Nachweis!) 9 und 12 sind daher durch 18 und 24 vertreten. Darum werden sie durchstrichen.

Die andern Nenner zerlegen wir in ihre Grundfaktoren. Dieß geschieht, indem wir sie durch ihre gemeinschaftlichen Maße dividiren. Wir nehmen dazu immer die möglichst kleinste Zahl.

2 in 20 ist 10mal (20 = 2 . 10); 2 in 18 ist 9mal (18 = 2 . 9); 2 in 16 ist 8mal (16 = 2 . 8); 2 in 15 geht nicht auf, 15 herunter; 2 in 24 ist 12mal (24 = 2 . 12).

Der Divisor 2 vertritt (repräsentirt) also den Faktor 2 von 20, 18, 16 und 24. Und dieser steht daher anstatt viermal nur einmal. Dreimal ist er bereits als überflüssig weggeschafft.

Ganz so, wie mit den gegebenen Zahlen bei I., verfahren wir jetzt mit den Zahlen bei II., dann auch mit denen bei III. Die erste Frage, die wir stellen (und durch die Schüler selbst sich stellen lassen), ist immer die: Geht eine der Zahlen in der andern auf? Und die zweite: Haben zwei oder mehrere der Zahlen ein gemeinschaftliches Maß und welches?

Zuletzt bleiben die Zahlen 2 . 2. 3. 3 . 4 . 5. Hierunter kommen die Faktoren von jedem der gegebenen Nenner vor.

9 ist vertreten durch 3 . 3, 20 durch 4 . 5, 18 durch 2 . 3 . 3, 16 durch 2 . 2 . 4, 12 durch 2 . 2 . 3, 15 durch 3 . 5, 24 durch 2 . 3 . 4.

Mithin muß die Zahl, die sich aus ihnen erzeugt, nothwendig eine Produktzahl von jedem einzelnen Nenner — eine durch jeden derselben ohne Rest theilbare Zahl sein. Sie heißt 720.

Aufg. z. Zifferr., 55. Uebung.

B. Die Grundrechnungsarten mit Brüchen.

Addiren.

A. Mündlich.

Eine besondere Uebung im mündlichen Addiren gleichnamiger Brüche ist für unsere Schüler nicht mehr nöthig. Doch kann man sie, wenn die Zeit es gestattet, mit dem Verfahren bekannt machen, wodurch das Zusammenzählen größerer Brüche erleichtert wird. Z. B.

$$^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = ?$$

a. $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = {}^{24}/_{25} + {}^{1}/_{25} + {}^{22}/_{25} = 1^{22}/_{25}$.

b. $^{24}/_{25} + {}^{23}/_{25} = (1 + 1) - ({}^{1}/_{25} + {}^{2}/_{25}) = 2 - {}^{3}/_{25} = 1^{22}/_{25}$.

$$^{17}/_{18} + {}^{13}/_{18} + {}^{11}/_{18} = ?$$

$^{17}/_{18} + {}^{13}/_{18} = 1^{12}/_{18}$, $1^{12}/_{18} + {}^{11}/_{18} = 1^{12}/_{18} + {}^{6}/_{18} + {}^{5}/_{18} = 2^{5}/_{18}$.

Um das Addiren ungleichnamiger Brüche zur Sicherheit und Fertigkeit zu bringen, so gebe man Aufgaben, wie folgt:

$\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$	$\frac{11}{12}+\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}+\frac{13}{18}$	$12\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$	$7\frac{3}{4}+13\frac{5}{8}$
$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}+\frac{2}{3}$	$\frac{17}{20}+\frac{23}{30}$	$5\frac{7}{8}+\frac{10}{11}$	$4\frac{4}{5}+8\frac{11}{12}$
$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}+\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}+\frac{11}{13}$	$7\frac{3}{4}+\frac{7}{10}$	$10\frac{7}{9}+6\frac{7}{15}$
$\frac{5}{6}+\frac{4}{5}$	$\frac{11}{12}+\frac{4}{5}$	$\frac{13}{24}+\frac{7}{36}$	$3\frac{2}{3}+\frac{8}{15}$	$6\frac{7}{8}+7\frac{13}{20}$
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Sprechform.

$\frac{5}{6} + \frac{7}{9} = ?$ 6tel und 9tel geben 18tel; $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$, $\frac{5}{6} = 5 \times 3$ oder $\frac{15}{18}$; $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$, $\frac{7}{9} = 7 \times 2$ oder $\frac{14}{18}$; $\frac{15}{18} + \frac{14}{18} = 1\frac{11}{18}$; also sind $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} = 1\frac{11}{18}$.

$8\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = ?$ 5tel und 7tel kommen in 35stel zusammen; $\frac{4}{5} = 4 \times 7$ oder $\frac{28}{35}$, und $\frac{6}{7} = 6 \times 5$ oder $\frac{30}{35}$; $\frac{30}{35} + \frac{28}{35} = \frac{30}{35} + \frac{5}{35} + \frac{23}{35} = 1\frac{23}{35}$; $8 + 1\frac{23}{35} = 9\frac{23}{35}$; also ist $8\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = 9\frac{23}{35}$.

$4\frac{7}{8} + 5\frac{3}{4} = ?$ $4 + 5 = 9$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $\frac{7}{8} + \frac{6}{8} = 1\frac{5}{8}$; $9 + 1\frac{5}{8} = 10\frac{5}{8}$; also ist $4\frac{7}{8} + 5\frac{3}{4} = 10\frac{5}{8}$.

---

1) Addire $2\frac{7}{10}$ fl. und $1\frac{3}{4}$ fl. auf 2erlei Weise! (a. Ich addire die Zahlen, wie sie sind. $2\frac{7}{10}$ fl. + $1\frac{3}{4}$ fl. = $4\frac{9}{20}$ fl. b. Ich löse zuvor die Guldenbrüche in Kreuzer auf.) 2) Karl ist jetzt $12\frac{2}{3}$ Jahre alt; wie alt ist er nach $3\frac{1}{2}$ J.? 3) Lotte kaufte sich $1\frac{1}{2}$ ℔ Baumwollengarn und darauf noch $3\frac{1}{2}$ Vierling; wie viel also im Ganzen? 4) Ein Schff. Roggen wiegt $2\frac{4}{5}$ Ctr.; 1 Schff. Weizen wiegt $\frac{7}{20}$ Ctr. mehr, wie viel also? 5) A kauft die Elle um $3\frac{1}{5}$ fl. und will $\frac{3}{4}$ fl. daran gewinnen; wie muß er sie verkaufen? 6) Ein Laib Brod soll $3\frac{5}{8}$ ℔ wiegen; wie viel Teig ist dazu zu nehmen, wenn durch das Backen $\frac{3}{4}$ ℔ am Gewichte verloren gehen?

B. Schriftlich.

a. Gleichnamige Brüche.

Beispiel 1. $\frac{9}{17} + \frac{12}{17} + \frac{8}{17} + \frac{15}{17} + \frac{4}{17} + \frac{16}{17} = ?$

Beispiel 2. $15\frac{11}{23} + 24\frac{17}{23} + 4 + 375\frac{22}{23} + \frac{6}{23} = ?$

Ansatz und Berechnung:

1.

$\frac{9}{17}$	9	
$\frac{12}{17}$	12	
$\frac{8}{17}$	8	
$\frac{15}{17}$	15	
$\frac{4}{17}$	4	
$\frac{16}{17}$	16	
17	64	$3\frac{13}{17}$

2.

$15\frac{11}{23}$	11
$24\frac{17}{23}$	17
4	
$375\frac{22}{23}$	22
$\frac{6}{23}$	6
$420\frac{10}{23}$	$56 = 2\frac{10}{23}$.

Nr. 1 ist an sich klar. Bei Nr. 2 werden zuerst die Brüche addirt; ihre Summe ist $^{56}/_{23} = 2^{10}/_{23}$. Die $^{10}/_{23}$ wurden unter die Brüche geschrieben, die 2 Ganzen den übrigen Ganzen zugezählt.

Aufg. zum Zifferr., 56. Uebung.

b. Ungleichnamige Brüche.

Beispiel: Wie viel betragen $^3/_4 + ^2/_3 + ^1/_2 + ^4/_5$?

Ausrechnung:

	60	
$^3/_4$	15	45
$^2/_3$	20	40
$^1/_2$	30	30
$^4/_5$	12	48
$2^{43}/_{60}$	60	$163 = 2^{43}/_{60}$.
		120
		43

4.	3.	2	5
			3
			15
			4
		Hauptnenner:	60

Aufg. z. Zifferr., 57. und 58. Uebung.

Subtrahiren.

A. Mündlich.

Das Verfahren in den hier vorkommenden Fällen, auch daß ungleichnamige Brüche erst gleichnamig zu machen sind, ist unsern Schülern schon bekannt. Wir können daher kurz sein.

$4^1/_5 - ^4/_5 = ?$

a. Da sich $^4/_5$ von $^1/_5$ nicht ganz wegnehmen lassen, so denke ich mir $4^1/_5$ als $3 + 1^1/_5 = 3^6/_5$; $3^6/_5 - ^4/_5 = 3^2/_5$.

b. Ich ziehe die $^4/_5$ von 4 ab; $4^1/_5 - ^4/_5 = 3^1/_5 + ^1/_5$ od. $3^2/_5$.

c. $^4/_5 = ^1/_5 + ^3/_5$; $4^1/_5 - ^1/_5 = 4$, $4 - ^3/_5 = 3^2/_5$.

$5^1/_4 - 2^3/_4 = ?$

a. $5^1/_4 - 2 = 3^1/_4$; $3^1/_4 - ^3/_4 = 2^2/_4$ oder $2^1/_2$.

b. $5^1/_4 = 4^5/_4$; $4^5/_4 - 2^3/_4 = 2^2/_4$ oder $2^1/_2$.

$7^4/_9 - ^5/_6 = ?$

9tel und 6tel geben 18tel; $^4/_9 = ^8/_{18}$, und $^5/_6 = ^{15}/_{18}$; jetzt heißt es: $7^8/_{18} - ^{15}/_{18}$; $7^8/_{18} = 6^{26}/_{18}$; $6^{26}/_{18} - ^{15}/_{18} = 6^{11}/_{18}$.

$12^2/_3 - 7^7/_8 = ?$

$12^2/_3 - 7 = 5^2/_3$. Davon habe ich noch $^7/_8$ abzuziehen. $5^2/_3 - ^7/_8 = 4^1/_8 + ^2/_3 = 4^3/_{24} + ^{16}/_{24} = 4^{19}/_{24}$.

Aufgaben.

a.	$^{17}/_{19} - ^{12}/_{19}$	$8^5/_{12} - 3$	$4^{11}/_{12} - ^7/_{12}$	$13^7/_8 - 6^3/_8$
	$^{12}/_{13} - ^7/_{13}$	$20^7/_{13} - 8$	$9^{24}/_{25} - ^{19}/_{25}$	$15^{12}/_{13} - 8^5/_{13}$
	$^{46}/_{47} - ^{25}/_{47}$	$25^9/_{14} - 13$	$8^{35}/_{36} - ^{23}/_{36}$	$20^{17}/_{18} - 5^{13}/_{18}$

b.	$9-\frac{13}{20}$	$8-4\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{5}-\frac{4}{5}$	$5\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}$
	$4-\frac{17}{24}$	$16-9\frac{7}{15}$	$8\frac{3}{7}-\frac{6}{7}$	$18\frac{1}{6}-11\frac{5}{6}$
	$7-\frac{41}{53}$	$25-8\frac{9}{20}$	$11\frac{3}{8}-\frac{7}{8}$	$30\frac{3}{19}-16\frac{12}{19}$
c.	$\frac{11}{12}-\frac{25}{48}$	$7\frac{2}{3}-\frac{5}{9}$	$7\frac{4}{9}-\frac{5}{6}$	$12\frac{4}{7}-4\frac{2}{3}$
	$\frac{24}{25}-\frac{3}{4}$	$4\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{9}-\frac{3}{4}$	$20\frac{11}{12}-8\frac{3}{4}$
	$\frac{19}{20}-\frac{11}{15}$	$8\frac{11}{12}-\frac{11}{18}$	$8\frac{3}{10}-\frac{13}{15}$	$32\frac{3}{16}-9\frac{5}{12}$

---

1) Wie viel muß man zu $3\frac{3}{4}$ legen, um $9\frac{1}{4}$ zu erhalten? ($3\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 4$. $4 + 5\frac{1}{4} = 9\frac{1}{4}$; also ist zu $3\frac{3}{4}$, um $9\frac{1}{4}$ zu erhalten, $\frac{1}{4} + 5\frac{1}{4} = 5\frac{1}{2}$ zu legen.) **2**) Um wie viel unterscheidet sich der Bruch $\frac{40}{63}$ von $1\frac{15}{63}$? (a. Ich sehe zu, wie viel man zu $\frac{40}{63}$ legen muß, um $1\frac{15}{63}$ zu erhalten. b. Ich nehme $\frac{40}{63}$ von $1\frac{15}{63}$ weg und sehe zu, was übrig bleibt.) **3**) Wie viel ist $8\frac{5}{12} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ rc.? **4**) Nimm von $1\frac{1}{3}$ die Summe von $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ weg! **5**) Wie viel ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$? **6**) Suche den Unterschied von $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{8}$! **7**) Wie heißt die Zahl, von der man $12\frac{4}{5}$ nahm und noch $25\frac{2}{3}$ übrig behielt? **8**) Ich nehme $5\frac{3}{5}$ fl. und $8\frac{5}{6}$ fl. ein, wie viel im Ganzen? **9**) Davon gebe ich $9\frac{3}{4}$ fl. aus; wie v. bleibt mir übrig? **10**) Heinrich war 3 Jahre in der Fremde; $1\frac{2}{3}$ J. hatte er Arbeit in München und $1\frac{1}{5}$ J. in Wien; wie lange war er in Arbeit, und wie lange auf der Reise? **11**) Ein Bauer erntet $14\frac{5}{6}$ Schober Weizen und $18\frac{11}{15}$ Sch. Korn, wie viel zusammen? **12**) Davon läßt er sogleich $8\frac{3}{4}$ Schober dreschen; wie v. bleibt übrig? **13**) Ein Händler kauft den Scheffel Weizen um $18\frac{1}{2}$ fl.; wie verkauft er ihn, wenn er daran a. $1\frac{3}{4}$ fl. gewinnt? b. $2\frac{1}{5}$ fl. verliert? **14**) A kauft 2 Klftr. Holz, jede um $16\frac{2}{3}$ fl.; die eine verkauft er um 18 fl. und die andere um $15\frac{3}{4}$ fl. Wie viel macht sein Gewinn oder Verlust? **15**) B verkauft 2 Ellen Westenzeug von verschiedener Sorte, jede um $5\frac{1}{2}$ fl.; an der einen Elle gewinnt er $\frac{3}{4}$ fl., an der andern verliert er $\frac{3}{5}$ fl.; wie hat er jede eingekauft?

B. Schriftlich.

a. Gleichnamige Brüche.

aa. Ohne Borgen.

1) $\frac{123}{136} - \frac{75}{136} = ?$ 2) $304\frac{81}{95} - 187 = ?$

Ansatz und Berechnung:

$\frac{123}{136}$	123		$304\frac{81}{95}$
$\frac{75}{136}$	75		$187 -$
$\frac{6}{17}$	$\frac{48}{136} = \frac{6}{17}$		$117\frac{81}{95}$.

3) $304\frac{81}{95} - \frac{48}{95} = ?$ 4) $304\frac{81}{95} - 187\frac{54}{95} = ?$

Ansatz und Berechnung:

$304^{81}/_{95}$	81
$-\ ^{48}/_{95}$	48
$304^{33}/_{95}$	33

$304^{81}/_{95}$	81
$187^{54}/_{95}$	54
$117^{37}/_{95}$	27

bb. Mit Borgen.

1) $17 - {}^{365}/_{721} = ?$ 2) $372 - 185^{17}/_{28} = ?$

Berechnung:

17.	721
$-\ ^{365}/_{721}$	365
$16\ ^{356}/_{721}$	356

3.7.2.	28
$1\ 8\ 5^{17}/_{28}$	17
$1\ 8\ 6^{11}/_{28}$	11

3) $19^{151}/_{641} - {}^{573}/_{641} = ?$ 4) $543^{73}/_{101} - 345^{97}/_{101} = ?$

Berechnung:

	641
$19.^{151}/_{641}$	151
	792
$-{}^{573}/_{641}$	573
$18^{219}/_{641}$	219

	101
$5.4.3.^{73}/_{101}$	73
	174
$3\ 4\ 5\ ^{97}/_{101}$	97
$1\ 9\ 7\ ^{77}/_{101}$	77

Aufg. z. Zifferr., 59. Uebung.

b. Ungleichnamige Brüche.

1) ${}^{47}/_{48} - {}^{53}/_{84} = ?$

Ansatz und Berechnung.

	336	
$^{47}/_{48}$	7	329
$^{53}/_{84}$	4	212
$^{39}/_{112}$		

$$\frac{117}{336} = {}^{39}/_{112}$$

12	48 .	84.
	4 .	7.

28
12
56
28
Hauptnenner: 336

2) $27^{5}/_{8} - {}^{19}/_{20} = ?$ 3) $125^{5}/_{9} - 84^{41}/_{45} = ?$

Ausrechnung.

	40	40
$27^{5}/_{8}$	5	25
		65
$-{}^{19}/_{20}$	2	38
$26^{27}/_{40}$		27

	45	45
$125.^{5}/_{9}$	5	25
		70
$84^{41}/_{45}$	1	41
$40^{29}/_{45}$		29

Aufg. z. Zifferr., 60. und 61. Uebung.

Multipliciren.

Vorbemerkung. Wie schon früher bemerkt wurde, so ist das Multipliciren nicht immer ein Vervielfachen. Dieser Fall tritt hier ein. Denn bei dem Multipliciren mit Brüchen ist der Multiplikator nicht allemal eine ganze Zahl, sondern häufig ein Bruch oder eine gemischte Zahl. Und das ändert die Sache.

Steht als Multiplikator eine ganze Zahl, so ist das Produkt ein reines Vielfaches von dem Multiplikanden, auch wenn dieser ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist. $3 \times {}^2/_7 = {}^6/_7$, und $3 \times 2^2/_7 = 6^6/_7$. Sowie 6 das reine 3fache von 2 ist, so ist ${}^6/_7$ das reine 3fache von ${}^2/_7$ und $6^6/_7$ von $2^2/_7$. In diesem Falle ist also auch hier das Multipliciren ein Vervielfachen.

Anders gestaltet sich's, wenn der Multiplikator eine Bruchzahl ist. ${}^1/_3 \times 6$ = einmal der dritte Theil von $6 = 2$; ${}^1/_3 \times {}^6/_7$ = einmal der 3. Theil von ${}^6/_7 = {}^2/_7$; ${}^1/_3 \times 6^6/_7$ = einmal der 3. Th. von $6^6/_7 = 2^2/_7$. Ist daher der Multiplikator ein Bruch mit dem Zähler 1, so ist das Multipliciren der Sache nach ein Theilen. Das Produkt ist ein einfacher Theil von dem Multiplikanden.

${}^2/_3 \times 6$ = 2mal der dritte Theil von 6 oder einmal der 3te Theil von $2 \times 6 = 4$; ${}^2/_3 \times {}^6/_7$ = 2mal der 3te Theil von ${}^6/_7$ oder einmal der dritte Theil von $2 \times {}^6/_7 = {}^4/_7$ u. s. w. Ist daher der Multiplikator ein Bruch, dessen Zähler größer ist als 1, so ist das Multipliciren ein Theilen und Vervielfachen zugleich, und das Produkt ist ein mehrfacher Theil von dem Multiplikanden.

Ein Theilen und Vervielfachen zugleich ist das Multipliciren auch dann, wenn der Multiplikator eine gemischte Zahl ist. Das Produkt ist in diesem Fall ein gemischtes Vielfaches von dem Multiplikanden.

Beim Bruchrechnen thut man daher gut, zu sagen: „Multipliciren heißt: eine Zahl so oft nehmen, als eine andere anzeigt."

Uebersicht der verschiedenen Fälle.

$12 \times {}^7/_8$	${}^3/_4 \times 5$	${}^3/_4 \times {}^2/_3$	${}^3/_4 \times 5^1/_2$
$4 \times 9^5/_6$	$6^4/_5 \times 8$	$4^4/_5 \times {}^3/_8$	$5^2/_3 \times 3^3/_5$

A. Mündlich.

1) Der Multiplikator eine ganze Zahl.

Beispiel 1. 12mal ${}^7/_8 = ?$

a. $12 \times {}^7/_8 = {}^{84}/_8$; ${}^{84}/_8 = 10^4/_8 = 10^1/_2$.

b. $12 \times {}^1/_8 = {}^{12}/_8 = 1^1/_2$; $12 \times {}^7/_8 = 7 \times 1^1/_2 = 7 + 3^1/_2 = 10^1/_2$.

c. $12 \times {}^7/_8 = 12 \times 1 - 12 \times {}^1/_8 = 12 - 1^1/_2 = 10^1/_2$.

d. ${}^7/_8 = {}^4/_8 + {}^2/_8 + {}^1/_8 = {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8$; $12 \times {}^7/_8 = 12 \times {}^1/_2 + 12 \times {}^1/_4 + 12 \times {}^1/_8 = 6 + 3 + 1^1/_2 = 10^1/_2$.

Aus der Berechnung mehrerer derartiger Aufgaben wird sich ergeben, daß die Weise a am besten angewendet wird, wenn der Multi-

plikator eine kleinere Zahl ist, die Weise b, wenn der Multiplikator eine größere Zahl ist, die Weise c, wenn der Bruch der Einheit 1 sehr nahe steht, und die Weise d, wenn der Nenner des Bruchs eine Produktzahl ist.

Beispiel 2. 4mal $9^5/_6 = ?$

a. $4 \times 9^5/_6 = 4 \times 9 + 4 \times {}^5/_6 = 36 + 3^1/_3 = 39^1/_3$.
b. $4 \times 9^5/_6 = 4 \times 10 - 4 \times {}^1/_6 = 40 - {}^2/_3 = 39^1/_3$.

$11 \times {}^2/_3$	$4 \times {}^5/_9$	$8 \times 4^2/_3$	$12 \times 7^5/_6$
$96 \times {}^2/_3$	$64 \times {}^5/_9$	$5 \times 7^1/_2$	$18 \times 4^5/_{12}$
$36 \times {}^{11}/_{12}$	$64 \times {}^8/_9$ ꝛc.	$9 \times 8^6/_7$	$24 \times 3^{15}/_{16}$ ꝛc.

2) Der Multiplikand eine ganze Zahl.

Beispiel 1. ${}^1/_4$mal $11 = ?$

${}^1/_4 \times 1$ ist so viel als der 4. Theil von 1; also ist ${}^1/_4 \times 1 = {}^1/_4$, ${}^1/_4 \times 2 = {}^2/_4$, ${}^1/_4 \times 3 = {}^3/_4$, und ${}^1/_4 \times 11 = {}^{11}/_4$ oder $2^3/_4$.

Beispiel 2. ${}^3/_4$mal $11 = ?$

Um ${}^3/_4$ zu erhalten, so nehme ich entweder $3 \times {}^1/_4$ von 1, oder ich nehme ${}^1/_4$ von 3×1; und um ${}^3/_4 \times 11$ zu erhalten, so nehme ich entweder $3 \times {}^1/_4$ von 11, oder ich nehme ${}^1/_4$ von 3×11.

a. ${}^1/_4 \times 11 = {}^{11}/_4$; ${}^3/_4 \times 11 = 3 \times {}^{11}/_4 = {}^{33}/_4$ oder $8^1/_4$.
b. $3 \times 11 = 33$; ${}^3/_4 \times 11 = {}^1/_4 \times 33 = {}^{33}/_4$ oder $8^1/_4$.

Anm. Von ${}^3/_4$ wird bei Aufl. a der Zähler, bei Aufl. b der Nenner betont. Man halte darauf. Die richtige Betonung fördert das Verständniß auch beim Rechnen.

Beispiel 3. $5^1/_2 \times 7 = ?$

$5^1/_2 \times 7 = 5 \times 7 + {}^1/_2 \times 7$; $5 \times 7 = 35$, ${}^1/_2 \times 7 = 3^1/_2$; $35 + 3^1/_2 = 38^1/_2$; also ist $5^1/_2 \times 7 = 38^1/_2$.

${}^1/_3 \times 17 = ?$	${}^2/_3 \times 8 = ?$	$6^4/_5 \times 8 = ?$
${}^1/_7 \times 25 = ?$	${}^7/_8 \times 5 = ?$	$4^3/_8 \times 12 = ?$
${}^1/_5 \times 32 = ?$	${}^4/_5 \times 12 = ?$	$8^2/_3 \times 6 = ?$
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

3) Multiplikator und Multiplikand sind oder haben Brüche.

Beispiel 1. ${}^3/_4 \times {}^2/_3 = ?$



Ausr. ${}^1/_4 \times {}^1/_3$ oder ${}^1/_4$ von ${}^1/_3 = {}^1/_{12}$;
${}^3/_4 \times {}^1/_3$ oder ${}^3/_4$ von ${}^1/_3 = {}^3/_{12}$;
${}^3/_4 \times {}^2/_3$ oder ${}^3/_4$ von ${}^2/_3 = 2 \times {}^3/_{12}$ oder ${}^6/_{12} = {}^1/_2$.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{8}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$	$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{7} \times \frac{1}{9}$	$\frac{1}{5} \times \frac{7}{8}$	$\frac{7}{8} \times \frac{1}{4}$	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{12}$	$\frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$	$\frac{5}{12} \times \frac{1}{6}$	$\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}$
rc.	rc.	rc.	rc.	rc.	rc.

Beispiel 2. $2\frac{2}{5} \times 3\frac{3}{4} = ?$

(Mündlich und schriftlich.)

Aufl. a. $2\frac{2}{5} \times 3\frac{3}{4} = 2 \times 3\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times 3\frac{3}{4}$.
$2 \times 3\frac{3}{4} = 2 \times 3 + 2 \times \frac{3}{4}$; $\frac{2}{5} \times 3\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times 3 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$.

Ausr. $2 \times 3 = 6$
$2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$; $6 + 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.
$\frac{2}{5} \times 3 = 1\frac{1}{5}$; $7\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} = 8\frac{7}{10}$.
$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$; $8\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 9$.
$2\frac{2}{5} \times 3\frac{3}{4} = 9$.

Aufl. b. $2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$, und $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$; also ist $2\frac{2}{5} \times 3\frac{3}{4} = \frac{12}{5} \times \frac{15}{4}$.

Ausr. $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$;
$\frac{1}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$;
$\frac{12}{5} \times \frac{15}{4} = 12 \times \frac{3}{4} = 9$.

Diese Beispiele genügen. Aus ihnen ist deutlich genug zu ersehen, wie auch die beiden übrigen Fälle zu behandeln sind.

$3\frac{1}{2}$ mal $\frac{2}{3}$;	$\frac{2}{3}$ mal $1\frac{1}{2}$;	$1\frac{1}{2}$ mal $1\frac{1}{2}$;
$8\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$;	$\frac{5}{6} \times 10\frac{2}{3}$;	$2\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$;
$15\frac{4}{5} \times \frac{3}{10}$;	$\frac{3}{7} \times 25\frac{3}{4}$;	$3\frac{3}{4} \times 4\frac{4}{5}$;
$20\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$;	$\frac{7}{10} \times 18\frac{4}{5}$;	$5\frac{5}{6} \times 6\frac{7}{9}$.
rc.	rc.	rc.

(Vermischte Aufgaben.)

1) Suche die Zahl, welche 15mal so groß ist als $\frac{3}{4}$! — 2) Wie heißt das 24fache von $\frac{11}{12}$? von $\frac{17}{18}$? 3) Wie viel ist $\frac{1}{2}$ mal $\frac{2}{3}$ mal $\frac{3}{4}$? 4) Wie groß ist das $4\frac{3}{4}$ fache von 16? 5) Ich habe $\frac{1}{4}$ von einer Zahl gesucht und $9\frac{7}{8}$ erhalten; wie heißt die getheilte Zahl? (4mal $9\frac{7}{8}$.) 6) Welche Zahl ist $\frac{3}{8}$ mal so groß als $20\frac{1}{2}$? 7) Die Zahl $6\frac{2}{5}$ ist 12mal in welcher Zahl enthalten? 8) Was ist mehr: 1 mal 36, oder $\frac{8}{9}$ mal 36? (Warum?) 9) Was ist mehr: 1mal 1, oder $\frac{3}{4}$ mal $\frac{3}{4}$? (Warum?) 10) $25\frac{3}{7}$ ist der 5te Theil von welcher Zahl? 11) Wie viel ist $(\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}) + (\frac{5}{6} \times \frac{5}{6})$? 12) Wie heißt der Unterschied zwischen $6 \times \frac{7}{8}$ und $\frac{3}{4} \times 16$?

Aufgaben mit der angewandten Zahl siehe „Kopf- oder Denkrechnen" des Verf. S. 12—14. In einigen besondern Stunden, also neben dem Zifferrechnen.

B. Schriftlich.

1) Brüche und gemischte Zahlen durch ganze Zahlen.

Beispiel 1. 9mal $\frac{15}{16} = ?$

$9 \times {}^{15}/_{16} = \frac{135}{16} = 8^{7}/_{16}$.

$$\begin{array}{r|r|l} & 15 & \\ & 9 & \\ \hline 16 & 135 & 8 \\ & 128 & \\ \hline & 7 & \end{array}$$

Beispiel 2. 18mal $25^{12}/_{13} = ?$

a. $18 \times 25^{12}/_{13} = 18 \times 25 + 18 \times {}^{12}/_{13}$.

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 18 \\ \hline 200 \\ 25 \\ \hline 450 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} & 12 & \\ & 18 & \\ \hline & 96 & \\ & 12 & \\ \hline 13 & 216 & 16^{8}/_{13}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 450 \\ + 16^{8}/_{13} \\ \hline 466^{8}/_{13} \end{array}$$

b. Ich verwandle die gemischte Zahl in einen unächten Bruch.

$$\begin{array}{r} 25^{12}/_{13} \\ 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ + 12 \\ \hline 337 \text{ (13tel)} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|l} & 337 \text{ (13tel)} & \\ & 18 \times & \\ \hline & 2696 & \\ & 337 & \\ \hline 13 & 6066 & 466^{8}/_{13}. \end{array}$$

Aufg. z. Ifferr., 62. Uebung.

2) Ganze und gemischte Zahlen durch Brüche.

Beispiel 1. ${}^{17}/_{18}$ mal $75 = ?$

Aufl. Um ${}^{17}/_{18} \times 75$ zu erhalten, so nehme ich den 18. Theil von 17×75.

Ausr. ${}^{17}/_{18} \times 75 = \frac{1275}{18} = 70^{5}/_{6}$.

Beispiel 2. $15^{9}/_{14}$ mal $64 = ?$

a. Ich rechne $15 \times 64 + {}^{9}/_{14} \times 64$. $(= 960 + 41^{1}/_{7} = 1001^{1}/_{7}.)$

b. Ich richte die gemischte Zahl ein. $(= {}^{219}/_{14} \times 64.)$

Aufg. z. Ifferr., 63. Uebung.

3) Brüche und gemischte Zahlen durch Brüche und gemischte Zahlen.

Beispiel 1. ${}^{6}/_{7} \times {}^{4}/_{5} = ?$

Ausr. ${}^{1}/_{7} \times {}^{1}/_{5} = \frac{1}{7 \times 5} = \frac{1}{35}$.

Ausr. ${}^{6}/_{7} \times {}^{4}/_{5} = \frac{6 \times 4}{7 \times 5} = \frac{24}{35}$.

Denk- oder Sprechweise: $^1/_7 \times {}^1/_5$ ist der 7. Theil von $^1/_5$. Theile ich $^1/_5$ in 7 gleiche Theile, so entstehen aus dem Ganzen 7×5 oder 35 Theile, also 35stel; $^1/_7 \times {}^1/_5$ ist daher $^1/_{35}$. Ist $^1/_7 \times {}^1/_5 = {}^1/_{35}$, so sind $^6/_7 \times {}^4/_5 = 6 \times 4$ oder $^{24}/_{35}$.

Anm. Man halte darauf, daß der Schüler, diesem Gedankengange entsprechend, eine Zeitlang die Nenner vor den Zählern miteinander multiplicire. Es geht ihm so leichter, mit der Operation die richtige Vorstellung zu verbinden.

Beispiel 2. $^{25}/_{28}$ mal $^{21}/_{40} = ?$

$$\frac{25}{28} \times \frac{21}{40} = \frac{525}{1120} \overset{5}{\Big|} \frac{105}{224} \overset{7}{\Big|} \frac{15}{32}.$$

Begreiflich ist es gleichviel, ob man zuerst die gegebenen Brüche miteinander multiplicirt und nachher das Ergebniß kürzt, oder ob man zuerst die Faktoren des Zählers gegen die Faktoren des Nenners hebt und hernach die Multiplikation vollzieht. Für die Berechnung aber ist Letzteres von großem Vortheil: die Hebezahl wird leichter erkannt, das Heben selbst bequemer ausgeführt und die Multiplikation, wenn sie noch nöthig ist, vereinfacht. Wir heben daher zuerst 25 und 40 durch 5, und 28 und 21 durch 7 gegen einander auf; dann vollziehen wir die Multiplikation.

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}} \times \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{28}} \times \underset{8}{\cancel{40}}} = \frac{15}{32}$$

Beispiel 3. $31\,^1/_9 \times {}^{15}/_{16}$, wie viel?

Ansatz und Berechnung.

$$\frac{31\,^1/_9}{\frac{280}{9}} \times \frac{15}{16} = \frac{\overset{35}{\cancel{280}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times \underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{175}{6} = 29\,^1/_6.$$

Beispiel 4. $^3/_4 \times {}^4/_5 \times {}^5/_6 = ?$

Ausrechnung.

a. $^3/_4 \times {}^4/_5 \times {}^5/_6 = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$ b. $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = {}^1/_2.$

Die Ausrechnung a bedarf keiner Erklärung. Bei b wurde 4 gegen 4, sowie 5 gegen 5 vollständig, und 3 gegen 6 durch 3 gehoben.

Aufg. z. Zifferr., 64. und 65. Uebung.

Neben der bisherigen, allgemein üblichen Weise, Brüche zu multipliciren, gibt es noch eine zweite, deren Eigenthümlichkeit, um sie kurz zu bezeichnen, darin besteht, daß man die Faktoren nicht neben, sondern unter einander setzt und jeden Bruch als eine Division betrachtet. Das Nähere wird sich aus folgenden Beispielen ergeben.

Beispiel 1. $9 \times {}^{15}/_{16} = ?$

	15
16	~~16~~
	9
16	135 | $8\,{}^{7}/_{16}$
	128
	7

Ich betrachte ${}^{15}/_{16}$ als den 16. Theil von 15 oder als 15, getheilt durch 16 (und indem ich dieß sage, streiche ich den Nenner 16 aus und setze ihn als Theiler auf die andere Seite); also ist $9 \times {}^{15}/_{16} = 9 \times 15$, getheilt durch 16.

Beispiel 2. ${}^{4}/_{5} \times {}^{6}/_{7} = ?$

	6
7	~~7~~
	4
5	~~5~~
35	$24 = {}^{24}/_{35}$.

${}^{6}/_{7} = 6$, getheilt durch 7, und ${}^{4}/_{5} = 4$, getheilt durch 5; also ist ${}^{4}/_{5} \times {}^{6}/_{7} = 4 \times 6$, getheilt durch $5 \times 7 = 24$, getheilt durch $35 = {}^{24}/_{35}$. Auf der rechten Seite stehen die Zähler, auf der linken die Nenner; gestatten es daher die Zahlen, so können die auf der linken Seite gegen die auf rechten Seite gehoben werden.

Beispiel 3. ${}^{15}/_{16} \times 31\,{}^{1}/_{9} = ?$

	$31\,{}^{1}/_{9}$
	15
	16
~~9~~	~~280~~
~~16~~	~~15~~
2	35
3	5
6	$175 = 29\,{}^{1}/_{6}$.

$31\,{}^{1}/_{9} = 280$ 9tel oder 280, getheilt durch 9, und ${}^{15}/_{16} = 15$, getheilt durch 16; also ist ${}^{15}/_{16} \times {}^{280}/_{9} = 15 \times 280$, getheilt durch 16×9. Wird 16 gegen 280 durch 8, und 9 gegen 15 durch 3 gehoben, so ist dann noch mit 3×2 oder 6 in 5×35 oder 175 zu dividiren. Das Ergebniß ist $29\,{}^{1}/_{6}$.

Mit der angewandten Zahl.

Beisp. 1. ${}^{1}/_{8}$ Ctr. zu $12\,{}^{7}/_{10}$ fl.; wie hoch kommen ${}^{7}/_{8}$ Ctr.?

Aufl. ${}^{7}/_{8}$ Ctr. sind $7 \times {}^{1}/_{8}$ Ctr., also 7mal so viel als ${}^{1}/_{8}$ Ctr.; wenn daher ${}^{1}/_{8}$ Ctr. $12\,{}^{7}/_{10}$ fl. kostet, so kosten ${}^{7}/_{8}$ Ctr. $7 \times 12\,{}^{7}/_{10}$ fl.

Ausr. $7 \times 12\,{}^{7}/_{10}$ fl. $= 84$ fl. $+ 4\,{}^{9}/_{10}$ fl. $= 88\,{}^{9}/_{10}$ fl.

Beisp. 2. 1 Ctr. zu $12\,{}^{7}/_{10}$ fl.; wie hoch kommen ${}^{7}/_{8}$ Ctr.?

Aufl. Da hier 1 ganzer Ctr. $12\,{}^{7}/_{10}$ fl. kostet, so kosten ${}^{7}/_{8}$ Ctr. nicht einmal so viel, noch weniger 7mal so viel. 7 ganze Ctr. kosten 7mal das, was 1 Ctr. kostet; ${}^{7}/_{8}$ Ctr. aber kosten nur ${}^{7}/_{8}$mal so viel, also nur ${}^{7}/_{8} \times 12\,{}^{7}/_{10}$ fl.

Ausr. $\frac{7}{8} \times 12\frac{7}{10}$ fl.

$\frac{7}{8} \times \frac{127}{10} = \frac{889}{80}$ fl.

80 | 889 fl. | 11 fl.
80
89
80
9
60
80 | 540 kr. | 6 kr.
480
60
4
80 | 240 pf. | 3 pf.
240

$\frac{889}{80}$ fl. sind der 80. Theil von 889 fl. = 11 fl. 6 kr. 3 pf.

Beisp. 3. $\frac{1}{4}$ Eim. Wein zu $5\frac{5}{6}$ fl.; wie hoch kommen $3\frac{3}{4}$ Eimer?

Aufl. $\frac{1}{4}$ Eim. kostet $5\frac{5}{6}$ fl.; $\frac{2}{4}$ Eim. kosten 2mal so viel, $\frac{3}{4}$ Eim. kosten 3mal so viel u. s. f.; $3\frac{3}{4}$ oder $\frac{15}{4}$ Eim. kosten 15mal so viel, nämlich $15 \times 5\frac{5}{6}$ fl. = 75 fl. + $12\frac{1}{2}$ fl. = $87\frac{1}{2}$ fl.

Beisp. 4. 1 Eim. Wein zu $5\frac{5}{6}$ fl.; wie hoch kommen $3\frac{3}{4}$ Eimer?

Aufl. Wenn 1 Eim. $5\frac{5}{6}$ fl. kostet, so kosten 3 Eim. 3mal so viel, $\frac{3}{4}$ Eim. $\frac{3}{4}$mal so viel, $3\frac{3}{4}$ Eim. also $3\frac{3}{4}$mal so viel, nämlich $3\frac{3}{4} \times 5\frac{5}{6}$ fl. = 21 fl. 52 kr. 2 pf.

Dergleichen Aufgabenpaare, wo im ersten Gliede der Theil mit dem Ganzen abwechselt, gebe der Lehrer selbst so lange, bis sie von den Schülern klar und sicher aufgefaßt werden. Jeder Schulmann weiß, wie leicht hier geirrt wird.

Aufg. z. Zifferr., 66. Uebung.

Dividiren.

Was dividiren heißt, was es ist, und wodurch sich die bekannten zwei Divisionsformen von einander unterscheiden, ist im dritten Cursus (S. 112 ff.) gesagt. Hier sei nur noch davon die Rede, wo der gegebenen Zahl gemäß die Division im Sinne des Enthaltenseins und wo sie im Sinne des Theilens ausgeführt werden könne. Die Aufgaben mit der benannten und angewandten Zahl bringen dieß zwar schon mit sich, und gut geleitete Schüler werden schwerlich den $\frac{2}{3}$ten Theil von einer Zahl suchen wollen. Der Gegenstand kann aber doch zur Sprache kommen; ja, der Lehrer thut wohl, wenn er selbst Veranlassung dazu gibt. Darum muß er wissen, wie es sich damit verhält. Also zur Sache!

Von zwei gegebenen gleichartigen Größen kann jede durch die andere gemessen werden. Da nun das Dividiren im Sinne des Enthaltenseins nichts Anderes ist, als ein Messen; so muß auch

jede reine Zahl durch jede reine Zahl und jede benannte Zahl durch jede gleich oder gleichartig benannte Zahl in diesem Sinne dividirt werden können. Ob die gegebenen Zahlen ganze, oder gebrochene, oder gemischte sind, hat zwar Einfluß auf die Art und Weise der Ausführung; die Operation selbst aber wird dadurch nicht im mindesten beschränkt. Dieß läßt sich ohne Weiteres begreifen. Die nachfolgende unterrichtliche Behandlung wird es übrigens auch beweisen.

Theilen heißt, eine gegebene Größe in eine Anzahl gleicher Theile zerlegen. Beim Dividiren im Sinne des Theilens wird die Anzahl der Theile, in welche der Dividend zu theilen ist, durch den Divisor bestimmt. Nun läßt sich eine gegebene Größe in 2, in 3, in 4 ꝛc, gleiche Theile zerlegen, und demgemäß kann man auch jede Zahl durch 2, durch 3, durch 4 ꝛc. im S. des Theilens dividiren. Theile ich so eine Zahl durch 2, so ist der Quotient einer von ihren 2 gleichen Theilen; theile ich sie durch 3, so ist der Quotient einer von ihren 3 gleichen Theilen u. s. f. Hieraus folgt zunächst, daß sich jede Zahl, also auch der Bruch und die gemischte Zahl, durch jede ganze Zahl im S. des Theilens dividiren läßt. Zugleich geht auch hervor, daß in diesem Sinne durch eine Bruchzahl nicht dividirt werden kann. Eine Größe z. B. in $^2/_3$ gleiche Theile d. i. so zu theilen, daß ein Theil der $^2/_3$te Theil von ihr sei, ist in der That gar nicht denkbar. Ich kann Etwas in 2 und in 3, aber nicht in $^2/_3$ gleiche Theile zerlegen. Zuweilen wird dieß so aufgefaßt, als seien von dem in 3 gleiche Theile getheilten Ganzen 2 Theile zu nehmen. Das ist nichts als eine Verwechslung. Denn dadurch würde die Zahl nicht mit $^2/_3$ dividirt, sondern multiplicirt.

Bestimmt entschieden ist also, daß durch die ganze Zahl in allen Fällen, durch die Bruchzahl aber in keinem Falle im S. des Theilens dividirt werden kann. Nicht so steht es in Betreff der gemischten Zahl. Die Frage: kann man eine Zahl durch $6^2/_3$ theilen? läßt sich bejahen und verneinen, je nachdem man die Sache ansieht. Aus einem Ganzen $6^2/_3$ gleiche Theile zu bilden, ist denkbar und möglich. Es geschieht, indem man dasselbe in $6 \times 3 + 2$ oder 20 gleiche Theile zerlegt und dann 6mal je 3 davon in 1 Theil vereinigt. Mithin ist, um einen vollen Theil zu erhalten, durch 20 zu theilen und das Ergebniß 3mal zu nehmen. Aber eben darum kann man auch sagen, daß nicht eigentlich durch $6^2/_3$, sondern durch 20 getheilt werde, und daß die Operation nicht ein Theilen allein, sondern ein Theilen und Vervielfachen zugleich sei. Der Fall kommt übrigens selten vor. Sollte es geschehen, so geht aus dem Bisherigen hervor, wie zu verfahren ist, um den verlangten Theil zu erhalten.

A. Enthaltensein.

Mündlich.

Vorbereitendes. Wie oft liegt 12 in 36? die Hälfte von 12 in der Hälfte von 36? $^1/_3$ von 12 in $^1/_3$ von 36? $^1/_4$ von 12 in $^1/_4$ von 36? ꝛc. (12 liegt in 36 dreimal; die Hälfte von 12 oder

6 ist in der Hälfte von 36 oder 18 auch 3mal ꝛc.) Andere Beispiele! So oft also eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft liegt auch irgend ein Theil der ersteren Zahl in dem gleichnamigen Theile der letzteren.

Wie oft liegt 2 in 12? wie oft 2×2 in 2×12? 3×2 in 3×12? 4×2 in 4×12? (2 in 12 ist 6mal; 2×2 oder **4** ist in 2×12 oder **24** wieder 6mal ꝛc.) Andere Beispiele! So oft also eine Zahl in einer andern enthalten ist, so oft liegt auch irgend ein Vielfaches der ersteren Zahl in dem gleichen Vielfachen der anderen.

1) Wie oft ist enthalten

a.	$^2/_9$ in $^4/_9$?	$^3/_{10}$ in $^9/_{10}$?	$^4/_{19}$ in $^{16}/_{19}$?	$^5/_{27}$ in $^{25}/_{27}$?
	$^2/_9$ in $^1/_9$?	$^3/_{10}$ in $^2/_{10}$?	$^4/_{19}$ in $^3/_{19}$?	$^5/_{27}$ in $^4/_{27}$?
	$^2/_9$ in $^7/_9$?	$^3/_{10}$ in $^8/_{10}$?	$^4/_{19}$ in $^{15}/_{19}$?	$^5/_{27}$ in $^{23}/_{27}$?
b.	$^{45}/_{76}$ in $^{75}/_{76}$?	$^3/_4$ in $3^3/_4$?	$1^1/_4$ in $^3/_4$?	$4^2/_5$ in $11^1/_5$?
	$^{32}/_{83}$ in $^{72}/_{83}$?	$^4/_{11}$ in $2^3/_{11}$?	$1^5/_{12}$ in $^{11}/_{12}$?	$1^7/_8$ in $5^5/_8$?
	$^{48}/_{91}$ in $^{84}/_{91}$?	$^{15}/_{16}$ in $3^7/_{16}$?	$2^1/_3$ in $^2/_3$?	$2^1/_{12}$ in $4^7/_{12}$?

a. $^2/_9$ sind in $^4/_9$, wie 2 Ganze in 4 Ganzen, 2mal enthalten; $^2/_9$ sind in $^1/_{19}$, wie 2 in 1, $^1/_2$mal enthalten; $^2/_9$ sind in $^7/_9$, wie 2 in 7, $3^1/_2$mal enthalten.

b. $^{45}/_{76}$ sind in $^{75}/_{76}$, wie 45 in 75, $1^{30}/_{45}$ oder $1^2/_3$mal enthalten. Oder: $^{45}/_{76}$ sind in $^{75}/_{76}$ so oft enthalten, als der 15. Theil von $^{45}/_{76}$ in dem 15. Theil von $^{75}/_{76}$, d. i. so oft als $^3/_{76}$ in $^5/_{76}$ = 3 in 5 = $1^2/_3$ mal. Der Bruch $^{75}/_{76}$ ist also $1^2/_3$mal so groß, als $^{45}/_{76}$. — $^3/_4$ in $3^3/_4 = {}^3/_4 : {}^{15}/_4 = 5$mal; $3^3/_4$ ist daher das 5fache von $^3/_4$, und $^3/_4$ ist genau der 5. Theil von $3^3/_4$.

2) Wie oft ist enthalten

$^5/_6$ in 2?	$1^3/_4$ in 9?	2 in $^4/_5$?	4 in $8^4/_5$?
$^{12}/_{13}$ in 3?	$2^2/_3$ in 12?	3 in $^9/_{10}$?	8 in $5^3/_4$?
$^{15}/_{16}$ in 6?	$3^3/_5$ in 15?	5 in $^7/_8$?	12 in $25^1/_2$?

Jede Aufgabe dieser Art läßt sich auf dreierlei Weise rechnen.

a. Man verwandelt die ganze Zahl in einen unächten Bruch. Um hiernach zu finden, wie oft $^5/_6$ in 2 enthalten sind, so verwandle ich die 2 G. in $^{12}/_6$ und suche dann, wie oft $^5/_6$ in $^{12}/_6$ liegen.

b. Man vervielfacht beide Zahlen in der Weise, so daß auch aus dem Bruche eine ganze Zahl entsteht. Hiernach dividire ich mit $^5/_6$ in 2 so: $6 \times {}^1/_6 = 1$, also $6 \times {}^5/_6 = 5$; und $6 \times 2 = 12$. Anstatt mit $^5/_6$ in 2 dividire ich jetzt mit dem 6fachen von $^5/_6$ in das 6fache von 2, nämlich mit 5 in 12.

c. Man sieht zuerst von dem Nenner des Bruches ab. 5 liegt in 2 $^2/_5$mal; $^5/_6$ ist in 2 6mal so oft, also $6 \times {}^2/_5$ oder $2^2/_5$mal enthalten.

3) Wie oft ist enthalten

$^3/_5$ in $^7/_8$?	$^3/_8$ in $2^1/_3$?	$1^1/_3$ in $12^1/_2$?
$^4/_9$ in $^2/_3$?	$^5/_7$ in $3^1/_5$?	$2^3/_4$ in $6^2/_3$?
$^7/_8$ in $^{11}/_{12}$?	$^3/_4$ in $5^1/_6$?	$3^4/_5$ in $8^7/_{15}$?

Verfahren. $^3/_5$ in $^7/_8$ = ?

a. Ich mache beide Brüche gleichnamig. 5tel und 8tel geben 40tel. $^3/_5 = {^{24}/_{40}}$, und $^7/_8 = {^{35}/_{40}}$; $^{24}/_{40}$ in $^{35}/_{40}$ oder 24 in 35 = $1^{11}/_{24}$mal.

b. $^3/_5$ sind in $^7/_8$ so oft enthalten, als das 5fache von $^3/_5$ in dem 5fachen von $^7/_8$. Das 5fache von $^3/_5$ = 3, und das 5fache von $^7/_8$ = $^{35}/_8$. Nun habe ich zu suchen, wie oft 3 in $^{35}/_8$ liegt. 3 ist in 35 $^{35}/_3$ mal, in $^{35}/_8$ also $^1/_8 \times {^{35}/_3} = {^{35}/_{24}}$ oder $1^{11}/_{24}$mal.

c. $^3/_5$ sind in $^7/_8$ so oft enthalten, als das 8fache von $^3/_5$ in dem 8fachen von $^7/_8$. Das 8fache von $^3/_5$ = $^{24}/_5$, und das 8fache von $^7/_8$ = 7. Nun suche ich, wie oft $^{24}/_5$ in 7 enthalten ist. 24 ist in 7 $^7/_{24}$mal; $^{24}/_5$ ist in 7 5mal so oft, also $5 \times {^7/_{24}} = {^{35}/_{24}}$ oder $1^{11}/_{24}$.

Das Verfahren unter a ist mehr das elementare; das unter b und c dagegen nimmt die Denkkraft mehr in Anspruch und wirkt daher mehr bildend auf den Schüler.

B. Schriftlich.

Beispiel 1. Wie oft ist $^{55}/_{91}$ in $^{75}/_{91}$ enthalten?

$\frac{55}{91}$	$\frac{75}{91}$
55	75
11	15

Der Ansatz ist wie bei der Division mit ganzen Zahlen. Da die Brüche gleichnamig sind, so hat man blos zu suchen, wie oft der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividenden enthalten ist. So oft aber 55 in 75 liegt, so oft liegt auch $^1/_5$ von 55 in $^1/_5$ von 75. Ich hebe daher 55 gegen 75 durch 5 und dividire dann mit 11 in 15.

Beispiel 2. Wie oft ist $12^1/_2$ in $94^1/_2$ enthalten?

Ansatz und Berechnung.

$12^1/_2$	$94^1/_2$	
25	189	$7^{14}/_{25}$.
	175	
	14	

Man richtet die zwei gemischten Zahlen ein. Dadurch werden sie in zwei gleichnamige unächte Brüche verwandelt. Hierauf dividirt man mit einem Zähler in den andern.

Beispiel 3. Wie viel ist 84, dividirt durch $^{27}/_{29}$?

Ansatz und Berechnung:

$^{27}/_{29}$	84	
	29	
	756	
	168	
27	2436	$90^2/_9$.
	243	
	6	
	$\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$	

a) Die 84 G. werden auch in 29stel verwandelt. Dieß geschieht, indem wir sie durch den Nenner 29 multipliciren. Dann heißt's: wie oft sind $^{27}/_{29}$ in $^{2436}/_{29}$ enthalten? Antwort: So oft, als 27 in 2436.

b) Ich multiplicire, um den Bruch $^{27}/_{29}$ wegzuschaffen, den Divisor und den Dividenden durch dessen Nenner. 29mal $^{27}/_{29}$ =

27, und 29mal 84 = 2436. $^{27}/_{29}$ ist in 84 gerade so oft enthalten, als das 29fache von $^{27}/_{29}$ in dem 29fachen von 84 d. i. so oft als 27 in 2436.

Aufg. z. Zifferr., 67. u. 68. Uebung.

Beispiel 4. Wie oft ist $^5/_8$ in $^7/_9$ enthalten?

Ansatz und Berechnung:

5	7	
8	9	
9	8	
45	56	$1^{11}/_{45}$mal.

a. Ich mache beide Brüche gleichnamig, d. h. ich verwandle die 8tel und 9tel in gleiche Theile, und das geschieht, indem ich jedes 8tel wieder in 9 und jedes 9tel wieder in 8 gleiche Theile theile. Hierdurch entstehen aus den 5 Achteln 5 × 9 oder 45 und aus den 7 Neunteln 7 × 8 oder 56 Theile von gleicher Größe (72stel). Und nun suche ich, wie oft jene in diesen enthalten sind; ich dividire also mit 45 in 56.

b. Ich erhebe Divisor und Dividend auf das Sovielfache, daß aus den Brüchen ganze Zahlen entstehen, und das geschieht, indem ich zuerst beide durch 8, dann wieder beide durch 9 multiplicire. 8 × $^5/_8$ = 5. Der Divisor wird also 8mal so groß, indem ich den Nenner 8 durchstreiche. Der Dividend aber wird 8mal so groß, indem ich ihm den Nenner 8 als Faktor gebe. 9 × $^7/_9$ = 7. Der Dividend (8 × $^7/_9$) wird daher wieder 9mal so groß, indem ich von $^7/_9$ den Nenner 9 ausstreiche; und der Divisor 5 wird wieder 9mal so groß, indem ich ihm den Nenner 9 als Faktor gebe. Gehoben kann nichts werden. Also dividire ich jetzt mit dem 9 × 8 oder 72fachen von $^5/_8$ in das 9 × 8 oder 72fache von $^7/_9$, nämlich mit 9 × 5 oder **45** in 8 × 7 oder **56**.

Beispiel 5. Wie oft liegt $^{18}/_{19}$ in $27^3/_4$.

$^{18}/_{19}$	$27^3/_4$	
18	111	
4	19	
	999	
	111	
72	2109	$29^7/_{24}$.

$27^3/_4 = {}^{111}/_4$.

a. Ich theile von den 18 19teln jedes wieder in 4 und von den 111 Vierteln jedes wieder in 19 gleiche Theile.

b. Ich mache, indem ich die $^{18}/_{19}$ als 18 Ganze betrachte und den Nenner 19 als Faktor auf die andere Seite setzte, Divisor und Dividend zugleich 19mal so groß, und dann, indem ich die $^{111}/_4$ als 111 G. betrachte und den Nenner 4 als Faktor auf die entgegengesetzte Seite führe, Divisor und Dividend zugleich wieder 4mal so groß.

Mit einer und derselben Form, Brüche schriftlich zu dividiren, läßt sich, wie gezeigt ist, eine doppelte Denk- oder Vorstellungsweise (a u. b) verbinden. Der Lehrer entscheide sich für die eine oder für die andere; er lasse also nicht in der einen und zugleich in der andern Weise divi-

diren. Wenn man will, daß sich bei dem Schüler die äußere Form mit einer sie begründenden Denkweise bleibend amalgamire; so muß man ihn dahin zu bringen suchen, die Sache immer nur in dieser Weise anzuschauen und zu behandeln. — Uebrigens gibt es noch eine Weise, Brüche schriftlich zu dividiren. Wir geben sie jedoch nur der Vollständigkeit wegen und nicht, um sie zu empfehlen. Sie besteht darin, daß man den Divisor stürzt und ihn dann mit dem Dividenden multiplicirt. Z. B. Wie oft liegt $^5/_8$ in $^7/_9$?

Ausführung: $^5/_8$ in $^7/_9 = {}^8/_5 \times {}^7/_9 = \frac{56}{45} = 1^{11}/_{45}$.

Denkweise: $^5/_8$ ist in $^1/_8$ $^1/_5$mal, mithin in 1 oder $^8/_8$ $^8/_5$mal; liegt $^5/_8$ in 1 $^8/_5$mal, so ist $^5/_8$ in $^7/_9$ $^7/_9 \times {}^8/_5$ oder $^8/_5 \times {}^7/_9$mal enthalten. Kurz: $^5/_8$ sind in 1 $^8/_5$mal, in $^7/_9$ also $^7/_9 \times {}^8/_5 = {}^{56}/_{45} = 1^{11}/_{45}$ mal enthalten.

Aufg. z. Zifferr., 69. u. 70. Uebung.

Mit der angewandten Zahl.

1) Für $^3/_4$ fl. erhält man 1 Pfd. Tabak; wie viel für 12 fl.?

Aufl. Für $^3/_4$ fl. erhalte ich 1 ℔; für $2 \times {}^3/_4$ fl. erhalte ich 2×1 ℔, für $3 \times {}^3/_4$ fl. erhalte ich 3×1 ℔; so oft ich $^3/_4$ fl. zahle, so oft erhalte ich 1 Pfd. Für 12 fl. bekomme ich also so vielmal 1 Pfd., als $^3/_4$ fl. in 12 fl. enthalten sind. Ausr. 12 fl. = $^{48}/_4$ fl.; $^3/_4$ fl. sind in $^{48}/_4$ fl. 16mal enthalten; ich erhalte daher 16×1 Pfd. oder 16 Pfd. Tabak.

2) Wie viel Vereinsthlr. à $1^3/_4$ fl. erhalte ich für 100 fl.?

Aufl. Für $1^3/_4$ fl. erhalte ich 1 Vrsthlr.; so oft ich $1^3/_4$ fl. zahle, so vielmal 1 Vrsthlr. erhalte ich. Für 100 fl. bekomme ich daher so vielmal 1 Vereinsthlr., als $1^3/_4$ fl. in 100 fl. enthalten sind. Ausr. $1^3/_4$ fl. = $^7/_4$ fl., und 100 fl. = $^{400}/_4$ fl.; $^7/_4$ fl. : $^{400}/_4$ fl. = 7 : 400 = 7 : (350 + 50) = 50 + $7^1/_7$ oder $57^1/_7$mal; also erhalte ich für 100 fl. $57^1/_7 \times 1$ Vrsthlr. = $57^1/_7$ Vrsthlr.

3) Bayern hat $4^1/_2$ Mill. Einw., Deutschland etwa 42 Mill.; wie vielmal so viel Einw. als Bayern hat Deutschland?

Aufl. Die Einwohnerzahl von Deutschland beträgt so vielmal $4^1/_2$ Mill., als diese in 42 Mill. enthalten sind. $4^1/_2$ Mill. = $^9/_2$ Mill., 42 Mill. = $^{84}/_2$ Mill.; $^9/_2$: $^{84}/_2$ oder 9 : 84 = $9^1/_3$mal. Also hat Deutschland $9^1/_3$mal so viel Einwohner, als Bayern.

4) A hat $3^1/_2$ fl. Taschengeld und gibt täglich $^7/_{10}$ fl. davon aus; wie viel Tage reicht er damit? 5) Zu einem Kleide werden $6^1/_4$ Ell. Zeug genommen; wie viel solche Kleider lassen sich aus 75 Ellen machen? 6) Wie viel Portionen à $^3/_8$ ℔ geben $12^1/_2$ ℔ Fleisch? 7) Wie lange reichen $8^2/_3$ Klftr. Scheitholz, wenn man monatlich $^7/_{12}$ Klftr. braucht? 8) Zu $4^1/_5$ Ell. Tuch gehört 1 ℔ Garn; wie viel ℔ Garn sind zu 84 Ellen erforderlich?

Aufgaben z. Zifferr., 71. Uebung.

B. Theilen.

Der Divisor ist hier immer eine ganze Zahl. Und wenn es heißt: $^1/_4$ von $^{23}/_{24}$ =? so ist zu lesen: wie viel beträgt der 4te Theil von $^{23}/_{24}$?

Mündlich.

Vorbereitendes.

Wie findest du den 4. Theil von dieser Linie? (Ich theile sie in 4 gleiche Theile.) Und wie thust du das? (Ich theile sie zuerst in 2 gleiche Theile und jede Hälfte wieder in zwei gleiche Theile.) Um den 4. Theil zu finden, suchst du also zuerst die Hälfte und aus der Hälfte wieder die Hälfte. — Suche eben so den 4. Theil von 84! (Die Hälfte von 84 = 42, und die Hälfte von 42 = 21; also ist $^1/_4$ von 84 = 21.) Du theilst 84 also zuerst durch 2 und das Ergebniß wieder durch 2; anstatt durch 4 theilst du 2mal durch 2 oder durch 2 × 2. — Wie wirst du nun auf ähnliche Weise den 6. Theil von 48 finden? (6 = 2 × 3; ich theile 48 durch 2 und die Hälfte wieder durch 3; oder ich theile 48 durch 3 und das 3tel wieder durch 2. Ausführung!) — Sucht eben so

$^1/_8$ von 124	$^1/_{14}$ von 112	$^1/_{18}$ von 210	$^1/_{32}$ v. 480
$^1/_9$ von 156	$^1/_{15}$ von 110	$^1/_{20}$ von 340	$^1/_{48}$ v. 320
$^1/_{12}$ von 300	$^1/_{16}$ von 240	$^1/_{24}$ von 186	$^1/_{72}$ v. 640

Hierbei ist besonders darauf zu achten, daß man den Divisor in Faktoren zerlegt, wovon wenigstens einer im Dividenden aufgeht. Natürlich wird mit demselben auch zuerst getheilt.

Suche den 4. Theil von 7 auf zweierlei Weise!

a. Der 4. Theil von 1 = $^1/_4$; der 4. Theil von 7 = $^7/_4$ = $1^3/_4$.

b. 7 = 4 + 3. Der 4. Theil von 4 = 1, von 3 = $^3/_4$, von 7 also $1^3/_4$.

Nun zu den Brüchen.

Beispiel 1. Suche den 4. Theil von $^7/_8$ auf zweierlei Weise!

a. Ich suche zuerst den 4. Th. von $^1/_8$; $^1/_8$ in 4 gleiche Theile zerlegt = $^4/_{32}$; also ist der 4. Theil von $^1/_8$ = $^1/_{32}$ und der 4. Th. von $^7/_8$ = $^7/_{32}$.

b. $^7/_8$ = $^4/_8$ + $^3/_8$; der 4te Theil von $^4/_8$ = $^1/_8$; der 4. Th. von $^3/_8$ = $^3/_{32}$; also ist der 4. Th. von $^7/_8$ = $^1/_8$ + $^3/_{32}$ = $^4/_{32}$ + $^3/_{32}$ = $^7/_{32}$.

Welche Weise ist die bessere? (Die erstere.) Warum?

Beispiel 2. Suche auf dieselbe Weise den 4. Th. von $^8/_9$!

a. Der 4. Th. von $^1/_9$ = $^1/_{36}$, von $^8/_9$ = $^8/_{36}$ oder $^2/_9$.

b. $^8/_9$ = 4 × $^2/_9$; der 4. Th. von $^8/_9$ = $^2/_9$.

Welche Weise ist hier die bessere? (Die zweite.) Warum?

Darum machen wir uns zur Regel: Geht der Theiler in dem Zähler des Bruches auf, dann lassen wir die einzelnen Theile, wie sie sind, und theilen blos die Anzahl der gegebenen Theile, d. i. wir

theilen blos den Zähler und lassen den Nenner unverändert. Geht der Theiler in dem Zähler des Bruches **nicht** auf, dann nehmen wir uns von jedem einzelnen der gegebenen Theile den verlangten Theil, wobei der Zähler unverändert bleibt, den Nenner aber so vielmal so groß wird, als der Theiler sagt.

1) Suche die Hälfte von $^1/_3$, $^2/_3$! von $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$! 2) Wie suchst du den 3. Theil von $^1/_4$, $^3/_4$? von $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$? 3) Suche den 4. Theil der Brüche von $^1/_{13}$ bis $^{12}/_{13}$! 4) Welche Zahlen gehen in dem Zähler von $^{24}/_{25}$ auf? Theile $^{24}/_{25}$ durch diese Zahlen! 5) Suche von $^8/_9$ die Hälfte, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ ꝛc.! 6) Wie suchst du am besten den 6. Theil von $^{26}/_{27}$? ($6 = 2 \cdot 3$; von diesen beiden Faktoren geht 2 in dem Zähler 26 auf; ich suche daher zuerst die Hälfte und von dieser $^1/_3$.) 7) Wie suchst du eben so den 9. Theil von $^{39}/_{40}$? $^1/_{18}$ von $^{12}/_{13}$? $^1/_{24}$ v. $^8/_9$? Wie viel beträgt der 32. Theil von $^{24}/_{25}$? v. $^{48}/_{55}$?

Beispiel 3. Wie viel beträgt der 5te Theil von $3^3/_4$?

Ausr. a. Der 5te Theil von $3 = {}^3/_5$, von $^3/_4 = {}^3/_{20}$; $^3/_5 + {}^3/_{20} = {}^{12}/_{20} + {}^3/_{20} = {}^{15}/_{20}$ od. $^3/_4$.

Ausr. b. Der 5te Theil von $3 + {}^3/_4$ ist kein Ganzes. Ich verwandle daher $3^3/_4$ in lauter 4tel. $3^3/_4 = {}^{15}/_4$. Der 5. Theil von $^{15}/_4 = {}^3/_4$. Also ist der 5te Theil von $3^3/_4 = {}^3/_4$.

Beispiel 4. $27^3/_5$ durch 8 getheilt, wie viel?

Aufl. Auf den 8. Theil von $27^3/_5$ kommen Ganze. Diese ziehe ich zuerst heraus. $27^3/_5 = 24 + 3^3/_5$. Der 8te Theil von $24 = 3$; $3^3/_5 = {}^{18}/_5$; der 8te Theil von $^{18}/_5 = {}^{18}/_{40}$ oder $^9/_{20}$. Also ist $27^3/_5$ durch 8 getheilt $= 3^9/_{20}$.

Oder: $27^3/_5 = {}^{138}/_5$; der 8te Theil von $^1/_5 = {}^1/_{40}$, von $^{138}/_5 = {}^{138}/_{40} = {}^{120}/_{40} + {}^{18}/_{40} = 3^9/_{20}$.

Aufgaben.

$^1/_3$ von $2^1/_2$	$^1/_2$ von $14^6/_7$	$^1/_6$ von $75^2/_3$	$^1/_{15}$ von $5^5/_6$
$^1/_5$ von $3^3/_4$	$^1/_4$ von $14^6/_7$	$^1/_{10}$ von $124^3/_4$	$^1/_{21}$ von $14^7/_8$
$^1/_9$ von $7^1/_3$	$^1/_5$ von $14^6/_7$	$^1/_7$ von $81^1/_5$	$^1/_{32}$ von $24^4/_5$
$^1/_8$ von $4^4/_5$	$^1/_9$ von $14^6/_7$	$^1/_8$ von $101^1/_2$	$^1/_{42}$ von $35^7/_9$

Beispiel 5. Wie viel beträgt $^1/_{100}$ von $16^1/_4$ fl.?

a. Ich zerlege den Divisor 100 in Faktoren, hier am besten in 5×20 und theile zuerst durch 5; $^1/_5$ von $16^1/_4$ fl. = 3 fl., Rest $1^1/_4$ fl.; $1^1/_4$ fl. = $^5/_4$ fl.; $^1/_5$ von $^5/_4$ fl. = $^1/_4$ fl.; also ist $^1/_5$ von $16^1/_4$ fl. = $3^1/_4$ fl. Davon suche ich nun den 20. Theil. $^1/_{20}$ von 3 fl. = 3×3 oder 9 kr.; $^1/_{20}$ von $^1/_4$ fl. oder von 15 kr. = $^3/_4$ kr. Also ist $^1/_{100}$ von $16^1/_4$ fl. = $9^3/_4$ kr.

b. Ich zerlege den Dividenden in Posten, welche durch 100 leicht zu theilen sind. $16^1/_4$ fl. = $10 + 5 + 1^1/_4$ fl.; $^1/_{100}$ von 10 fl. = $^1/_{10}$ fl. od. 6 kr.; $^1/_{100}$ von 5 fl. = $^1/_{20}$ fl. oder 3 kr.; 6 kr. + 3 kr. = 9 kr.; $^1/_{100}$ von $1^1/_4$ fl. oder von 75 kr. = $^{75}/_{100}$ oder $^3/_4$ kr.; also ist $^1/_{100}$ von $16^1/_4$ fl. = $9^3/_4$ kr.

$^1/_8$ v. $75^4/_5$ fl. =?	$^1/_2$ v. $25^1/_2$ Ms. =?	$^1/_{48}$ v. $40^4/_5$ fl. =?
$^1/_{40}$ v. $36^1/_2$ fl. =?	$^1/_7$ v. $22^3/_4$ Ell. =?	$^1/_{90}$ v. $120^3/_4$ fl. =?
$^1/_{25}$ v. $110^3/_4$ fl. =?	$^1/_{24}$ v. $64^1/_2$ Pfd. =?	$^1/_{72}$ v. $361^1/_8$ ℔ =?

Aufg. mit der angewandten Zahl s. Kopf- oder Denkrechnen S. 18, Stufe 15, bis S. 22.

Schriftlich.

Beispiel 1. Wie viel beträgt $^1/_4$ von $^{13}/_{15}$?

Ausrechnung.

```
 4 | 13
15 | 15
---+----
60 | 13 = 13/60.
```

Ich betrachte $^{13}/_{15}$ als 13 Ganze. Dadurch wird der Dividend 15mal so groß. Um gleichwohl das richtige Ergebniß zu erhalten, so mache ich auch den Theiler 15mal so groß. Anstatt mit 4 in $^{13}/_{15}$ theile ich nun mit dem 15fachen von 4 in das 15fache von $^{13}/_{15}$ d. i. mit 60 in 13, wodurch sich $^{13}/_{60}$ ergibt.

Anm. Daß man, wenn der Divisor in dem Zähler aufgeht, diesen auch im schriftlichen Rechnen ohne Weiteres theilt, versteht sich von selbst. Das oben angegebene Verfahren ist aber das allgemeinere.

Beispiel 2. Wie viel beträgt $^1/_7$ von $5^6/_{11}$?

```
 7 | 5 6/11.
11 |
---+-----------
77 | 61 = 61/77
```

Beispiel 3. Wie groß ist der 12. Theil von $357^5/_6$?

```
a. 12 | 357 5/6 |               b. 12 | 357 5/6 | 29.
    6 |   6     |                     |  24     |
   ---+---------|                     +---------|
   72 | 2147    | 29 59/72.           |  117    |
      |  144                          |  108    |
      |  ----                      12 |    9 5/6|
      |   707                       6 |         |
      |   648                     ----+---------+
      |   ---                      72 |   59    | 59/72
      |    59
```

Die mit a bezeichnete Ausrechnung ist an sich klar. Bei b wurde der 12. Theil zuerst von der ganzen Zahl und hernach von dem Reste gesucht. Der 12. Th. von 357 = 29, Rest 9; hiezu die $^5/_6$, gibt $9^5/_6$ = $^{59}/_6$; der 12. Th. von $^{59}/_6$ = dem 72. Th. von 59 Ganzen = $^{59}/_{72}$.

Beispiel 4. Suche $^1/_8$ von $2725^4/_5$ fl.

```
Ausr. 8 | 3 7 2 5 4/5 fl. |
      5 |       5         |
    ----+-----------------+
    4 0 | 1 8 6 2 9 fl.   | 4 6 5 fl.
          1 6 0
          -----
            2 6 2
            2 4 0
            -----
              2 2 9
              2 0 0
              -----
                2 9
                  6 0
    4 0 | 1 7 4 0 kr. | 4 3 1/2 kr.
```

Aufg. z. Zifferr., 72. u. 73. Uebung.

Dritte Abtheilung.

Das Bruchrechnen in ungleich benannten Zahlen.

Resolviren.

Beispiel: $^2/_3$ Pfd., wie viel Loth und Quint?

Aufl. a. 1 Pfd. = 32 Loth; $^1/_3$ Pfd. ist der 3. Theil von 32 Loth; der 3. Theil von 32 Loth = 10 Lth., Rest 2 Loth; 2 Lth. = 8 Qt.; der dritte Theil von 8 Qt. = $2^2/_3$ Qt.; $^1/_3$ Pfd. = 10 Lth. $2^2/_3$ Qt.; also sind $^2/_3$ Pfd. = 2 × 10 Loth $2^2/_3$ Qt. = 21 Loth $1^1/_3$ Qt.

Aufl. b. 1 Pfd. = 32 Loth; $^2/_3$ Pfd. = $^2/_3$ × 32 Loth, also 2 × 32 Loth, $^1/_3$mal genommen. 2 × 32 Loth = 64 Loth; der 3. Theil von 64 Lth. = 21 Lth. $1^1/_3$ Qt. — Steht, mit Ziffern gerechnet:

$^2/_3$ Pfd. = $^2/_3$ × 32 Lth.

```
     32 Loth
      2
3 | 64 | 21 Loth
    63
     1
     4
3 |  4 Qt. | 1 1/3 Qt.
```

Aufg. z. Zifferr., 74. Uebung.

Anm. Die Aufgaben dieser Uebung werden, soweit es angeht, mündlich und schriftlich zugleich gerechnet.

Reduciren.

Beispiel 1. 51 kr., wie viele Gulden?

Aufl. 60 kr. = 1 fl.; 1 kr. = $^1/_{60}$ fl., und 51 kr. = $^{51}/_{60}$ fl. = $^{17}/_{20}$ fl.

Oder: 60 kr. = 1 fl; 51 kr. sind so viele Gulden, als 60 kr. in 51 kr. enthalten sind; 60 in 51 = $^{51}/_{60}$ = $^{17}/_{20}$mal; also sind 51 kr. = $^{17}/_{20}$ fl.

Beispiel 2. $17^3/_4$ Loth, wie viel Pfd.?

```
1 Pfd. = 32 Loth. | 17 3/4 Loth.
          4       |
        -----     | ------------
         128      | 71 = 71/128 Pfd.
```

Beispiel 3. 5 kr. 2 pf., wie viel Gulden?

Aufl. 5 kr. 2 pf. = 22 pf., und 1 fl. = 60 × 4 oder 240 pf.; also ist 1 pf. = $^1/_{240}$ fl., und 22 pf. = $^{22}/_{240}$ = $^{11}/_{120}$ fl.

Oder: 5 kr. 2 pf. sind so viele Gulden, als 1 fl. oder 60 kr. darin enthalten sind.

1 fl. = 60 fl.	5 kr. 2 pf.
4	4
~~240~~	~~22~~
120	11 = $^{11}/_{120}$ fl.

Beispiel 4. 3 Pfd. 25 Loth $3^1/_2$ Qt., wie viele Pfd.?

Die 3 Pfd. bleiben unverändert. Es ist also nur zu suchen, wie viel die 25 Lth. $3^1/_2$ Qt. in Pfd. betragen. Um das zu finden, muß ich suchen, wie oft 32 Lth. in 25 Loth $3^1/_2$ Qt. enthalten sind.

32 Loth	25 Loth $3^1/_2$ Qt.
4	4
128	$103^1/_2$ Qt.
2	
256	207 | $^{207}/_{256}$.

32 Loth sind in 25 Loth $3^1/_2$ Qt. $^{207}/_{256}$ mal enthalten; also sind 3 Pfd. 25 Loth $3^1/_2$ Qt. = $3^{207}/_{256}$ Pfd.

Aufg. z. Zifferr., 75, 76. u. 77. Uebung.

Sehr zu empfehlen ist, über die verschiedenen Münz-, Maß- und Gewichtssorten mündlich und schriftlich vollständige Reduktionsreihen bilden zu lassen. Z. B.

1 Mon. = $^1/_{12}$ Jahr.	5 Mon. = $^5/_{12}$ J.	9 Mon. = $^3/_4$ J.
2 „ = $^1/_6$ „	6 „ = $^1/_2$ „	10 „ = $^5/_6$ J.
3 „ = $^1/_4$ „	7 „ = $^7/_{12}$ „	11 „ = $^{11}/_{12}$ J.
4 „ = $^1/_3$ „	8 „ = $^2/_3$ „	12 „ = 1 J.

Addiren.

Beispiel. Wie viel betragen 5 Schff. $4^4/_5$ Mtz. + 7 Schff. $5^2/_3$ Mtz. + 9 Schff. $3^3/_4$ Mtz. + 12 Sch. $2^1/_2$ Mtz.?

Ausrechnung.

	60			
5 Schff. $4^4/_5$ Mtz.	12	48		5. 3. 4. 2
7 „ $5^2/_3$ „	20	40		
9 „ $3^3/_4$ „	15	45		
12 „ $2^1/_2$ „	30	30		
35 Schff. $4^{43}/_{60}$ Mtz.	60	163	2	
		120		
		43		

Aufg. z. Zifferr., 78. Uebung.

Subtrahiren.

Beispiel. 12 Fdr. $4^7/_8$ Eim. — 8 Fdr. $9^4/_5$ Eim. =?

Ausrechnung.

		40	
12 Fdr.	$4\frac{7}{8}$ Eim.	5	35
8 "	$9\frac{1}{5}$ "	8	32
3 Fdr.	$7\frac{3}{40}$ Eim.		3

Aufg. z. Zifferr., 79. und 80. Uebung.

Multipliciren.

Beispiel 1. Wie viel ist 8 × 36 fl. $43\frac{4}{5}$ kr.?

Ausrechnung:

a.

36 fl.	$43\frac{4}{5}$ kr.
	8
293 fl.	$50\frac{2}{5}$ kr.

b.

36 fl. $43\frac{4}{5}$ kr.
60
$2203\frac{4}{5}$ kr.
5
11019 (5tel-kr.)
8 ×
5 | 88152 | $17630\frac{2}{5}$ kr. | (60) 293 fl. $50\frac{2}{5}$ kr.

Beispiel 2. 11 ℔ 24 Loth sind $2\frac{1}{4}$mal zu nehmen.

Ausrechnung.

1) $2\frac{1}{4}$ oder $\frac{9}{4}$ × 11 ℔ 24 Lth. =
a. 9 × 11 ℔ 24 Loth, getheilt durch 4.
b. $\frac{1}{4}$ v. 11 ℔ 24 Loth, 9mal genommen.

a.

	11 ℔	24 Loth.
		9
4	105 ℔	24 Loth.
	26 ℔	14 Loth.

b.

4	11 ℔	24 Loth.
	2 ℔	30 Loth.
		9
	26 ℔	14 Loth.

2) 11 ℔ 24 Loth =
a. 376 Loth; also ist $2\frac{1}{4}$ × 11 ℔ 24 Loth = $2\frac{1}{4}$ × 376 Lth.
b. $11\frac{3}{4}$ ℔; also ist $2\frac{1}{4}$ × 11 ℔ 24 Loth = $2\frac{1}{4}$ × $11\frac{3}{4}$ ℔.
Die Ausführung ist bekannt.

3) $2\frac{1}{4}$ × 11 ℔ 24 Loth = 2 × 11 ℔ 24 Lth. + $\frac{1}{4}$ × 11 ℔ 24 Lth.

11 Pfd.	24 Loth.
	2
23 Pfd.	16 Loth.
2 "	30 "
26 Pfd.	14 Loth.

2 × 11 Pfd. 24 Lth.
= 23 Pfd. 16 Loth.
$\frac{1}{4}$ von 11 Pfd. 24 Loth
= 2 Pfd. 30 Loth,
zusammen 26 Pfd. 14 Lth.

Beispiel 3. Wie viel ist $^5/_8 \times$ 18 Pfd. $12^4/_5$ Lth.

Ausrechnung:

18 Pfd. $12^4/_5$ Loth.
32
48
54
$588^4/_5$ Loth.
$\frac{2944}{5}$

$$\frac{5}{8} \times \frac{\overset{368}{2944}}{5} = 368 \text{ Loth.}$$
= **11 Pfd. 16 Loth.**

Aufg. z. Zifferr., 81—84. Uebung.

Dividiren.

Beispiel 1. Wie oft sind $4^5/_6$ Pfd. in 3 Ctr. $28^3/_4$ Pfd. enthalten.

Ansatz und Berechnung:

a.	$4^5/_6$ Pfd.	$328^3/_4$ Pfd.	
b.	29	1315	
c.	$\times$ 4	$\times$ 6	
	116	7890	$68^1/_{58}$.

3 Ctr. $28^3/_4$ Pfd.
100
$328^3/_4$ Pfd.

Verfahren:

a. Man bringt die gegebenen Zahlen auf gleiche Benennung (d. i. auf ℔.)
b. Man verwandelt die gemischten Zahlen in unächte Brüche und setzt die Zähler als ganze Zahlen.
c. Zugleich vergrößert man in demselben Maße die gegenüberstehende Zahl und vollzieht dann die Division.

Beispiel 2. Wie groß ist $^1/_{12}$ von 175 fl. $28^1/_2$ kr.?

Ausrechnung:

a.
12 | 175 fl. | 14 fl.
12
55
48
7
60
420 kr.

$28^1/_2$ kr.
420
12 | $448^1/_2$ | $37^3/_4$ kr.
36
88
84
4 | 12 | $4^1/_2$
2 | 2
24 | 9 | $^9/_{24} = {}^3/_8$.

Der 12. Theil von 175 fl. = 14 fl., Rest 7 fl.; 7 fl. = 420 kr.; 420 + $28^1/_2$ kr. = $448^1/_2$ kr.; der 12. Theil von $448^1/_2$ kr. = 37 kr., Rest $4^1/_2$ kr.; $4^1/_2$ kr. = $^9/_2$ kr.; der 12. Theil von $^9/_2$ kr. oder der 24. Theil von 9 ganzen kr. = $^9/_{24}$ = $^3/_8$ kr.; also ist der 12. Theil von 175 fl. $28^1/_2$ kr. = 14 fl. $37^3/_8$ kr.

b.
| 175 fl. $28^1/_2$ kr.
| 60
12 | $10528^1/_2$ kr.
2 | 2
24 | 21057 | $877^3/_8$ kr. = **14 fl. $37^3/_8$ kr.**

175 fl. $28^1/_2$ kr. = $10528^1/_2$ kr. Um den Bruch zu beseitigen, richtet man diese Zahl ein, setzt für 21057 halbe Kreuzer eben so viele ganze und vervielfacht dafür auch den Theiler 12 durch 2. Es wird dann also mit dem Zweifachen des gegebenen Divisors ist das Zweifache des gegebenen Dividenden dividirt.

Aufg. z. Zifferr., 85—87. Uebung.

Regeldetri- oder Verhältnißaufgaben mit Brüchen,
durch Schlüsse aufgelöst.

Zweck und Ziel ist, die verschiedenen Arten von Verhältnißaufgaben, welche bisher nach den Operationen geordnet vorkamen, zur bessern Beleuchtung ihres Unterschiedes in Gegensätzen d. i. neben einander vorzuführen; sämmtliche Rechnungsarten, welche in der zweiten und dritten Abtheilung dieses Curses — behufs besonderer Einübung — getrennt behandelt wurden, vereinigt in Anwendung zu bringen; durch Aufgaben mit einer weniger einfachen Einkleidung die gesteigerte Denkkraft des Schülers in höherm Grade in Anspruch zu nehmen, und durch die möglichst allseitige Anschauung und Beurtheilung der Aufgaben dessen Bewußtsein zu bilden. Darum sei es nochmal gesagt: besser, eine Aufgabe mit Verstand aufgelöst, als zehn mechanisch gerechnet. Kopf- und Zifferrechnen gehen zusammen, d. h. die Aufgaben (der 88. und 89. Uebung) werden nach vorausgegangener Auflösung, soweit es thunlich ist, sowohl mündlich, als schriftlich ausgerechnet.

Aufg. 1. Eine Hausfrau braucht in 1 Monat $45^7/_8$ Pfd. Mehl; wie viel in 1 Jahr 7 Mon.?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel Mehl die Frau in 1 J. 7 M. verbraucht, und die Aufgabe sagt uns, wie viel sie in 1 Mon. verbraucht. In 1 Mon. verbraucht sie $45^7/_8$ Pfd.; in 1 J. 7 M. oder 19 M. verbraucht sie 19mal so viel, also $19 \times 45^7/_8$ Pfd. Ausrechnung:

a. Mündlich. $19 \times 45^7/_8$ Pfd. = 19×46 Pfd. — $19 \times {}^1/_8$ Pfd.; 19×40 Pfd. = 760 Pfd.; 19×6 Pfd. = 114 Pf.; 760 + 114 Pfd. = 874 Pfd.; $19 \times {}^1/_8$ Pfd. = $2^3/_8$ Pfd.; 874 Pfd. — $2^3/_8$ Pfd. = $871^5/_8$ Pfd. Also ꝛc.

b. Schriftlich. $19 \times 45^7/_8$ Pfd.
$19 \times {}^{367}/_8$ Pfd.

```
        367
         19
       3303
        367
  8 | 6973 | 871 5/8 Pfd. =
        8 Ctr. 71 Pfd. 20 Lth.
```

Aufg. 2. Für 2 Schff. 4 Mtz. erhält A $35^4/_5$ fl.; wie viel für 1 Mtz.?

Aufl. Zu berechnen ist, was 1 Mtz. kostet, und gegeben ist, was 2 Schff. 4 Mtz. kosten. 2 Schff. 4 Mtz. oder 16 Mtz. kosten $35^4/_5$ fl.; 1 Mtz. kostet $^1/_{16}$ davon. Ausrechnung:

a. 16 = 4×4. Ich suche von $35^4/_5$ fl. zuerst $^1/_4$ und von

dem Viertel wieder $^1/_4$. Der 4. Theil von 35 fl. = 8 fl. 45 kr. und von $^4/_5$ fl. = $^1/_5$ fl. oder 12 kr.; 8 fl. 45 kr. + 12 kr. = 8 fl. 57 kr.; der 4. Theil von 8 fl. 57 kr. = 2 fl. $14^1/_4$ kr. Also ꝛc.

```
b.     1 6 | 3 5 4/5 fl. |
         5 |             |
      ---- | ----------- |
       8 0 | 1 7 9 fl.   | 2 fl.
             1 6 0
             -----
               1 9
               6 0
       8 0 | 1 1 4 0 | 1 4 1/4 kr.
           |   8 0   |
             -------
               3 4 0
               3 2 0
               -----
                 2 0
                 --- = 1/4
                 8 0
```

Aufg. 3. $^1/_2$ Pfd. zu $48^1/_4$ kr.; was kosten $9^1/_2$ Pfd.?

Aufl. Zu suchen ist, was $9^1/_2$ Pfd. kosten, und bekannt ist, was $^1/_2$ Pfd. kostet. $^1/_2$ Pfd. kostet $48^1/_4$ kr.; $9^1/_2$ oder $^{19}/_2$ Pfd. kosten 19mal so viel, also $19 \times 48^1/_4$ kr. Ausrechnung:

a. $19 \times 48^1/_4$ kr. = $19 \times {}^4/_5$ fl. + $19 \times {}^1/_4$ kr. = 15 fl. 12 kr. + $4^3/_4$ kr. = 15 fl. $16^3/_4$ kr.

```
b.       4 8 1/4 kr.
         1 9
       -------
       4 3 2
       4 8
        + 4 3/4
     ---------
 6 0 | 9 1 6 3/4 | 1 5 fl.  1 6 3/4 kr.
```

Aufg. 4. $3^1/_8$ Pfd. zu $7^1/_3$ fl.; was kostet $^1/_8$ Pfd.?

Aufl. $3^1/_8$ oder $^{25}/_8$ Pfd. kosten $7^1/_3$ fl.; $^1/_8$ Pfd. ist der 25. Theil von $^{25}/_8$ Pfd. und kostet daher auch den 25. Theil von $7^1/_3$ fl.

a. $25 = 5 \times 5$. Ich suche zuerst $^1/_5$ und hieraus wieder $^1/_5$; $^1/_5$ von $7^1/_3$ fl. = 1 fl. 24 kr. + 4 kr. oder 1 fl. 28 kr., und $^1/_5$ von 1 fl. 28 kr. = 12 + $5^3/_5$ oder $17^3/_5$ kr. Also ꝛc.

```
b.   2 5 |     7 1/3 fl.   |
       3 |                 |
     --- | --------------- |
     7 5 |     2 2 fl.     |
         |       6 0       |
         | --------------- |
         | 1 3 2 0 kr.     | 1 7 3/5 kr.
```

Aufg. 5. In 3 Tagen verdient A $2^1/_5$ fl., wie viel in 8 Tagen?

Erste Weise.

Aufl. Ich soll berechnen, wie viel A in 8 Tagen verdient. Die Aufgabe sagt mir, wie viel er in 3 Tagen erhält. Wie schließe ich nun von 3 Tagen auf 8? Antwort: Ich schließe von 3 Tg. auf 1 Tg. und von 1 Tag auf 8 Tage.

Ausr. In 3 Tg. $2\,^1/_5$ fl.
1 Tg. $^1/_3 \times 2\,^1/_5$ fl. $= {}^{11}/_{15}$ fl.
8 Tg. $8 \times {}^{11}/_{15}$ fl. $= {}^{88}/_{15}$ fl. $=$ 5 fl. 52 kr.

Der 3. Theil von $2\,^1/_5$ fl. $= {}^1/_3 \times 2\,^1/_5$ fl. und umgekehrt. Man kann daher die $2\,^1/_5$ fl. durch 3 theilen, oder auch durch $^1/_3$ multipliciren. — Die Operationen werden so viel als möglich frei im Kopfe und nur im Nothfall durch eine Nebenrechnung schriftlich ausgeführt.

Zweite Weise.

Aufl. In 3 Tg. verdient A $2\,^1/_5$ fl.; so oft mal 3 Tage lang A arbeitet, so viel mal $2\,^1/_5$ fl. verdient derselbe. In 8 Tagen wird er also soviel mal $2\,^1/_5$ fl. verdienen, als 3 Tage in 8 Tagen enthalten sind. 3 Tg. sind in 8 Tg. $2\,^2/_3$ mal enthalten. A arbeitet $2\,^2/_3 \times 3$ Tage lang; folglich verdient er $2\,^2/_3 \times 2\,^1/_5$ fl.

Ausr. $2\,^2/_3 \times 2\,^1/_5$ fl.
$^8/_3 \times {}^{11}/_5$ fl. $= {}^{88}/_{15}$ fl. $=$ 5 fl. 52 kr.

Aufg. 6. $^5/_8$ Morgen kosten $328\,^2/_3$ fl.; wie hoch kommen 6 Morgen?

Erste Weise. Ich gehe von $^5/_8$ Mrg. auf $^1/_8$ Mrg., dann auf 1 Mrg. und dann auf 6 Mrg

Ausr. $^5/_8$ Mrg. $328\,^2/_3$ fl.
$^1/_8$ „ $^1/_5 \times 328\,^2/_3$ fl. $= 65\,^{11}/_{15}$ fl.
1 „ $8 \times 65\,^{11}/_{15}$ fl. $= 525\,^{13}/_{15}$ fl.
6 „ $6 \times 525\,^{13}/_{15}$ fl. $= 3155\,^1/_5$ fl.

Zweite Weise. 6 Mrg. kosten so vielmal $328\,^2/_3$ fl., als $^5/_8$ Mrg. in 6 Mrg. enthalten sind. $^5/_8$ Mrg. sind in 6 oder $^{48}/_8$ Mrg. $9\,^3/_5$ mal enthalten. Also kosten 6 Mrg. $9\,^3/_5 \times 328\,^2/_3$ fl.

Ausr. $9\,^3/_5 \times 328\,^2/_3$ fl.

$$\overset{16}{\cancel{48}}\!\!\Big/5 \times 986\Big/\cancel{3}\,1 = 3155\,^1/_5 \text{ fl.}$$

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr., 88. u. 89. Uebung.

Fragen und Aufgaben

für Präparanden und Seminaristen.

1) Was versteht man unter einem Bruche? 2) Auf welche zweifache Weise kann der Bruch $^9/_{16}$ entstehen? Warum sind zur Bezeichnung eines Bruches zwei Zahlen erforderlich? 4) Was ist mehr: $^7/_{11}$ oder $^7/_{12}$ und warum? 5) Warum ist der Bruch $^8/_{13}$ größer, als $^7/_{12}$? 6) Was sind ächte Brüche und was unächte? 7) Wie viel ächte Brüche gibt es, deren Nenner 43 ist? 8) Wie heißen die 3 unächten Brüche, welche 8 Ganze und 4 Theile enthalten, und deren Nenner 5, 7, 13 heißen? 9) Worin besteht das Erweitern und das Kürzen oder Heben der Brüche? 10) Warum wäre es unrichtig, das-

selbe durch die Ausdrücke „Vergrößern und Verkleinern" zu bezeichnen? **11)** Drücke den Bruch $\frac{7}{8}$ auf 10fache Weise aus! **12)** Mache an einer Linie anschaulich, daß $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$! Eben so, daß $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$! **13)** Verwandle $\frac{18}{23}$ in 161stel? **14)** Wie viele Hebezahlen hat der Bruch $\frac{72}{96}$? **15)** Wie heißt das größte gemeinschaftliche Maß von 87 und 203? **16)** Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 14, 18, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35 und 36? **17)** Welche Zahl ist um $\frac{4}{5}$ größer, als die Summe von $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$? **18)** Suche den Unterschied von $1050\frac{17}{21}$ und $864\frac{53}{56}$! **19)** Welche Zahl wurde um $42\frac{13}{15}$ vermindert, wenn $37\frac{17}{40}$ übrig blieb? **20)** Wie viel hat man zu $48\frac{5}{8}$ gelegt, wenn $75\frac{2}{9}$ herauskommt? **21)** Von welcher Zahl sind $5\frac{9}{11}$, $8\frac{7}{10}$ und $6\frac{3}{4}$ die drei ungleichen Theile? **22)** Wie groß ist der Unterschied zwischen der Summe und Differenz der Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{9}{13}$? **23)** Die Zahl $25\frac{13}{20}$ ist um $8\frac{7}{16}$ kleiner und um $12\frac{11}{15}$ größer, als welche zwei Zahlen? **24)** Welche Zahl ist um 127 kleiner, als ihre Hälfte, ihr 4tel, ihr 6tel und ihr 8tel zusammengenommen? **25)** Multiplicire $9\frac{11}{15}$ mit $8\frac{5}{6}$ auf zweierlei Weise! **26)** Dividire a. $\frac{27}{28}$ durch 5, b. 25 durch $\frac{7}{8}$, c. $18\frac{3}{7}$ durch $2\frac{3}{4}$ in dem Sinne, wie es die gegebenen Zahlen gestatten! **27)** Von welcher Zahl ist der Bruch $\frac{8}{11}$ der 18. Theil? **28)** $57\frac{5}{6}$ ist 14mal so groß, als welche Zahl? **29)** Wie viel betragen $\frac{8}{9}$ von $30\frac{3}{4}$? **30)** Um wie viel verrechnet sich der, der vorstehende Aufgabe als eine Subtraktionsaufgabe betrachtet? **31)** Von welcher Zahl ist $53\frac{5}{7}$ das 9fache? **32)** Die Zahl $14\frac{2}{3}$ ist in welcher andern $7\frac{3}{8}$mal enthalten? **33)** Welche Zahl liegt $8\frac{1}{5}$mal in $104\frac{1}{2}$? **34)** Wie groß ist der Unterschied zwischen der Summe und dem Produkte von $23\frac{1}{4}$ und $16\frac{9}{10}$? **35)** Wie heißt die Zahl, wovon $\frac{7}{8} = 35$? **36)** $\frac{7}{10} \times x = \frac{3}{4}$; wie heißt die durch x bezeichnete Zahl? **37)** Was ist mehr: $\frac{9}{10} + \frac{11}{15}$, oder $\frac{9}{10} \times \frac{11}{15}$, und wie groß ist die Differenz? **38)** $2\frac{1}{3} \times 8$ ist eben so viel, als $\frac{1}{16}$ von welcher Zahl? **39)** Wovon ist $21\frac{1}{2}$ das $4\frac{3}{5}$fache?

40) Drei Personen theilen eine Geldsumme so, daß A $\frac{4}{7}$, B $\frac{3}{8}$ und C die noch übrigen 81 fl. erhält; wie groß war die Summe? **41)** A gibt an B $\frac{1}{6}$ seiner Baarschaft; dieser will aber nur $\frac{1}{8}$ derselben haben und gibt daher 3 fl. wieder zurück; wie viel behält er? **42)** Von zwei Röhren, welche in einen Brunnentrog gehen, füllt die eine denselben in 9, die andere in 12 Stunden; in welcher Zeit füllen beide zusammen den Trog? **43)** In wie viel Stunden wird der Trog gefüllt werden, wenn derselbe eine stets offene Abflußröhre hat, die ihn in 6 Stunden leert? **44)** A sagte: Wenn ich 2mal so viel Geld hätte, als ich habe, und noch $\frac{1}{2}$mal, $\frac{1}{3}$mal und $\frac{1}{4}$mal so viel, so würden mir nur noch 2 fl. an 150 fl. fehlen; wie viel Geld hatte er? **45)** $\frac{7}{8}$ Krthlr., wie viel Gulden und Kreuzer? (1 Krthlr. = $2\frac{7}{10}$ fl., 7 Krthlr. = $7 \times 2\frac{7}{10}$ fl., $\frac{7}{8}$ Krthlr. = $\frac{7}{8} \times 2\frac{7}{10}$ fl.) **46)** Wie viel Gulden und Kreuzer sind a. $\frac{13}{15}$ Dukaten à 5 fl. 36 kr.? b. $\frac{23}{25}$ Brsthlr.? c. $\frac{65}{72}$ Friedrichsdor à 9 fl. 54 kr.? **47)** 1 fl. $27\frac{3}{4}$ kr. sind welcher Theil eines Krthlrs.? **48)** Welche Theile von einem Ctr. bilden 42 Pfd. $20\frac{3}{4}$ Lth.? **49)** A verkauft in $3\frac{1}{2}$ aufeinander folgenden Monaten 8 Ctr. $44\frac{1}{2}$ Pfd., 11 Ctr. $73\frac{2}{3}$ Pfd., 7 Ctr.

$24\frac{3}{4}$ Pfd. und 3 Ctr. $87\frac{1}{8}$ Pfd. Kaffee; wie viel beträgt im Durchschnitt sein monatlicher Absatz? **50)** Rechne $8\frac{7}{8} \times 3$ Schff. $4\frac{3}{4}$ Mtz. auf 4fache Weise! **51)** Verkauft Jemand eine Partie Tuch zu $3\frac{4}{5}$ fl. per Elle, so gewinnt er im Ganzen $13\frac{1}{8}$ fl.; verkauft er sie zu $3\frac{1}{2}$ fl. per Elle, so verliert er $9\frac{3}{8}$ fl.; wie viel Ellen sind es? **52)** A gibt $\frac{5}{12}$ seines Geldes und B $\frac{3}{4}$ des seinigen an C; wie groß ist eines jeden Baarschaft, wenn Beide gleichviel an C gaben und dieser zusammen 100 fl. erhielt?

Zeitrechnung.

A. Die Zeit und die Eintheilung derselben.

Die Zeit fließt gleichmäßig dahin. Sie hat (wie die mathematische oder blos gedachte Linie) nur die einzige Ausdehnung in die Länge, d. h. ihre Theile sind nicht zugleich vorhanden, sondern sie folgen nach- oder aufeinander. Die Eintheilung der Zeit in gewisse Zeitabschnitte hat hauptsächlich in der Bewegung der Erde ihren Grund.

1) Die scheinbare Umdrehung der Sonne um die Erde, oder eigentlich die Bewegung der Erde um ihre eigene Achse, wodurch Tag und Nacht entsteht, bildet einen Zeitabschnitt, den man den „Sonnentag" oder auch blos „Tag" nennt. Den Anfangspunkt desselben hat man in die Mitte der Nacht gesetzt. Der Tag beginnt Nachts 12 Uhr und dauert über Mittag bis wieder Nachts 12 Uhr.

Den Tag theilen wir in 24 Stunden von gleicher Länge, jede Stunde wieder in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden.

Sieben Tage zusammen bilden eine Woche.

2) Die Zeit, innerhalb welcher sich die Erde um die Sonne bewegt, nennt man ein Jahr. Bei diesem Laufe dreht sich die Erde $365\frac{242255}{1000000}$mal um sich selbst. Das Jahr hat also 365 ganze und 242255 Milliontel-Tage oder 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und nahe 51 Sekunden. Weil wir aber im gemeinen Leben nur nach ganzen Tagen rechnen können, so nimmt man für das gewöhnliche oder gemeine Jahr 365 Tage an. Die übrigen 5 Stunden 48 Minuten 51 Sekunden werden immer nach 4 Jahren, bis wohin sie 1 Tag — 44 Minuten 36 Sekunden zusammen machen, in den Monat Februar als der 24ste eingeschaltet. Dadurch erhält derselbe 29 und das treffende Jahr, Schaltjahr genannt, 366 Tage. Die Schaltjahre sind daran kennbar, daß die Einer und Zehner der Jahreszahl durch 4 theilbar sind. **1852**, **1856**, **1860** ꝛc. sind also Schaltjahre; die dazwischen liegenden Jahre sind gemeine.

Auf die einzelnen Tage des Jahres hat man die Namen von Personen übertragen, daher die Namenstage. Die Jahre selbst bezeichnet man durch Ordnungsnamen. In der Christenheit nennt man das Jahr, das mit dem Tage der Geburt Jesu Christi eintrat, das erste Jahr oder das Jahr 1, das darauffolgende Jahr das zweite oder das Jahr 2 ꝛc. Das Jahr 1858 ist daher das 1858ste nach Chr. Geb.; folglich sind bis zu diesem Jahre bereits 1857 volle Jahre abge-

laufen. Um also aus einer Jahreszahl die Anzahl aller bis dahin (seit Chr. Geb.) bereits verflossenen Jahre zu erhalten, so muß man dieselbe um 1 vermindern.

3) Unsere Eintheilung der Zeit nach Monaten ist von der Umlaufszeit des Mondes um die Erde entlehnt. Diese Umlaufszeit, während welcher der Mond seinen ganzen Lichtwechsel von Neumond zu Neumond durchmacht, beträgt 29 T. 12 St. 44 M. 12 solche Zeitperioden bildeten in der alten Römerzeit ein Jahr. Das Mondenjahr ($354\frac{1}{3}$ T.) war aber gegen das Sonnenjahr ($365\frac{1}{4}$ T.) beinahe um 11 T. zu kurz. Julius Cäsar schaffte daher im römischen Reiche die Eintheilung nach dem Mondlaufe ab und ließ den Lauf der Sonne zur Feststellung der Jahreslänge allein anwenden. Die Abschnitte der Monate und deren Namen (bis auf Quintilis und Sextilis, an deren Stelle Julius und Augustus kamen) behielt man bei. Sie verloren aber die Gleichheit ihrer Länge. Die 365 T. wurden in folgender, bis jetzt unveränderter Weise auf die 12 M. vertheilt:

Januar,	der 1. M. = 31 Tg.	Juli,	der 7. M. = 31 Tg.
Februar,	der 2. M. = 28 Tg.	August,	der 8. M. = 31 Tg.
-	in Schaltjahren 29 Tg.	Septbr.,	der 9. M. = 30 Tg.
März,	der 3. M. = 31 Tg.	Oktober,	der 10. M. = 31 Tg.
April,	der 4. M. = 30 Tg.	Novbr.,	der 11. M. = 30 Tg.
Mai,	der 5. M. = 31 Tg.	Dezbr.,	der 12. M. = 31 Tg.
Juni,	der 6. M. = 30 Tg.		

Dieß ist dem Gedächtnisse recht tüchtig einzuprägen. Dann gebe man Fragen folgender Art so lange, bis die Antwort rasch erfolgt.

1) Welcher Monat folgt auf den Februar? auf den Oktober? 2c.
2) Welcher Monat steht vor dem März? vor dem August? 2c.
3) Zwischen welchen 2 Monaten ist der April? der November? 2c.
4) Wie heißt der erste, 3te, 8te, 6te 2c. Monat des Jahrs?
5) Der wie vielte Monat im Jahre ist der Mai? August? 2c.
6) Wie viele Monate sind vor dem April? vor dem Juni? 2c.
7) Wie viele Tage hat der Januar? der März? 2c.
8) Welche Monate haben 30 Tage? welche haben 31?
9) Nennet Jahre, da der Februar nur 28 Tage hat? — Jahre, da derselbe 29 Tage zählt?
10) Wie viele Monate und Tage des Jahrs sind am 23. April verflossen? (Der 23. April ist der 23. Tag des 4. Monats; also sind bis dahin 3 Monate und 22 Tage abgelaufen.)
11) Wie viele Jahre, Monate und Tage sind am 25. August 1853 seit Chr. Geb. verflossen? (Der 25. August 1853 ist der 25. Tag des 8. Monats vom Jahre 1853; also sind bis zu diesem Tage abgelaufen (1853 — 1 =) 1852 Jahre, (8 — 1 =) 7 Monate und (25 — 1 =) 24 Tage.)
12) In welchem Jahre, Monate und Tage stand man, als seit Chr. Geb. 1845 Jahre 10 Monate und 18 Tage verflossen waren? (Man stand im Jahre 1846, im 11. Monat dieses Jahrs und im 19. Tage dieses Monats, d. i. im 19. November 1846.)

B. Die eigentliche Zeitrechnung.

a. Berechnung der Zeitdauer.

Die Zeit ist unendlich. Jeder Zeitabschnitt aber hat einen Anfang und ein Ende und läßt sich wie hier durch eine Linie darstellen.

a . . . . b c
|——|——|——|——|——|——|——|

a ist der Anfangspunkt, c der Endpunkt, ac die Zeitgröße oder Zeitdauer selbst. Diese ist bei b in zwei ungleiche Theile (ab und bc) getheilt. In Folge dessen haben wir jetzt 3 verschiedene Zeiträume vor uns; ab, bc und ac. Sind zwei dieser Größen gegeben, so läßt die dritte sich durch Rechnung finden.

Ist das Ganze ac (= 7) und der Theil ab (= 5) gegeben, so finde ich den Theil bc, indem ich den bekannten Theil vom Ganzen wegnehme. 7 — 5 = 2; bc = 2.

Ist das Ganze ac und der Theil bc gegeben, so finde ich den Theil ab, indem ich vom Ganzen den Theil bc abziehe. 7 — 2 = 5; ab = 5.

Sind endlich die beiden Theile ab und bc bekannt, so finde ich das Ganze, indem ich die beiden Theile zusammenzähle. 5 + 2 = 7; ac = 7.

Aehnliche Aufgaben noch mehr. Z. E. Es sei ac = 42 J., und ab = 25 J.; wie groß ist bc? — Es sei ac = 50 J., und bc = 18 J.; wie groß ist ab? — Es sei ab = 36 J., und bc = 25 J.; wie groß ist ac? Dann:

Als Karl der Gr. zur Regierung kam, waren seit Christi Geburt 767 J. verflossen, und als er starb 813 J.; wie lange hat er regiert? Wie viel Jahre sind jetzt (1864) seit Chr. Geb. verflossen? (1863 J.) Vor 522 Jahren hat Schwarz das Schießpulver erfunden; welcher Zeitraum liegt zwischen Chr. Geb. und dieser Erfindung? — 1396 J. nach Chr. Geb. wurde Guttenberg zu Mainz geboren; als er 44 J. alt war, erfand er die Buchdruckerkunst; wann also?

Ein Mann ist am 18. August 1809 geboren und am 4. März 1840 gestorben. Wie alt ist er geworden?

a. Mündlich.

Vom 18. August 1809 bis 18. August 1839 sind 30 Jahre; vom 18. August 1839 bis 18. Februar 1840 sind 6 Monate; und vom 18. Februar bis 4. März sind 11 + 4 = 15 Tage. Also ist der Mann 30 J. 6 M. und 15 Tg. alt geworden.

b. Schriftlich.

1. Jan. 18. Aug. 4. März
a|————————|————————|c
1 1809 ? 1840.

Das Alter des Mannes besteht in dem Zeitabschnitte, der zwischen seiner Geburt und seinem Tode liegt, ist also = bc; bc = ac — ab. Der 18. August des Jahres 1809 ist aber nicht der Zeitraum ab

selbst, sondern nur dessen Endpunkt. Er beträgt aber 1808 J. 7 M. 17 Tg. — Ebenso ist der 4 März des Jahres 1840 nur der Endpunkt von ac. Der Zeitraum ac selbst = 1839 J. 2 M. 3 Tg. Nun ziehe ich ab von ac ab.

		12	29
ac =	1839. J.	2. M.	3 Tage.
		13	32
ab =	1808 „	7 „	17 „
bc =	30 J.	6 M.	15 Tg.

17 Tage von 3 Tagen abzuziehen, geht nicht. Ich entlehne mir 1 Monat und zwar den Monat, welcher dem März zunächst vorangeht, d. i. den Februar. Der Februar des Jahres 1840 = 29 Tg.; 29 + 3 = 32 Tg.; 32 — 17 = 15 Tg.; 7 Monat von 1 Monat hinwegzunehmen, geht nicht. Ich borge mir daher 1 J.; 1 J. = 12 M.; 12 + 1 M. = 13 M.; 13 M. — 7 M. = 6 Monat. 1838 — 1808 = 30. Also beträgt das Alter des Verstorbenen 30 J. 6 Mon. und 15 Tage.

Aufg. z. Zifferr., Seite 38 u. 39 Nr. 1 bis 10.

Die Schüler berechnen auch ihr eigenes Alter.

b. Berechnung des Anfangspunktes.

A starb am 4. März 1840 in einem Alter von 30 Jahren 6 M. und 15 T. Wann war derselbe geboren?

30. 6. 15. 4. März.

a |—————————|—————————| c

b 1840.

c ist der Todestag und bc die Lebenszeit des A; b ist daher der Zeitpunkt seiner Geburt. Von demselben ist zu suchen, in welchem Jahre, Monate und Monatstag er liegt. Dieß ergibt sich, wenn man weiß, wie viele volle Jahre, Monate und Tage von a bis b verflossen sind. Das aber wird gefunden, wenn man A's Alter von der Zeit, die zwischen seinem Tode und Chr. Geburt enthalten ist, abzieht. Bis zum 4. März 1840 beträgt die abgelaufene Zeit 1839 Jahre 2 Mon. und 3 Tage. Ich rechne daher:

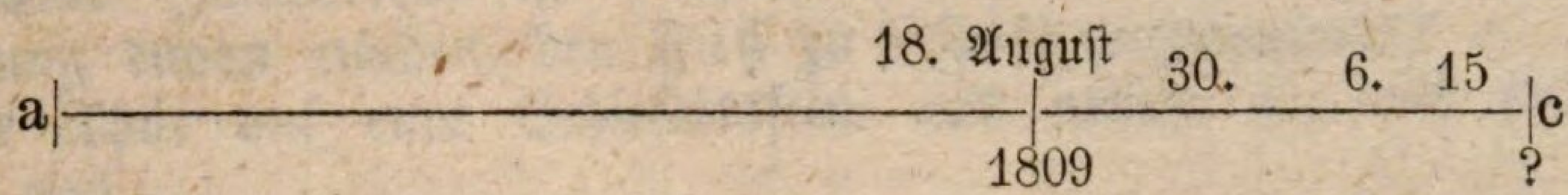
		12	29
ac =	1839. J.	2. M.	3 Tage.
		13	32
bc =	30 „	6 „	15 „
ab =	1808 J.	7 M.	17 Tg.

Bis zum Zeitpunkte der Geburt des A waren demnach verflossen 1808 J. 7 M. 17 T. Also fällt dessen Geburtszeit in das Jahr 1809 und zwar auf den 18. Tag des 8. Monats dieses Jahrs, d. i. auf den 18. August 1809.

Aufg. z. Zifferr., Nr. 11 — 14.

c. Berechnung des Endpunktes.

A wurde am 18. August 1809 geboren und erreichte ein Alter von 30 J. 6 M. 15 Tg. Wann starb derselbe?



Dieß ergibt sich, wenn man weiß, wie viele Jahre, Monate und Tage von a bis c abgelaufen sind. Das aber wird gefunden, wenn man die Zeit, die bis zu der Geburt des A verflossen war (ab), und seine Lebenszeit (bc) zusammen zählt. Bis zum 18. August 1809 beträgt die abgelaufene Zeit 1808 J. 7 M. 17 T. Ich rechne daher:

ab =	1808 J.	7 M.	17 Tage.
bc =	30 J.	6 M.	15 Tage +
ac =	1839 J.	2 M.	3 Tage.

15 + 17 Tage = 32 Tage. Um wissen zu können, wie viele Tage auf den Monat zu rechnen sind, muß ich erst die Monate addiren. 6 + 7 = 13 M. = 1 J. + 1 Monat (Januar). Der von den Tagen herüber zu zählende Monat ist demnach der Februar.

Dieser Monat hat aber entweder 28 oder 29 Tage, je nachdem er zu einem gemeinen oder zu einem Schaltjahre gehört. Also muß ich auch erst die Jahre zusammen zählen. 1 + 30 + 1808 = 1839. Der Februar gehört demnach zum Jahre 1840, hat also 29 Tage. Nun erst kann ich die Tage ins Reine bringen. 32 Tage = 29 + 3 Tage = 1 Monat + 3 Tage.

Als A starb, waren also 1839 J. 2 M. und 3 Tage abgelaufen; der Zeitpunkt seines Todes fällt darum auf den 4. März 1840.

Aufg. z. Zifferr., Nr. 15 — 23.

Sechster Cursus.

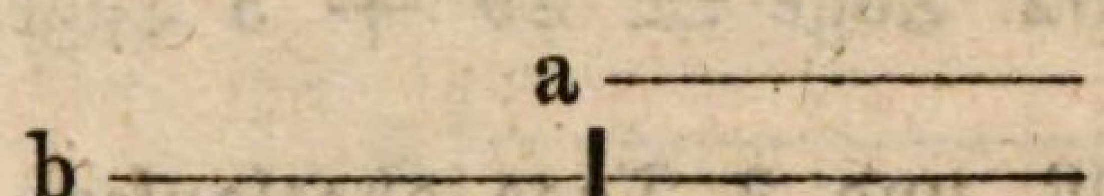
Verhältnißrechnungen.

Erste Abtheilung.

Verhältnißbestimmungen.

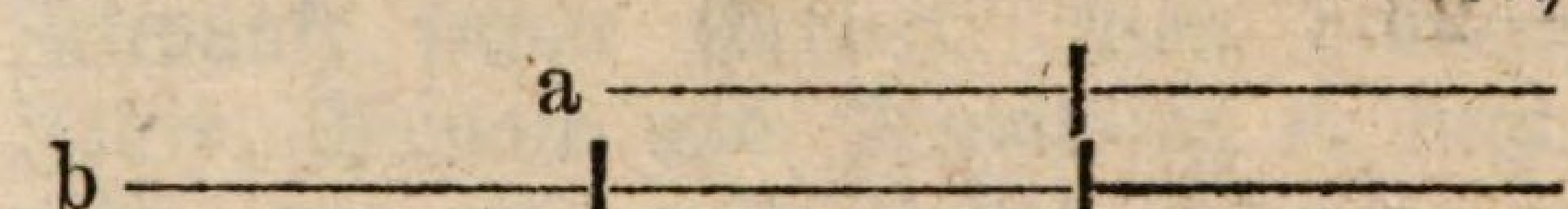
I. Das Verhältniß.

Anschauen und Sprechen.



a ist 1 Theil, wie b 2 Theile hat.
b hat 2 Theile, wie a 1 Theil ist.

Man sagt daher: a verhält sich zu b, wie 1 zu 2, und
b verhält sich zu a, wie 2 zu 1.



a hat 2 Thl., wie b 3 Thl. hat.
b hat 3 Thl., wie a 2 Thl. hat.

Man sagt daher: a verhält sich zu b, wie 2 zu 3, und
b verhält sich zu a, wie 3 zu 2.

Fragen und Aufgaben.

1) Was heißt: Eine Linie verhält sich zu einer andern, wie 1 zu 4? — Wenn kann man sagen: Eine Linie verhält sich zu einer andern, wie 3 zu 4? — Hier ist ein Strich; mache einen andern, zu dem sich der gegebene verhält, wie 4 zu 5! (Der gegebene Strich wird in 4 gleiche Theile getheilt und der gesuchte 5mal so groß gemacht, als 1 Theil ist.) — Mache zwei Striche, die sich verhalten, wie 3 zu 5! — Zwei andere, die sich verhalten, wie 4 zu 7!

2) Zeichne ein Rechteck, an welchem sich die Breite zur Länge verhält, wie 5 zu 8! (Der Schüler zieht eine wagrechte Linie, theilt sie in 8 gleiche Theile und nimmt 5 derselben zur Breite oder Höhe.) Zeichne ein Rechteck nach demselben Verhältnisse, jede Seite aber zweimal so groß, als zuvor! — Noch eines, jede Seite nur halb so groß!

3) Dieß Fenster ist 2′ br. und 3′ hoch; ich will es im verkleinerten Maßstabe an die Wandtafel zeichnen, und für den Fuß einen Zoll annehmen; wie breit und hoch werde ich es machen müssen?

Eine Zimmerthür ist 7′ hoch und 3′ breit; wie muß ich die Zeichnung davon machen, den Fuß zu 1 Zoll angenommen? — Zeichnet dieselbe Thür auf eure Schiefertafeln und nehmt für den Fuß eine Linie an!

II. Das Zahlenverhältniß.

1) Durch unmittelbare Auffassung.

Anschauen und Sprechen.

• • 2=1×2 • • | • • 4=2×2	2 ist 1 Theil, wie 4 2 Theile hat; 4 hat 2 Th., wie 2 1 Theil ist;
Man sagt daher:	2 verhält sich zu 4, wie 1 zu 2, und 4 verhält sich zu 2, wie 2 zu 1.
• • | • • 4=2×2 • • | • • | • • 6=3×2	4 hat 2 Thl., wie 6 3 Thl. hat, und 6 hat 3 Thl., wie 4 2 Thl. hat.
Man sagt daher:	4 verhält sich zu 6, wie 2 zu 3, und 6 verhält sich zu 4, wie 3 zu 2.
• • • 3=1×3 • • • | • • • 6=2×3	3 ist 1 Thl., wie 6 2 Thl. hat, und 6 hat 2 Thl., wie 3 1 Thl. ist.
Man sagt daher:	3 verhält sich zu 6, wie 1 zu 2, und 6 verhält sich zu 3, wie 2 zu 1.
• • • | • • • 6=2×3 • • • | • • • | • • • 9=3×3	6 hat 2 Th., wie 9 3 Thl. hat, und 9 hat 3 Th., wie 6 2 Thl. hat.
Man sagt daher:	6 verhält sich zu 9, wie 2 zu 3, und 9 verhält sich zu 6, wie 3 zu 2

Fragen und Aufgaben.

a. Wie verhält sich 6 zu 8? Antwort: 6=3×2, 8=4×2, 6 hat also 3 Thl., wie 8 4 Theile hat; 6 verhält sich daher zu 8, wie 3 zu 4. — In welchem Verhältnisse steht 15 zu 10? Antw.: Das gemeinschaftliche Maß ist 5; 15=3×5; 10=2×5; 15 hat also 3 Thl., wie 10 2 Thl. hat; daher verhält sich 15 zu 10, wie 3 zu 2. — Dergl. Aufg. mehr!

b. Nennt mir 2 Zahlen, die sich verhalten, wie 1 zu 2! (2 und 4, 3 u. 6, 4 u. 8 ꝛc.) — Zwei Zahlen, die sich verhalten, wie 1 zu 3! Wie 1 zu 4! Wie 2 zu 3!

c. Wie verhält $^1/_2$ zu $^1/_4$? Antwort: $^1/_2 = {}^2/_4$; $^1/_2$ hat also 2 Th., wie $^1/_4$ 1 Th. ist; $^1/_2$ verhält sich daher zu $^1/_4$, wie 2 zu 1. — Wie verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_5$? Antwort: $^1/_3 = {}^5/_{15}$, $^1/_5 = {}^3/_{15}$, $^1/_3$ hat also 5 Theile, wie $^1/_5$ 3 Theile hat; daher verhält sich $^1/_3$ zu $^1/_5$ wie 5 zu 3. — Wie verhält sich $^1/_6$ zu $^1/_7$? Antwort: $^1/_6$ verhält sich zu $^1/_7$, wie $^7/_{42}$ zu $^6/_{42}$ oder wie 7 : 6. Hieraus folgt, daß

Brüche mit dem Nenner 1 sich umgekehrt verhalten wie ihre Nenner.

b. In welchem Verhältniß steht 1 zu $1\frac{1}{4}$? Antwort: $1 = \frac{4}{4}$, $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; 1 verhält sich also zu $1\frac{1}{4}$, wie 4 zu 5. — Wie ist das Verhältniß von $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$? Antwort: $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$; mithin verhält sich $\frac{3}{4}$ zu $\frac{4}{5}$ wie 15 zu 16.

Dergleichen Aufgaben noch mehr.

2) Durch Division.

Was muß ich thun, um zu finden, wie sich die Länge eines Stabes zur Länge eines Baumstammes verhält?

a. Ich messe sowohl den Stab, als den Stamm mit einem Maße, das auf beide angewendet werden kann, z. B. mit dem Fuße. Ist der Stab 4 und der Stamm 64 Fuß lang, so hat jener seiner Länge nach 4 Theile, wie dieser 64 Theile hat; die Länge des Stabes verhält sich daher zur Länge des Baumstammes, wie 4 zu 64 oder wie 1 zu 16.

b. Ich messe die Länge des Baumstammes mit dem Stabe selbst. Finde ich, daß die Länge des Stabes in der Länge des Stammes 16mal enthalten ist, so ist die Länge des Stabes 1 Theil, wie die Länge des Stammes 16 Theile hat; daher verhält sich jene zu dieser wie 1 zu 16.

Auf dieselbe zweifache Weise finde ich auch, wie sich eine Zahl zur andern, z. B. 12 zu 30 verhält.

a. Ich messe beide Zahlen durch ihr gemeinschaftliches Maß, nämlich durch 6; $12 = 2 \times 6$, $30 = 5 \times 6$; 12 hat also 2 Theile, wie 30 5 Theile hat, 12 verhält sich daher zu 30, wie 2 zu 5.

b. Ich betrachte die Zahl 12 selbst als das Maß und sehe zu, wie oft sie in 30 enthalten ist. $12 : 30 = 2\frac{1}{2}$; 12 ist also 1 Thl., wie 30 $2\frac{1}{2}$ Thl. hat; daher verhält sich 12 zu 30, wie 1 zu $2\frac{1}{2}$ oder wie $\frac{2}{2}$ zu $\frac{5}{2}$ oder wie 2 zu 5.

Wie sich zwei gegebene Zahlen zu einander verhalten, wird daher auch gefunden, wenn man eine davon als Maß annimmt und zusieht, wie oft sie in der andern enthalten ist. In diesem Falle ergibt sich zunächst, daß sich die als Maß gebrauchte Zahl zur andern verhält, wie Eins zu dem Quotienten.

$12 : 24 = 2$; 12 ist also 1 Thl., wie 24 2 Theile hat; 12 verhält sich daher zu 24, wie 1 zu 2.

$16 : 60 = 3\frac{3}{4}$; 16 ist also 1 Theil, wie 60 $3\frac{3}{4}$ Theile hat; daher verhält sich 16 zu 60, wie 1 zu $3\frac{3}{4} = \frac{4}{4}$ zu $\frac{15}{4} = 4 : 15$.

Weil das Verhältniß zweier Zahlen auch durch Anwendung der Division d. i. dadurch gefunden wird, daß man sucht, wie oft die eine von ihnen in der andern enthalten ist; so wird es auch durch das Zeichen der Division bezeichnet. Steht daher 4 : 8, so kann es heißen: Wie oft liegt 4 in 8? und: Wie verhält sich 4 zu 8? Und um zu finden, wie sich 4 zu 8 verhält, so wird gesucht, wie oft 4 in 8 enthalten ist.

Fragen:

1) Wie verhält sich 9 zu 72? 9 liegt in 72 8mal; 9 verhält sich daher zu 72, wie 1 : 8. — In welchem Verhältniß steht 18 zu 6? 18 liegt in 6 $\frac{1}{3}$mal; 18 verhält sich daher zu 6, wie 1 : $\frac{1}{3}$, in ganzen Zahlen ausgedrückt, wie 3 : 1. — Wie verhält sich 8 zu 44? 8 liegt in 44 $5\frac{1}{2}$mal; 8 verhält sich also zu 44, wie 1 : $5\frac{1}{2}$, in gleichen Theilen ausgedrückt, wie $\frac{2}{2}$: $\frac{11}{2}$, in ganzen Zahlen, wie 2 : 11. Dergleichen Aufgaben noch mehr!

2) In welchem Verhältniß stehen:

a. 10 Ell. zu 25 Ell.? 80 Pfd. zu 95 Pfd.? 36 Ms. zu 60 Ms.? 18 fl. zu 48 fl.?

b. 40 fl. zu 60 fl.? 40 Ellen zu 60 Ellen? 40 Gulden zu 60 Ell.?

60 Ellen lassen sich nicht durch 40 Gulden messen; Gulden sind nicht in Ellen enthalten; Gulden und Ellen sind Dinge verschiedener Art; ungleichartige Dinge können also nicht im Verhältniß zu einander stehen.

III. Angewandt.

1) Wie ist das Verhältniß zwischen dem Vereinsthlr. und Krthlr.?

a. 1 Vrsthlr. = 105 kr., 1 Krthlr. = 162 kr.; 105 = 35 × 3, und 162 = 54 × 3; der Vrsthlr. verhält sich also zum Krthlr. wie 35 zu 54.

b. 1 Vrsthlr. = $\frac{7}{4}$ fl., 1 Krthlr. $\frac{27}{10}$ fl.; $\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$, und $\frac{27}{10} = \frac{54}{20}$; das Verhältniß zwischen Vrsthlr. und Krthlr. ist also wie 35 zu 54.

2) In welchem Verhältniß stehen Silber und Gold zu einander, wenn das Zollpfd. feines Silber $51\frac{2}{3}$ fl. und das Zollpf. feines Gold 805 fl. kostet?

Ausr.			
	$51\frac{2}{3}$	805	
		3	
	~~155~~	~~2415~~	
	31	483	$15\frac{18}{31}$

Das Silber steht zum Golde wie 31 : 483. Das Gold ist also $15\frac{18}{31}$ mal so theuer, als das Silber.

3) Der Schff Roggen kostet 13 fl. 20 kr., der Schff. Weizen 17 fl. 30 kr; wie verhalten sich die Preise?

a. 13 fl. 20 kr. = $13\frac{1}{3}$ fl. = $\frac{40}{3}$ fl.

17 fl. 30 kr. = $17\frac{1}{2}$ fl. = $\frac{35}{2}$ fl.

Da nun $\frac{40}{3} = \frac{80}{6}$, und $\frac{35}{2} = \frac{105}{6}$; so verhalten sich die Preise, wie 80 : 105 = 16 : 21.

b.		
	$13\frac{1}{3}$	$17\frac{1}{2}$
	~~40~~	3
	2	~~35~~
	8	7
	16	21 = $1\frac{5}{16}$.

Die Preise verhalten sich, wie 16 : 21. Der Weizen steht also $1\frac{5}{16}$ mal so hoch, als der Roggen.

4 Ein Landmann säete auf ein Feld 4 Mtz. 2 Vrtl. 3 Sz. und erntet 8 Schff. 3 Mtz. 2 Vrtl. 1 Sz.; wie verhalten sich Aussaat und Ernte?

4 Mtz. 2 Vrtl. 3 Sz. = $4\frac{11}{16}$ Mtz.
8 Schff. 3 Mtz. 2 V. 1 Sz. = $51\frac{9}{16}$ Mtz.

$4\frac{11}{16}$	$51\frac{9}{16}$
75	825
3	33
1	11

Aussaat und Ernte verhalten sich wie 1 : 11; die Ernte beträgt also das 11fache von der Aussaat.

5) Eine gewisse Arbeit wird von einem Manne in 5 Tg., von einer Frau in 8 Tg. vollendet; in welchem Verhältniß stehen die Kräfte?

Ausr. Die Kräfte verhalten sich, wie die Leistungen in gleicher Zeit. Der Mann braucht 5 Tg.; also fertigt er in 1 Tg. $\frac{1}{5}$. Die Frau braucht 8 Tg.; also fertigt sie in 1 Tg. $\frac{1}{8}$. Mithin verhält sich die Kraft des Mannes zu der Kraft der Frau, wie $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} = \frac{8}{40} : \frac{5}{20}$ $= 8 : 5$.

6) Das Faß A enthält 8 Eim. Wein à $18\frac{2}{5}$ fl., das Faß B 12 Eim. à $15\frac{1}{3}$ fl.; in welchem Werthverhältniß steht der Wein des einen Fasses zu dem des andern?

A 8 × $18\frac{2}{5}$ fl. = $147\frac{1}{5}$ fl.
B 12 × $15\frac{1}{3}$ fl. = 184 fl.

$147\frac{1}{5}$	184
	5
736	920
92	115 = $1\frac{1}{4}$.

Der Werth vom Fasse A verhält sich zu dem vom Fasse B, wie 1 zu $1\frac{1}{4}$ oder wie 4 zu 5. B ist also $1\frac{1}{4}$mal so viel werth als A, und A $\frac{4}{5}$mal so viel als B.

Aufgaben.

1) Das Zollpfd. = 500 franz. Grammen, das bayr. Pfd. = 560 Gr.; wie verhält sich jenes zu diesem? 2) A verdient sich wöchentlich 8 fl. 45 kr., B 10 fl. 30 kr.; in welchem Verhältniß steht ihr Verdienst? 3) Von 2 Weinbergen ertrug der eine 2 Fdr. $4\frac{1}{2}$ Eim., der andere 3 Fdr. 2 Eim.; wie ist das Verhältniß? 4) Ein Beamter, der 1250 fl. Gehalt hatte, erhielt 275 fl. Zulage; wie verhält sich sein jetziger Gehalt zu seinem früheren? 5) Ein Haus, das jährlich 64 fl. zu unterhalten kostet, erträgt 380 fl. Miethe; ein anderes, dessen Unterhaltungskosten = 80 fl., wirft 520 fl. Miethe ab; wie verhält sich der Werth des einen Hauses zu dem des andern? 6) Eine Wiese ertrug 72 Ctr. Heu à 1 fl. 32 kr., eine andere 90 Ctr. à 1 fl. 18 kr.; in welchem Verhältniß steht der Ertrag und also auch der Werth der einen Wiese zur andern? 7) A verdient in 30 Tg. 23 fl., B. in 36 Tg. 31 fl.; wie verhält sich der tägliche Verdienst beider?

IV. Verhältniß und Gleichung.

a. Das Verhältniß in eine Gleichung zu verwandeln.

Erstes Beispiel. Die bayr. Elle verhält sich zur preußischen, wie **5 : 4**; die bayr. Elle hat also 5 Theile, wie die preußische deren 4 hat.

1 bayr. Elle ——————|——————|——————|——————|——————
1 pr. Elle ——————|——————|——————|——————

Was ergibt sich hieraus?

$^1/_5$ bayr. Elle = $^1/_4$ pr. Elle,
gleichnamig gemacht,
$^4/_{20}$ bayr. Ell. = $^5/_{20}$ pr. Ellen,
durch 20 multiplicirt,
4 bayr. Ell. = **5** pr. Ellen.

Zweites Beispiel. Die würzburger Elle verhält sich zur frankfurter wie **12 : 11**; sie hat also 12 Theile, wie diese 11.

1 würzb. Elle |——|——|——|——|——|——|——|——|——|——|——|——
1 frankf. Elle |——|——|——|——|——|——|——|——|——|——|——

Was ergibt sich hieraus?

$^1/_{12}$ würzb. Elle = $^1/_{11}$ frankf. Elle,
$^{11}/_{132}$ „ „ = $^{12}/_{132}$ „ „
11 „ „ = **12** „ „

Drittes Beispiel. Ein Vereinsthlr. = 7 × 15 kr., 1 fl. = 4 × 15 kr.; der Vrsthlr. verhält sich daher zum Gulden wie **7 : 4**.

$^1/_7$ Vrsthlr. = $^1/_4$ fl.
$^4/_{28}$ „ = $^7/_{28}$ fl.
4 „ = **7** fl.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß die Zahlen, welche das Verhältniß bezeichnen, umgestellt die Gleichung ausdrücken.

b. Die Gleichung in ein Verhältniß zu verwandeln.

Dieß geht zwar schon aus dem Vorigen hervor; wir halten aber die Sache für wichtig genug, sie noch besonders zu behandeln.

Erstes Beispiel. **3** bayr Ellen = **4** würtemb. Ellen; mithin ist 1 bayr. Elle = $1^1/_3$ wrtb. Ellen.

1 bayr. Elle ——————|——————|——————|——————
1 wrtb. Elle ——————|——————|——————

Die bayr. Elle hat also 4 Theile, wie die würtemb. Elle 3 Theile hat; sie verhält sich daher zu dieser wie **4 : 3**.

Zweites Beispiel. **10** augsb. Ellen = **7** bayr. Ellen; also ist 1 augsb. Elle = $^7/_{10}$ bayr. Ellen.

1 augsb. Elle |——|——|——|——|——|——|——
1 bayr. Elle |——|——|——|——|——|——|——|——|——|——

Die augsb. Elle enthält 7 Theile, wie die bayr. Elle 10; sie verhält sich daher zu dieser wie **7 : 10**.

Drittes Beispiel. **2** bayr. Schff. = **3** bad. Mltr.; also ist 1 bayr. Schff. = $1^1/_2$ oder $^3/_2$ bad. Mltr.; der bayr. Schff. hat also 3 Theile, wie das bad. Mltr. deren 2 hat; er verhält sich daher zu diesem wie **3 : 2**.

Die Zahlen, welche eine Gleichung ausdrücken, bezeichnen umgestellt das Verhältniß.

Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Drücke den gegenseitigen Werth der Gulden und Krthlr. durch eine Gleichung in ganzen Zahlen aus! (1 fl. = 60 kr., 1 Krthlr. = 162 kr.; der Gulden verhält sich daher zum Krthlr. wie 60 : 162 = 30 : 81 = 10 : 27; also sind 27 fl. = 10 Krthlr.)

2) Thue dasselbe mit Vrsthlrn. und Krthlrn.! (1 Vrsthlr. = 105 kr., 1 Krthlr. = 162 kr.; der Vrsthlr. verhält sich daher zum Krthlr. wie 105 : 162 = 35 : 54; mithin sind 54 Vrsthlr. = 35 Krthlr.)

3) Thue eben dasselbe mit Vrsthlrn. und Fünffrkthlr.! (1 Vereinsthlr. = 105 kr., 1 Fünffrkthlr. = 140 kr.; der Vrsthlr. verhält sich daher zum Fünffrkthlr. wie 105 : 140 = 21 : 28 = 3 : 4; also sind 4 Vrsthlr. = 3 Fünffrkthlr.)

4) Eben so mit dem Gulden und dem franz. Franc! (1 Franc = 28 kr., 1 fl. = 60 kr.; der Franc verhält sich daher zum Gulden wie 28 : 60 = 7 : 15; also sind 15 Frc. = 7 fl.)

5) Die englische Yard oder Elle = 405 pariser Linien, die nürnberger Elle = 290; wie ist das Verhältniß und die Gleichung? (Die engl. Elle verhält sich zur nürnberger wie 405 : 290 = 81 : 58; mithin sind 58 engl. Yard = 81 nürnb. Ellen.)

6) 6 östr. fl. = 7 südd. fl.; wie verhält sich 1 östr. fl. zu 1 südd. fl.? (6 östr. fl. = 7 südd. fl., 1 östr. fl. = $1^1/_6$ südd. fl.; 1 östr. fl. hat also 7 Theile, wie 1 südd. fl. deren 6 hat; also verhält sich 1 östr. fl. zu 1 südd. fl., wie 7 : 6.)

7) 5 Pfd. Butter geben $3^3/_4$ Pfd. Schmalz; welches ist das Werthverhältniß? (5 Pfd. Butter = $3^3/_4$ Pfd. Schmalz; 1 Pfd. Butter = $^3/_4$ Pfd. Schm.; der Werth der Butter verhält sich also zu dem des Schmalzes wie $^3/_4$ zu 1 oder wie 3 : 4, d. i. 1 Pfd. Schmalz ist $1^1/_3$mal so viel werth, als 1 Pfd. Butter.)

8) 11 Klftr. Fichtenholz werden gegen 7 Klftr. Buchenholz umgetauscht; wie verhalten sich die Preise? (Da 11 Klftr. Fichtenholz = 7 Klftr. Buchenholz, so verhalten sich die Preise wie 7 zu 11, d. i. der Preis von 1 Klftr. Fichtenholz hat 7 Theile, wie der Preis von 1 Klftr. Buchenholz 11 hat.)

9) 100 Pfd. Wiesenheu sind dem Futterwerthe nach = 90 Pfd. Kleeheu; wie sollen sich hiernach die Preise per Ctr. verhalten? (Da 100 Pfd. Wiesenheu = 90 Pfd. Kleeheu, so steht das Wiesenheu zum Kleeheu, dem Futter- und Geldwerthe nach, im Verhältniß wie 90 zu 100 oder wie 9 zu 10; der Ctr. Kleeheu soll also $1^1/_9$mal so viel als der Ctr. Wiesenheu kosten.)

10) 200 Pfd. Kartoffeln sind dem Futterwerth nach = 500 Pfd. Stoppelrüben; wie haben sich hiernach die Preise gleicher Quantitäten zu verhalten? (Der Preis der Kartoffeln zu dem der Stoppelrüben wie 5 zu 2.)

Zweite Abtheilung.

Regeldetri- oder Verhältnißrechnungen,

nach den Zahlen und Operationen geordnet.

Die sogenannten Regeldetri- oder Verhältniß-Aufgaben kommen nicht nur sehr häufig im Leben vor, sondern sie geben zugleich auch eine reiche Ausbeute des vorzüglichsten Bildungsstoffes. Dieses und der Umstand, daß bei gewissen Arten derselben die Zahlen auf Gegenstände angewendet erscheinen, welche eine besondere Betrachtung und Uebung nothwendig machen, sowie das Bedürfniß, für sie beim Zifferrechnen eine bestimmte, die Ausrechnung vereinfachende Form zu haben, ist der Grund ihrer besonderen Behandlung. Unsere Schüler sollen sich jetzt, um eine recht sichere Fertigung in der schriftlichen Berechnung der Verhältniß-Aufgaben zu erlangen, eine bestimmte Weise aneignen, die gegebenen Zahlen anzusetzen und die das verlangte Resultat erzielenden Operationen auszuführen. Bevor wir jedoch dazu übergehen, müssen wir uns für eine gewisse Form entscheiden. Denn da sich die Ausrechnung nach der Auflösung richtet und jede andere Auflösung eine andere Ausrechnung zur Folge hat; so sind für die schriftliche Berechnung der Verhältnißaufgaben ebenso viele Formen möglich, als es für sie allgemein anwendbare Auflösungsweisen gibt. Wie vielfach aber die Auflösung und demzufolge auch die Ausrechnung einer an sich einfachen Verhältnißaufgabe sein kann, ist aus nachstehendem Beispiele zu ersehen.

Aufgabe: 4 Ellen kosten 45 kr., was kosten 15 Ellen?

Behandlung:

Erste Aufl.: Ich gehe von 4 Ellen auf 1 Elle und von 1 Elle auf 15 Ellen.

Ausr. 4 Ellen kosten 45 kr.;
1 Elle kostet $^1/_4 \times 45$ kr. $= 11^1/_4$ kr.;
15 Ellen kosten $15 \times 11^1/_4$ kr. $= 2$ fl. $48^3/_4$ kr.

Zweite Aufl. Ich gehe von 4 Ellen auf **15** $\times$ 4 Ellen und von 15 $\times$ **4** Ellen auf 15 $\times$ **1** Elle.

Ausr.: 4 Ellen kosten 45 kr. $= {}^3/_4$ fl.;
15×4 Ellen kosten $15 \times {}^3/_4$ fl. $= {}^{45}/_4 = 11^1/_4$ fl.;
15×1 Elle kosten $^1/_4 \times 11^1/_4$ fl. $= 2$ fl. $48^3/_4$ kr.

Dritte Aufl. So vielmal 4 Ellen, so vielmal 45 kr.; 15 Ellen kosten daher so vielmal 45 kr., als 4 Ellen in 15 Ellen enthalten sind.

Ausr.: 4 Ellen : 15 Ellen $= 3^3/_4$; $3^3/_4 \times 45$ kr. $= 2$ fl. $48^3/_4$ kr.

Vierte Aufl. Ich zerlege die 15 Ellen in $12 + 3$ oder in $3 \times 4 + 2 + 1$ Elle und berechne jeden Theil für sich.

Ausr. 4 Ellen kosten 45 kr.

12 oder 3×4 E. kosten	3×45 kr.	=	2 fl. 15 kr.	
2 oder $\frac{1}{2} \times 4$ E. kosten	$\frac{1}{2} \times 45$ kr.	=	— fl. 22 kr. 2 pf.	
1 oder $\frac{1}{2} \times 2$ E. kostet	$\frac{1}{2} \times 22\frac{1}{2}$ kr.	=	— fl. 11 kr. 1 pf.	
15 oder $3 \times 4 + 2 + 1$ E. kosten also			2 fl. 48 kr. 3 pf.	

Fünfte Aufl. Ich betrachte 15 Ellen als 16 Ellen — 1 Elle.

Ausr.: 4 Ellen kosten 45 kr.

16 oder 4×4 Ell. kosten	4×45 kr.	=	3 fl.
1 oder $\frac{1}{4} \times 4$ Ell. kostet	$\frac{1}{4} \times 45$ kr.	=	— fl. $11\frac{1}{4}$ kr.
15 oder 16 — 1 Elle kosten daher			2 fl. $48\frac{3}{4}$ kr.

Wir sehen hier fünferlei Auflösungen und ebenso fünferlei Ausrechnungen, sämmtlich mehr oder weniger von einander verschieden und sämmtlich bei jeder Aufgabe dieser Gattung anwendbar. Es ist aber begreiflich, daß wir für das Zifferrechnen nicht mehr als eine Form zugleich einführen dürfen, und daß dieselbe längere Zeit ausschließlich und später wenigstens vorzugsweise angewendet werden müsse. Die Frage, welche Weise den andern vorzuziehen sei, ist übrigens leicht zu beantworten. Die erste Auflösung ist so einfach und natürlich, daß ihr unbestritten der Vorrang gebührt. Sie liegt aber der schriftlichen Rechnungsform zu Grunde, welche man die Zweisatzrechnung nennt, und welche sich dadurch auszeichnet, daß sie ganz und gar dem Gedankengange entspricht, den auch der weniger Geübte einschlägt, um eine Aufgabe zu lösen; daß durch sie das schriftliche Rechnen in das rechte Verhältniß zu dem mündlichen kommt und in der That das, was es sein soll — ein in Ziffern dargestelltes Kopfrechnen wird; daß sie sich eng an das Vorausgegangene anschließt und so Einheit in den ganzen Lehrgang bringt; daß sie, indem sich der Schüler bei ihr Schritt für Schritt dem klar vor seinem Bewußtsein stehenden Ziele nähert, den formellen, wie den materiellen Rechnungszweck gleichmäßig fördert, und daß sie sich für die Aufgaben mit umgekehrten Verhältnissen eben so gut wie für die mit geraden eignet. Sie wird deßhalb auch von uns zuerst behandelt und zwar in zweifacher Weise.

Um dem von mehreren Seiten ausgesprochenen Wunsch zu genügen, so geben wir dann die Proportionsrechnung und später die Kettensatz-Rechnung.

Während sichs nun beim Zifferrechnen zunächst um die Einübung und dann um die Anwendung der Rechenform handelt, ist aber zugleich auch dem freien mündlichen Rechnen gebührende Rechnung zu tragen. Auch es hat seine Rechte. Es ist nicht nur wenigstens eben so wichtig, als das Tafelrechnen, sondern es verlangt zugleich seine eigenthümliche Behandlung, somit auch eine eigene Uebung. Aus diesem Grunde und um die Gefahr zu vermeiden, dem Einen auf Kosten des Andern zu viel Zeit einzuräumen, werden von jetzt an Kopf- und Zifferrechnen gesondert d. h. in besondern Stunden behandelt. Beide gehen daher fortan neben einander.

Aber wenn gleich der Zeit nach getrennt, so behalten sie dennoch ihre innere gegenseitige Beziehung und zwar sowohl rücksichtlich des Stoffes, als rücksichtlich des Verfahrens. Kopf= und Zifferrechnen beschäftigen sich nämlich zuerst gleichzeitig mit Aufgaben, die nach den dabei anzuwendenden Operationen, dann wieder gleichzeitig mit Aufgaben, die nach den Gegenständen geordnet sind Und überall wird im mündlichen Rechnen die Auflösungsweise, die ihre Anwendung auch beim schriftlichen Rechnen findet, vorzugsweise ins Auge gefaßt und geübt.

A. Aufgaben mit einfachen geraden Verhältnissen.

A. Formen für das mündliche Rechnen.

Beispiel 1. 8 Pfd. Garn geben 36 Ellen Leinwand; wie viele Ellen von derselben Breite geben 7 Pfd. Garn von derselben Sorte?

Auflösung: Gesucht soll werden, wie viele Ellen Leinwand 7 Pfd. Garn geben, und bekannt ist, wie viele Ellen man von 8 Pfd. erhält. 8 Pfd. Garn geben 36 Ellen. Wie ist nun hieraus zu finden, wie viele Ellen 7 Pfd. geben?

a. Ich gehe von 8 Pfd. auf 1 Pfd. und von 1 Pfd. auf 7 Pfd. Ausrechnung! b. Ich gehe von 8 Pfd. auf 7 × 8 oder 56 Pfd. und von 56 oder 8 × 7 Pfd. auf 7 Pfd. Ausrechnung! c. 8 Pfd. geben 36 Ellen; so vielmal 8 Pfd., so vielmal 36 Ellen; also geben 7 Pfd. so vielmal 36 Ellen, als 8 Pfd. in 7 Pfd. enthalten sind. Ausr.! d. Ich zerlege 7 Pfd. in Posten, welche einfache Theile von 8 Pfd. sind, nämlich in 4 + 2 + 1 Pfd., und berechne jeden Posten für sich. e. Ich betrachte 7 Pfd. als 8 Pfd. — 1 Pfd. Ausr.!

Beispiel 2. In 24 Tg. verfüttert ein Landwirth 45 Ctr. Heu; wie viel in 36 Tagen?

a. Ich gehe von 24 Tg. auf 1 Tag und von 1 Tag auf 36 Tage. Ausr.! b. Die Zahlen 24 und 36 haben mehrere gemeinschaftliche Maße, nämlich: 2, 3, 4, 6 und 12. Das größte derselben ist 12. Ich gehe daher von 24 Tg. auf 12 Tg. und von 12 Tg. auf 36 Tg. Ausr.! c. 36 Tage sind $1\frac{1}{2}$ × 24 Tage; also wird in 36 Tg. auch $1\frac{1}{2}$mal so viel verfüttert, als in 24 Tagen. Ausr.!

Beispiel 3. Mit 4 kr. 2 pf. bezahlt man 3 Qt.; was kosten 18 Loth?

Auflösung: Ich soll suchen, was 18 Loth kosten, und weiß, wie theuer 3 Qt. sind; 3 Qt. kosten 4 kr. 2 pf. Nun ist die Frage: Wie gehe ich von 3 Qt. auf 18 Loth? — a. Was 18 Loth kosten, kann ich leicht finden, wenn ich weiß, was 1 Loth kostet; was 1 Loth kostet, kann ich wieder leicht finden, wenn ich weiß, was 1 Qt. kostet, und das kann ich leicht berechnen, weil ich weiß, was 3 Qt. kosten. Ich gehe daher von 3 Qt. auf 1 Qt., von 1 Qt. auf 1 Loth und von 1 Loth auf 18 Loth. b. 3 Qt. kosten $4\frac{1}{2}$ kr.; so vielmal 3 Qt., so vielmal $4\frac{1}{2}$ kr.; also kosten 18 Loth so vielmal $4\frac{1}{2}$ kr., als 3 Qt. in 18 Loth enthalten sind. 18 Loth = 18 × 4 = 72 Qt.; 3 Qt. : 72 Qt. = 24mal; mithin kosten 18 Loth oder 72 Qt. 24 × $4\frac{1}{2}$ kr. Ausr.! c. 4 × 1 Qt. = 1 Loth, 4 × 2 Qt. = 2 Loth,

4 × 3 Qt. = 3 Loth 2c.; 1 Loth ist daher das 4fache von 1 Quint, 2 Loth sind das 4fache von 2 Qt. 2c. Also kann ich von 3 Quint auch sogleich auf 3 Loth gehen, und von 3 Loth gehe ich dann auf 18 Loth. Ausr.! — Oder ich gehe von 3 Qt. auf 18 Qt. und von 18 Qt. auf das 4fache von 18 Qt., nämlich auf 18 Loth. Ausr.!

Beispiel 4. 2 Pfd. 16 Loth zu 4 fl. 40 kr., wie hoch kommen 2 Lth. 2 Qt.?

Auflösung a. 2 Pfd. 16 Loth = 64 + 16 = 80 Loth; 2 Loth 2 Qt. = 10 Qt. Nun heißt die Aufgabe: 80 Loth kosten 4 fl. 40 kr., wie hoch kommen 10 Qt.? — Ich gehe von 80 Loth auf 1 Loth, von 1 Loth auf 1 Qt. und von 1 Qt. auf 10 Qt.; 80 Loth kosten 4 fl. 40 kr., 1 Loth kostet $1/_{80}$ davon; 80 = 8 × 10; $1/_{10}$ von 4 fl. 40 kr. = 28 kr., und $1/_8$ von 28 kr. = $3^1/_2$ kr.; 1 Loth kostet $3^1/_2$ kr., folglich kommt 1 Qt. auf den 4. Theil von $3^1/_2$ kr.; $3^1/_2$ kr. = 14 pf.; der 4. Theil von 14 pf. = $3^1/_2$ pf. Kostet 1 Qt. $3^1/_2$ pf., so kosten 10 Qt. 10 × $3^1/_2$ pf. = 30 + 5 = 35 pf. oder 8 kr. 3 pf.

Aufl. b. 2 Pfd. 16 Loth = $2^1/_2$ Pfd., und 2 Loth 2 Qt. = $2^1/_2$ Loth; 1 Loth ist der 32. Theil von 1 Pfd., 2 Loth sind $1/_{32}$ von 2 Pfd., und $2^1/_2$ Loth sind $1/_{32}$ von $2^1/_2$ Pfd.; $2^1/_2$ Pfd. kosten 4 fl. 40 kr.; also kosten $2^1/_2$ Loth $1/_{32}$ von 4 fl. 40 kr.; 32 = 8 × 4; $1/_4$ von 4 fl. 40 kr. = 1 fl. 10 kr. und $1/_8$ von 1 fl. 10 kr. = $8^3/_4$ kr. Also kosten 2 Loth 2 Qt. $8^3/_4$ kr.

Siehe Kopf- oder Denkrechnen des Verf., Multiplikations-Divisions-Regeldetri, Stufe I. bis IV.

Wie viel von den Aufgaben, auf welche hier hingewiesen ist, in der einen oder in der andern Schule durchgenommen werden können, muß der Lehrer selbst am besten wissen. Man richte sich eben nach der Zeit, die zu Gebote steht. Uebrigens werden die obigen Beispiele mit den in dem Kopfrechen-Büchlein enthaltenen Andeutungen genügen, um zu erkennen, wie die Aufgaben der einzelnen Uebungen zu behandeln sind.

B. Formen für das schriftliche Rechnen.

I. Der Zweisatz in Divisionsform.

a. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Beispiel 1. Für 14 fl. erhält man 9 Ellen; wie viel wird man für 13 Ellen zahlen müssen?

Fertigung des Ansatzes.

(Ausführlich.)

Vor Allem muß man wissen, was berechnet werden soll. Und da dieß in der Frage der Aufgabe liegt, so ist die Frage auch zuerst in's Auge zu fassen. Sie heißt: Wie viel wird man für 13 Ellen zahlen müssen? Die Zahl „13 Ellen“ schreibt man etwas gegen

die Linke und das „Wie viel" deutet man rechts daneben durch ein Fragezeichen an.

13 Ellen ?

Wie viel man für 13 Ellen zahlen muß, läßt sich nur dann, nur unter der Bedingung finden, wenn gegeben ist, wie viel eine andere Anzahl Ellen kostet. Das sagt der Satz: „Für 14 fl. erhält man 9 Ellen." Derselbe heißt deshalb Bedingungssatz. Er wird gerade über den Fragesatz geschrieben, so daß die gleichartigen Glieder senkrecht unter einander zu stehen kommen. Man setzt also „9 Ellen" über 13 Ellen, und „14 fl." über das Fragezeichen.

9 Ellen	14 fl.	9 Ellen kosten 14 fl.
13 Ellen	?	13 Ellen, wie viel?

Das ist der Ansatz. Er besteht aus zwei unter einander befindlichen Sätzen: aus dem Bedingungssatze und aus dem Fragesatze. Daher sein Name „Zweisatz."

Berechnung:

```
 9 Ell.     14 fl.
13 Ell.     ?
-------------------
 9 Ell.   | 14 fl.
 1  "   9 |
13  "     | 13
-------------------
          | 42
          | 14
          |------
        9 | 182 | 20 fl.
            18
            ---
              2
             60
        9 | 120 kr. | 13 kr.
              9
             ---
             30
             27
             ---
              3
              4
             ---
        9 | 12 pf. | 1 1/3 pf.
              9
             ---
              3
              - = 1/3.
              9
```

9 Ellen kosten 14 fl.
13 Ellen, wie viel?

Ich gehe von 9 Ellen auf 1 Elle und von 1 Elle auf 13 Ellen.

9 Ellen kosten 14 fl.; die 14 fl. setze ich auf die rechte Seite des senkrechten Striches.

1 Elle kostet den 9. Theil von 14 fl.; um den 9. Theil von 14 fl. zu erhalten, so muß ich die 14 fl. durch 9 theilen. Ich setze daher die 9 als Divisor auf die linke Seite.

13 Ellen kosten 13mal so viel als 1 Elle; sie kosten also den 9. Theil von 14 fl. 13mal, oder den 9. Theil von 13 × 14 fl. Daher kommt 13 unter 14 fl.

Um den 9. Theil von 13 × 14 fl. zu erhalten, so muß ich die 14 fl. durch 13 multipliciren und das Ergebniß durch 9 theilen. 13 × 14 fl. = 182 fl.; 182 fl. durch 9 getheilt = 20 fl. 13 kr. $1\frac{1}{3}$ pf. So viel kosten die 13 Ellen.

Aufg. z. Zifferr., drittes Heft, 1. Uebung.

Die Aufeinanderfolge der einzelnen Schlüsse wird von uns immer, wie hier oben (9 Ellen, 1 Elle, 13 Ellen), durch kleine Schrift angedeutet. Anfangs notiren sich dieß auch die Schüler. Zu bestimmen, wie lange es ihnen zu gestatten sei, ist Sache des Lehrers. Doch können wir nicht umhin, zu bemerken, daß es in jedem Falle und zu aller

Zeit besser ist, einige Ziffern mehr, als einige weniger zu gebrauchen, wenn es eine größere Sicherheit in der Ausrechnung gewährt. Was man beim Rechnen will, das ist: das richtige Resultat und die sichere Ueberzeugung, daß das gefundene es sei. Einige Ziffern mehr oder weniger, ist Nebensache. Sowie es mit einer Schule, wo die Schüler weniger schnell, aber durchaus richtig rechnen, besser steht, als mit einer andern, wo sie vielleicht doppelt so schnell, dabei aber zur Hälfte falsch rechnen; so ist auch ein etwas weitläufigeres Verfahren, sofern es dazu beiträgt, Fehler zu vermeiden, besser, als ein kürzeres, wobei leicht Irrungen stattfinden. Das Bestreben, die Kürze auf Kosten der Deutlichkeit und Sicherheit zu fördern, ist eben darum verwerflich.

Beispiel 2. Ein Herr logirte in einem Gasthause und mußte für 24 Tage 58 fl. zahlen. Wie viel wird er für weitere 42 Tage zu entrichten haben?

24 Tg.		58 fl.	
42 Tg.		?	
24 Tg.		~~58~~	
1 „	~~24~~		
42 „		~~42~~	
	~~12~~	29	
	2	7	
	2	203	$101\frac{1}{2}$ fl.

Für 24 Tage zahlt man 58 fl.; für 42 Tage wie viel?

Ich gehe von 24 Tg. auf 1 Tg, und von 1 Tag auf 42 Tage.

Für 24 Tage zahlt man 58 fl.; für 1 Tag zahlt man den 24. Theil von 58 fl.; für 42 Tage zahlt man 42mal so viel, nämlich den 24. Theil von 58 fl. 42mal, oder den 24. Theil von 42 × 58 fl.

Ich muß daher 42 × 58 fl. rechnen und das Produkt durch 24 theilen. Die Zahl 24 ist also der Theiler, und die Zahlen 58 und 42 geben, miteinander multiplicirt, das was zu theilen ist; sie bilden die Faktoren des Dividenden.

Wir erinnern uns, daß es vortheilhaft ist, den Divisor und den Dividenden gegen einander zu heben. Und ein Blick auf die Zahlen zeigt, daß dieß hier geschehen kann. Wir heben zuerst 24 und 58 durch 2. In Folge dessen ist dann noch mit der Hälfte von 24, d. i. mit 12, in die Hälfte von 42 × 58 fl., nämlich in 42 × 29 fl. zu dividiren. Nun heben wir wieder 12 gegen 42 durch 6, und dividiren dann also noch mit dem sechsten Theil von 12, d. i. mit 2, in den sechsten Theil von 24 × 29 fl.. nämlich in 7 × 29 fl.; 7 × 29 fl. = 203 fl.; 203 fl. durch 2 getheilt = 101 fl. 30 kr. Also sind für weitere 42 Tage 101 fl. 30 kr. zu zahlen.

Da es vortheilhaft ist, beim schriftlichen Rechnen so viel als thunlich in allen Fällen ein gleiches Verfahren einzuhalten: so wird hier, wie überall, wo die gleichartigen Glieder ganze Zahlen sind, auf die Eins zurückgegangen. Dadurch ist es dem Rechner möglich, ohne langes Besinnen die Schlußkette zu vollenden. Ist dieß geschehen, dann werden Zähler und Nenner durch gegenseitiges Heben gleichmäßig verkleinert. Das gilt als Regel. Damit jedoch die fähigeren Schüler, welche mit der Berechnung vor den andern fertig werden, ihre übrige Zeit nützlich verwenden, so kann man ihnen hier und in ähnlichen Fällen gestatten, die Berechnung auf eine zweite Weise auszuführen und dabei

über das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gleichartig benannten Zahlen (hier über 6) zu schließen.

Aufg. z. Zifferr., 2. Uebung.

b. Mit Brüchen.

Vorbereitendes.

$3 \times \frac{1}{3} = 1$, $3 \times \frac{2}{3} = 2 \times 1$ oder 2; 1 ist also 3mal so viel als $\frac{1}{3}$, und 2 ist 3mal so viel als $\frac{2}{3}$.

$4 \times \frac{1}{4} = 1$, $4 \times \frac{3}{4} = 3 \times 1$ oder 3; 1 ist also 4mal so viel als $\frac{1}{4}$, und 3 ist 4mal so viel als $\frac{3}{4}$ rc.

$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$; setze ich für jedes 3tel ein Ganzes, für $\frac{2}{3}$ also 2 Ganze, so steht 3mal so viel. — $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7}$; setze ich für jedes 7tel 1 Ganzes, für $\frac{5}{7}$ also 5 Ganze, so steht 7mal so viel. — Setze ich für $\frac{7}{8}$ den Zähler 7 als ganze Zahl, so steht für jedes Achtel 1 Ganzes, mithin 8mal so viel u. s. w.

Beispiel 1. Ein gewisses Kapital wirft in $\frac{5}{8}$ Jahren 24 fl. Zinsen ab; wie viel in $3\frac{3}{8}$ Jahren?

Ansatz und Berechnung:

$\frac{5}{8}$ J.	24 fl.
$3\frac{3}{8}$ J.	?

$\frac{5}{8}$ J.		24 fl.	
$\frac{1}{8}$ „	5		
$\frac{27}{8}$ „		27	
		168	
		48	
	5	648	129 fl. 36 kr.

Denk- oder Sprechweise.

In $\frac{5}{8}$ Jahren macht der Zins 24 fl.; in $\frac{1}{8}$ J. macht er den 5. Theil so viel, also 24 fl., getheilt durch **5**; in $3\frac{3}{8}$ od. $\frac{27}{8}$ J. beträgt er 27mal so viel als in $\frac{1}{8}$ Jahr, d. i. **27** $\times$ 24 fl., getheilt durch 5.

Beispiel 2. $\frac{3}{4}$ Fdr. Wein kosten 132 fl.; wie viel 6 Fdr.?

Ansatz und Berechnung.

$\frac{3}{4}$ Fdr.	132 fl.
6 „	?

$\frac{3}{4}$ Fdr.		132 fl.
$\frac{1}{4}$ „	3	
1 „		4
6 „		6
	1	2
	1	1056 fl.

Denk- oder Sprechweise:

Ich gehe von $\frac{3}{4}$ Fdr. auf $\frac{1}{4}$ Fdr,
von $\frac{1}{4}$ „ „ 1 „ u.
von 1 „ „ 6 „

$\frac{3}{4}$ Fdr. kosten 132 fl., $\frac{1}{4}$ Fdr. kostet den 3. Theil; 1 Fdr. kostet dieß 4mal, und 6 Fdr. kosten dieß wieder 6mal.

Eine besondere Lösung ist hier, von $\frac{3}{4}$ Fdr. auf 3 ganze Fdr. und von 3 Fdr. auf 6 Fdr. zu gehen.

Beisp. 3. Um $^5/_6$ fl. erhalte ich 8 Loth Gewürz; was k. 13 Lth.?

Ansatz und Berechnung:

8 Lth.		$^5/_6$ fl.
13 „		?
8 Lth.		$^5/_6$ fl.
1 „	3	
13 „		13
	6	
	48	65

Die Schlußfolge ist bekannt. Bei der Ausrechnung selbst aber kommt zum ersten Mal ein Bruch vor, der Bruch $^5/_6$. Wir schaffen ihn weg und zwar dadurch, daß wir den Nenner 6 ausstreichen und den Zähler 5 als ganze Zahl gelten lassen. Hierdurch wird die Zahl sechsmal so groß. Denn setze ich für jedes Sechstel 1 **Ganzes**, für $^5/_6$ also 5 Ganze, so steht 6mal so viel. 13 × 5 ist also 6mal so viel, als 13 × $^5/_6$. Rechne ich daher 13 × 5 fl. und suche den 8. Theil davon, so erhalte ich das 6fache von dem, was eigentlich herauskommen soll. Mithin habe ich dann von dem 8tel wieder den 6. Theil zu nehmen. Der 6. Theil von $^1/_8$ ist $^1/_{48}$. Die 13 Loth kosten also $^1/_{48}$ von 13 × 5 fl. Diesen Theil erhalte ich auf einmal, wenn ich den Nenner 6 auf die andere Seite setze und dann sogleich durch 6 × 8 oder 48 theile.

Es ist hier also ganz so, wie bei der Division mit Brüchen. Man betrachtet oder setzt den Zähler als ganze Zahl und stellt das ursprüngliche Verhältniß zwischen Divisor und Dividend dadurch wieder her, daß man die Zahl auf der andern Seite mit dem Nenner multiplicirt. Sowie man den Divisor und den Dividenden gegenseitig heben kann, so kann man sie auch gegenseitig vervielfachen, ohne daß ihr Verhältniß sich ändert.

Beisp. 4. Ein Mahlgang mahlt in 15 Std. $2^1/_4$ Schff. Korn; wie viel in 24 Std.? Antwort: 3 Schff. $3^3/_5$ Mtz.

Ansatz und Berechnung.

15 St.		$2^1/_4$ Schff.
24 „		?
15 Std.		$2^1/_4$ Schff.
1 „	15	
24 „		24
	4	9
	5	3
	1	6
	5	18

Die Schlußfolge wie gewöhnlich. In 24 Std. mahlt der Gang 24 × $2^1/_4$ Schff., getheilt durch 15.

$2^1/_4$ = $^9/_4$. Statt $^9/_4$ setze ich 9 Ganze. Dadurch wird der Dividend 4mal so groß; also muß ich auch den Divisor 4mal so groß machen, und das geschieht, indem ich 4 als Faktor auf die linke Seite setze. Dann hebe ich 15 u. 9 durch 3, und 4 gegen 24 durch 4.

Beisp. 5. Von $4^1/_2$ Tagw. erntete man $13^3/_4$ Schober Getreide; wie viel von $^4/_5$ Tagw.? Antw. $2^4/_9$ Schober.

Ansatz und Ausrechnung:

a.

4½ Tgw. 13¾ Schock.
⅘ " ?

4½ Tgw.		13¾ Sch.
½ "	9	
1 "		2
⅕ "	5	
⅘ "		4
	4	55
	1	11
	9	22 = 2 4/9 Sch.

b.

4½ Tgw. 13¾ Schck.
⅘ " ?

4½ Tgw.		13¾
1 "	4½	
⅘ "		4,5
	9	2
	4	55
	5	4
	1	11
	9	22

Die Berechnung unter a ist an sich klar. Bei der unter b heißt es: 4½ Tagw. geben 13¾ Schober; 1 Tgw. gibt 13¾ Schober, getheilt durch 4½; ⅘ Tagw. geben dieß ⅘ mal. Das Weitere bedarf keiner Erklärung.

Aufg. zum Zifferr., 3. bis 5. Uebung.

c. Mit ungleichbenannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch kommen 24 Loth, wenn 7 Pfd. 23 fl. kosten? Antwort: 2 fl. 27 kr. 3 3/7 pf.

Ansatz und Berechnung:

7 Pfd. 23 fl.
24 Loth ?

7 Pfd.		23 fl.
1 "	7	
1 Loth.	32	
24 "		24
	4	3
	28	69

Ich gehe von 7 Pfd. auf 1 Pfd., von 1 Pfd. auf 1 Loth, und von 1 Loth auf 24 Loth.

7 Pfd. kosten 23 fl.; 1 Pfd. kostet 1/7 von 23 fl., oder 23 fl. getheilt durch 7; 1 Loth kostet wieder 1/32 davon, nämlich 23 fl. getheilt durch **32** × 7; und 24 Loth kosten 24mal so viel, also **24** × 23 fl. getheilt durch 32 × 7. — 32 und 24 werden durch 8 gehoben. Dann habe ich nur noch 3 × 23 oder 69 fl. durch 4 × 7 oder 28 zu theilen.

Beispiel 2. 3 Pfd. 8 Loth zu 2 fl. 40 kr.; wie hoch kommen 5 Ctr. 40 Pfd.? Antwort: 443 fl. 4 kr. 2 6/13 pf.

Vorarbeit:

a.

3 ℔ 8 Loth = 104 Lth.
2 fl. 40 kr. = 160 kr.
5 Ctr. 40 ℔ = 540 ℔

b.

3 ℔ 8 Loth = 3¼ ℔
2 fl. 40 kr. = 2⅔ fl.
5 Ctr. 40 ℔ = 5⅖ Ctr.

104 Loth	160 kr.
540 Pfd.	?

104 Loth		160 kr.
1 „	104	
1 Pfd.		32
540 „		540
durch 60		zu fl. gemacht.
	1	9
	13	4
	13	5760 fl.

$3\frac{1}{4}$ ℔	$2\frac{2}{3}$ fl.
$5\frac{2}{5}$ Ctr.	?

$3\frac{1}{4}$ Pfd.		$2\frac{2}{3}$ fl.
1 „	$3\frac{1}{4}$	
1 Ctr.		100
$5\frac{2}{5}$ „		$5\frac{2}{5}$

Verwandelt man 5 Ctr. 40 Pfd. in 540 Pfd., so wird dann von $3\frac{1}{4}$ Pfd. auf 1 Pfd. und von 1 Pfd. sogleich auf 540 Pfd. geschlossen.

Beispiel 3. 12 ℔ 16 Loth zu 20 fl.; wie hoch k. 3 Lth. 3 Qt.? Antwort: Auf 11 kr. 1 pf.

Ansatz und Ausrechnung.

$12\frac{1}{2}$ ℔	20 fl.
$3\frac{3}{4}$ Loth	?

$\frac{25}{2}$ Pfd.		20 fl.
$\frac{1}{2}$ „	25	
1 Loth	16	
$3\frac{3}{4}$ „		$3\frac{3}{4}$
		60

$3\frac{3}{4}$ Loth kosten $3\frac{3}{4} \times 20$ fl., getheilt durch 16×25. Da dieß voraussichtlich keinen ganzen Gulden gibt, so verwandeln wir die $3\frac{3}{4} \times 20$ fl. sogleich in Kreuzer. Wir setzen 60 als Faktor darunter. Dann richten wir die gemischte Zahl ein und heben, was gehoben werden kann.

Aufg. z. Zifferr., 6. bis 8. Uebung.

II. Der Zweisatz in Bruchform.

a. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Beispiel 1. Für 14 fl. erhält man 9 Ellen; wie viel wird man für 13 Ellen zahlen müssen?

Ansatz und Schlußfolge wie bei dem Zweisatz in Divisionsform.

Hauptrechnung. Nebenrechnung.

a. Ausführlich.

9 Ellen	14 fl.
13 „	?

9 Ellen k. 14 fl.

1 Elle k. $\frac{1}{9} \times 14$ fl. $= \frac{14}{9}$ fl.

13 Ellen k. $13 \times \frac{14}{9}$ fl. $= \frac{182}{9}$ fl.

$= 20$ fl. 13 kr. $1\frac{1}{3}$ pf.

Nebenrechnung:

14 fl.
13
42
14
9 | 182 | 20 fl.
2
60
9 | 120 | 13 kr.
30
3
4
9 | 12 | $1\frac{1}{3}$ pf.
3

b. Kürzer:

9 Ellen	14 fl.
13 Ellen	?
9 Ellen	14 fl.
1 Elle	$\frac{14}{9}$ fl.
13 Ellen	$\frac{13 \times 14}{9}$ fl.

c. Noch kürzer:

9 Ellen	14 fl.
13 Ellen	?
9 Ellen	$\frac{13 \times 14}{9}$ fl.
1 Elle	
13 "	

d. Kürzeste Form:

9 Ellen	14 fl.
13 Ellen	?
	$\frac{13 \times 14}{9}$ fl.

Die Denk= oder Sprechweise ist überall dieselbe. Eben so die Nebenrechnung. Die Abkürzung besteht darin, daß man beim Schließen von der Mehrheit auf die Einheit und von der Einheit auf die Mehrheit immer mehr nur das notirt, was zuletzt zur Ausrechnung nöthig ist. 9 Ellen kosten 14 fl., **14** fl. notirt; 1 Elle kostet $1/_9 \times 14$ oder $14/_9$ fl., **9** unter 14 notirt; und 13 Ellen kosten $13 \times 14/_9$ fl., **13** neben 14 notirt.

$13 \times 14/_9$ fl. $=$ 13 $\times$ 14 fl., getheilt durch 9; 13 $\times$ 14 fl. $=$ 182 fl.; der 9. Theil von 182 fl. $=$ 20 fl. 13 kr. $1\,1/_3$ pf.

Anm. Haben die Schüler die Aufg. II. Heft, Uebg. 88 u. 89 in der S. 221 ff. angegebenen Weise gerechnet; so werden sie alsbald erkennen, daß die vorstehende Berechnungsart nichts weiter ist, als die Fortsetzung und die abgekürzte Form derselben. Sie werden sich dann schon nach der Behandlung von wenigen Beispielen in die Form c. hineingefunden haben und sogleich frisch und fröhlich darauf fortarbeiten. Ist jenes nicht geschehen, so wird es entweder nachgeholt, oder man bleibt längere Zeit bei den ausführlicheren Formen stehen. Uebrigens glauben wir, auf das Seite 89 über das Lehrverfahren zum Zifferrechnen Gesagte hinweisen zu müssen.

Beispiel 2. Ein Herr logirte in einem Gasthofe und mußte für 24 Tage 58 fl. bezahlen. Wie viel wird er für weitere 42 Tg. zu entrichten haben?

Ansatz und Berechnung:

Allgemeine Weise:

24 Tg.	58 fl.
42 Tg.	?
24 Tg.	
1 "	
42 "	

$$\frac{\overset{7}{\cancel{42}} \times \overset{29}{\cancel{58}}}{\underset{2}{\underset{\cancel{4}}{\cancel{24}}}} = \frac{203}{2} = 101\,1/_2 \text{ fl.}$$

Besondere Weise:

24 Tg.	58 fl.
42 Tg.	?
24 Tg.	29
6 "	7×58
42 "	4
	2

Für 24 Tage zahlt man 58 fl., für 1 Tag $\frac{1}{24} \times 58$ fl. $= \frac{58}{24}$ fl., für 42 Tage $42 \times \frac{58}{24}$ fl. — Ist dem Schüler, wie wohl vorausgesetzt werden darf, das Heben der Faktoren des Zählers gegen die Faktoren des Nenners (S. 206) bekannt; so wird er von selbst daran denken, 24 gegen 42 durch 6, sowie 4 gegen 58 durch 2 zu kürzen. Dann steht noch 7×29 fl. getheilt durch 2. — Die fähigeren Schüler führen dieß mehr im Kopfe, die minderfähigen durch eine Nebenrechnung aus.

Aufg. z. Zifferr., drittes Heft, 1. und 2. Uebung.

b. Mit Brüchen.

Beispiel 1. Ein gewisses Kapital wirft in $\frac{5}{8}$ Jahren 24 fl. Zinsen ab; wie viel in $3\frac{3}{8}$ Jahren? Antwort $129\frac{3}{5}$ fl.

Ansatz- und Berechnung:

$\frac{5}{8}$ J. 24 fl.
$3\frac{3}{8}$ „ „

$\frac{5}{8}$ J.
$\frac{1}{8}$ „ $\frac{24 \times 27}{5} = 129\frac{3}{5}$ fl.
$\frac{27}{8}$ „

Denk- und Sprechweise:

In $\frac{5}{8}$ J. macht der Zins 24 fl.; in $\frac{1}{8}$ J. macht er den 5. Theil oder $\frac{1}{5}$mal so viel, nämlich $\frac{24}{5}$ fl.; in $3\frac{3}{8}$ oder $\frac{27}{8}$ J. beträgt er 27mal so viel $= 27 \times \frac{24}{5}$ fl. oder 24×27 fl., getheilt durch 5.

Beispiel 2. $\frac{3}{4}$ Fdr. Wein kosten 132 fl.; was k. 6 Fdr.?

Ansatz- und Berechnung.

$\frac{3}{4}$ Fdr. 132 fl.
6 „ ?

$\frac{3}{4}$ Fdr.
$\frac{1}{4}$ „ $\frac{132 \times 4 \times \not{6}^{\,2}}{\not{3}_{\,1}} = 1056$ fl.
1 „
6 „

Denk- und Sprechweise:

Ich gehe von $\frac{3}{4}$ Fdr. auf $\frac{1}{4}$ Fdr., dann auf 1 Fdr., dann auf 3 Fdr.
$\frac{3}{4}$ Fdr. kosten 132 fl.;
$\frac{1}{4}$ Fdr. kostet $\frac{1}{3}$mal so viel;
1 Fdr. kostet dieses 4mal, und
6 Fdr. kosten wieder 6mal so viel.

Beispiel 3. Um $\frac{5}{6}$ fl. erhalte ich 8 Loth Gewürz; wie hoch kommen 13 Loth? Antwort: Auf 1 fl. 21 kr 1 pf.

Ansatz- und Berechnung.

8 Lth. $\frac{5}{6}$ fl.
13 „ ?

8
1 $\frac{5 \times 13}{6 \times 8}$
13

Denk- oder Sprechweise:

8 Loth kosten $\frac{5}{6}$ fl.; 1 Loth kostet $\frac{1}{8}$mal so viel, also $\frac{1}{8} \times \frac{5}{6}$ fl. Wie rechne ich dieß? Ich multiplicire den Nenner 6 durch 8. 13 Loth kosten das, was 1 Loth kostet, 13mal. Sie kosten also 13×5 oder 5×13 fl., getheilt durch 8×6 oder 6×8.

Beispiel 4. Ein Mahlgang mahlt in 15 Std. $2\frac{1}{4}$ Schff. Korn; wie viel in 24 Std.? Antwort: 3 Schff. $3\frac{3}{5}$ Mtz.

Ansatz- und Berechnung:

15 Std. $2\frac{1}{4}$ Schff.
24 „ ?

15
1 $\frac{\not{9}^{\,3} \times \not{24}^{\,6}}{\not{4}_{\,1} \times \not{15}_{\,5}} = \frac{18}{5}$
24

Denk- oder Sprechweise:

In 15 Std. mahlt der Gang $2\frac{1}{4}$ oder $\frac{9}{4}$ Schff., in 1 Std. $\frac{1}{15} \times \frac{9}{4}$ Schff., in 24 Std. 24mal so viel, also 24×9 oder 9×24 Schff., getheilt durch 4×15.

Beispiel 5. Von $4\frac{1}{2}$ Tgw. erntete man $13\frac{3}{4}$ Schober Getreid; wie viel von $1\frac{4}{5}$ Tgw.? Antwort: $5\frac{1}{2}$ Schober.

Ansatz- und Berechnung.

$4\frac{1}{2}$ Tgw. — $13\frac{3}{4}$ Schbr.
$1\frac{4}{5}$ „ — ?

$\frac{9}{2}$ Tgw.
$\frac{1}{2}$ „
1 „
$\frac{9}{5}$ „

$$\frac{\overset{11}{\cancel{55}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times \cancel{9}}{\cancel{4} \times \cancel{9} \times \cancel{5}} = \frac{11}{2}$$
(4 gekürzt zu 2, 5 zu 1)

Denk- oder Sprechweise:

$4\frac{1}{2}$ Tgw. = $\frac{9}{2}$ Tgw., und $13\frac{3}{4}$ Schober = $\frac{55}{4}$ Schober.

$\frac{9}{2}$ Tgw. geben $\frac{55}{4}$ Schober;
$\frac{1}{2}$ Tgw. gibt $\frac{1}{9}$mal so viel,
1 Tgw. gibt das 2mal, und
$1\frac{4}{5}$ od. $\frac{9}{5}$ Tgw. geben wieder $\frac{9}{5}$mal so viel.

Eine von der gewöhnlichen Schußfolge abweichende, besondere Weise ist hier die, von $\frac{9}{2}$ Tgw. auf 9 Tgw. und von 9 Tgw. auf $\frac{9}{5}$ Tgw. zu gehen.

Aufg. z. Zifferr., 3. bis 5. Uebung.

c. Mit ungleichbenannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch kommen 24 Loth, wenn 7 Pfd. 23 fl. kosten?

Ansatz und Berechnung.

a.

7 Pfd. — 23 fl.
24 Loth — ?

7 Pfd.
1 „
1 Loth
24 „

$$\frac{23 \times \overset{3}{\cancel{24}}}{7 \times \underset{4}{\cancel{32}}} = \frac{69}{28} \text{ fl.}$$

b.

7 Pfd. — 23 fl.
$\frac{3}{4}$ „ — ?

7 Pfd.
1 „
$\frac{3}{4}$ Loth

$$\frac{23 \times 3}{7 \times 4}$$

Denk- und Sprechweise.

Ich gehe von 7 Pfd. auf 1 Pfd., von 1 Pfd. auf 1 Loth und von 1 Loth auf 24 Loth.

7 Pfd. kosten 23 fl.; 1 Pfd. kostet $\frac{1}{7}$ mal 23 fl. oder $\frac{23}{7}$ fl.; 1 Loth kostet wieder $\frac{1}{32}$mal so viel, und 24 Loth kosten dieses 24mal.

Ich gehe von 7 Pfd. auf 1 Pfd. und von 1 Pfd. auf $\frac{3}{4}$ Pfd.

7 Pfd. kosten 23 fl.; 1 Pfd. kostet $\frac{1}{7}$ mal 23 fl. oder $\frac{23}{7}$ fl., und $\frac{3}{4}$ Pfd kosten $\frac{3}{4}$mal so viel, also $\frac{3}{4} \times \frac{23}{7}$ fl. oder $\frac{23}{7} \times \frac{3}{4}$ fl.

Facit: 2 fl. 27 kr. $3\frac{3}{7}$ pf.

Beispiel 2. 3 Pfd. 8 Lth. zu 2 fl. 40 kr.; wie hoch kommen 5 Ctr. 40 Pfd.? Antwort: 443 fl. 4 kr. $2\frac{6}{13}$ pf.

Vorarbeit.

a.

3 Pfd. 8 Loth = 104 Loth.
2 fl. 40 kr. = 160 kr.
5 Ctr. 40 Pfd. = 540 Pfd.

b.

3 Pfd. 8 Loth = $3\frac{1}{4}$ Pfd.
2 fl. 40 kr. = $2\frac{2}{3}$ fl.
5 Ctr. 40 Pfd. = 540 Pfd.

Hauptrechnung.

a.		b.	
104 Lth.	160 kr.	$3\frac{1}{4}$ Pfd.	$2\frac{2}{3}$ fl.
540 Pfd.	?	540 Pfd.	?

a.		b.	
104 Lth.	4 9	$3\frac{1}{4}$ Pfd.	180
1 "	$\frac{160 \times 32 \times 540}{104 \times 60}$ kr.	$\frac{1}{4}$ "	$\frac{8 \times 4 \times 540}{3 \times 13}$
1 Pfd.		1 "	
540 "	13 1	540 "	1

Bei der Berechnung unter a ergeben sich 540 × 32 × 160 kr., getheilt durch 104. Wir können uns denken, daß dieß Gulden gibt, daß wir also, wenn durch 104 dividirt ist, auch noch durch 60 werden dividiren müssen. Dieß nochmalige Dividiren durch 60 können wir uns ersparen. Wir setzen 60 als Faktor zum Nenner und dividiren mit 104 × 60. So erhalten wir das Facit sogleich in Gulden. Zuvor aber heben wir, was zu heben ist.

Beispiel 3. 12 Pfd. 16 Lth. zu 20 fl.; wie hoch kommen 3 Lth. 3 Qt.?

$12\frac{1}{2}$ Pfd.	20 fl.
$3\frac{3}{4}$ Loth	?

$\frac{25}{2}$ Pfd.	$\frac{20 \times 15 \times 60}{25 \times 16 \times 4}$ kr.
$\frac{1}{2}$ "	
1 Loth	
$\frac{1}{4}$ "	$= \frac{45}{4}$ kr. $= 11\frac{1}{4}$ kr.
$\frac{15}{4}$ "	

Hier ist der umgekehrte Fall. 15×20 fl. getheilt durch 4 × 16 × 25, gibt, wie leicht einzusehen ist, keinen ganzen Gulden. Wir verwandeln daher die 15 × 20 fl., indem wir 60 als Faktor hinzusetzen, sogleich in Kreuzer, heben dann, was sich heben läßt, und erhalten auf diese Weise das Ergebniß sogleich in Kreuzern.

Aufg. z. Zifferr., 6. bis 8. Uebung.

III. Die Proportions-Rechnung.

1. Mit unbenannten Zahlen.

a. 5 : 10 7 : 14

Wie verhält sich 5 zu 10? Und wie verhält sich 7 zu 14? 5 verhält sich zu 10, wie 1 : 2, und 7 verhält sich zu 14, wie 1 : 2; 10 ist das 2fache von 5, und 14 ist das 2fache von 7. Die zwei Zahlenpaare bilden daher zwei gleiche Verhältnisse. Darum können wir sie durch das Zeichen der Gleichheit verbinden, und so mit einander verbunden, bilden sie eine Proportion. Steht:

5 : 10 = 7 : 14.

Wie viele Verhältnisse gehören demnach zu einer Proportion? Und was für Verhältnisse? — Wie viel Glieder hat ein Verhältniß? Wie viel Glieder hat eine Proportion? Welche von den vorstehenden Zahlen bildet das erste Glied der Proportion? Welche das zweite? das dritte? das vierte?

Die zwei Verhältnisse sind einander gleich, weil 5 in 10 so oft enthalten ist, als 7 in 14. Die vier Zahlen bilden daher eine Proportion, weil die erste Zahl eben so oft in der zweiten liegt,

als die dritte in der vierten. Woran kann man also erkennen, ob vier Zahlen eine Proportion bilden?

In dem Verhältniß 5 : 10 ist das zweite Glied größer, als das erste; eben so in dem Verhältniß 7 : 14. Beide sind daher steigend, zunehmend oder wachsend. Stellen wir die Glieder derselben um,

$$10 : 5 = 14 : 7$$

so erhalten wir zwei fallende Verhältnisse. Und da 10 in 5 eben so oft enthalten ist, wie 14 in 7, nämlich $^1/_2$mal; so sind die zwei Verhältnisse auch jetzt wieder einander gleich. Es gibt also Proportionen mit steigenden Verhältnissen, und Proportionen mit fallenden Verhältnissen.

Untersucht, ob folgende Verhältnißpaare Proportionen bilden, oder nicht:

14 : 28	12 : 6	8 : 16	5 : 15
16 : 4	7 : 28	12 : 9	18 : 12.

Wenn zwei Verhältnisse eine Proportion bilden sollen, so müssen beide steigend, oder beide fallend sein. Noch mehr: sie müssen beide in gleichem Grade steigen, oder in gleichem Grade fallen. — Schreibt 6 steigende und 6 fallende Proportionen auf!

b. $$2 : 6 = 11 : x.$$

Der Buchstabe x steht für das unbekannte vierte Glied, das gesucht werden soll. Wie finden wir es?

2 ist in 6 dreimal enthalten; mithin ist 6 dreimal so groß als 2. Eben so vielmal so groß muß x sein, als 11; folglich ist $x = 3 \times 11$ oder 33. Die vollständige Proportion heißt also

$$2 : 6 = 11 : 33.$$

So wird auch das 4. Glied nachstehender Proportionen gesucht:

$3 : 15 = 2 : x$	$^3/_7 : {^6/_7} = 14 : x$
$7 : 28 = 5 : x$	$12^1/_2 : 2^1/_2 = 50 : x$
$12 : 8 = 20 : x$	$^2/_3 : 4 = {^3/_4} : x$
$4 : 3 = 24 : x$	$^9/_{12} : {^9/_{20}} = {^4/_5} : x.$

c. $$3 : 6 = 5 : 10.$$

3 ist in 6, wie 5 in 10, 2mal enthalten. Die 4 Zahlen bilden also eine Proportion. Multiplicire die äußeren Glieder 3 und 10, und dann die innern Glieder 6 und 5 mit einander, und vergleiche die beiden Produkte! ($3 \times 10 = 30$, und $6 \times 5 = 30$.)

Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Dieß steht mit dem, daß 3 in 6 so oft enthalten ist, als 5 in 10, im engsten Zusammenhang. Da 3 in 6 2mal enthalten ist, so ist $6 = 2 \times 3$; und da 5 in 10 2mal enthalten ist, so ist $10 = 2 \times 5$; ist aber $6 = 2 \times 3$ und $10 = 2 \times 5$, so ist auch

$$3 \times 10 = 3 \times (2 \times 5),\ \text{und}\ 6 \times 5 = (2 \times 3) \times 5.$$

Nun ist $3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5$; also ist auch $3 \times 10 = 6 \times 5$.

Anschaulicher: 3 : 6 = 5 : 10
3 : 2.3 = 5 : 2.5

Da nun bei jeder Proportion das erste Glied so oft im zweiten enthalten ist, als das dritte in dem vierten; so ist auch bei jeder Proportion das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkt der innern. Und dieß gibt uns ein Mittel an die Hand, das fehlende vierte Glied einer Proportion noch auf eine zweite Weise zu finden.

d. 2 : 6 = 11 : x.

$2 \times x = 6 \times 11$; $6 \times 11 = 66$; also ist auch $2 \times x = 66$; ist aber 2 mal $x = 66$, so ist 1 mal x oder $x = 66$ getheilt durch $2 = 33$; also

2 : 6 = 11 : 33.

Hiernach wird das unbekannte 4. Glied einer Proportion gefunden, wenn man die innern Glieder miteinander multiplicirt und das Produkt durch das erste Glied dividirt.

Nun lasse man auch nach dieser Regel das 4. Glied der (auf voriger Seite) gegebenen Proportionen suchen.

Anm. Nicht nur das vierte, sondern auch jedes andere Glied einer Proportion kann durch x bezeichnet und aus den drei gegebenen Gliedern berechnet werden. Dieß thun zu lassen, ist nützlich, nothwendig ist es nicht. Darum sei es dem Lehrer anheim gestellt.

2. Angewandt auf Regeldetri-Aufgaben.

a. Mit gleichbenannten ganzen Zahlen.

Das Erste und Wichtigste ist die Bildung des Ansatzes. Hierbei gehe man so zu Werke, daß die Schüler sich gleich von vorne herein gewöhnen, das erste Verhältniß nicht eher zu setzen, bis sie durch besonnene Betrachtung der Aufgabe deutlich erkannt haben, ob dasselbe steigend oder fallend sein müsse. „Muß mehr oder weniger herauskommen, als das dritte Glied beträgt? Verlangt die Aufgabe eine zunehmende oder eine abnehmende Proportion?“ sind die Fragen, die bei jeder Aufgabe gestellt und beantwortet werden müssen, bevor zum Ansetzen der Glieder des ersten Verhältnisses übergegangen werden darf.

Beispiel 1. 5 Ellen kosten 4 fl.; wie viel werden 8 Ellen kosten?

Fertigung des Ansatzes.

Was soll hier berechnet werden? (Wie viel 8 E. kosten.) Da wir die Anzahl Gulden, welche die 8 Ellen kosten, noch nicht kennen, so bezeichnen wir sie vorläufig durch den Buchstaben x.

. . . x fl.

Das ist das vierte Glied. Das vierte Glied bildet mit dem dritten das zweite Verhältniß der Proportion. In einem Verhältnisse können nur gleichartige Größen stehen. Welche von den 3 gegebenen Zahlen wird daher in die dritte Stelle kommen müssen? (4 fl.)

. . 4 fl. : x fl.

Welche Zahlen bilden nun das *erste* Verhältniß? (5 Ellen und 12 Ellen.) Wie müssen wir aber das Verhältniß bilden: zunehmend 5 : 8, oder abnehmend 8 : 5? 4 fl. sind der Preis für 5 Ellen; 8 Ellen kosten mehr. Soll das vierte Glied größer werden, als das dritte, so muß auch das 2. Glied größer sein, als das erste. Die Proportion muß *zunehmend* sein. Wir müssen daher setzen:

5 Ellen : 8 Ellen = 4 fl. : x fl.

Ausrechnung.

a. 5 Ellen kosten 4 fl.; 2 × 5 Ellen kosten 2 × 4 fl.; 3 × 5 Ellen kosten 3 × 4 fl. u. s. f. Wie vielmal 5 Ellen sind die zu berechnenden 8 Ellen? 5 Ellen sind in 1 Elle $\frac{1}{5}$ mal, in 8 Ellen $\frac{8}{5}$ mal enthalten. 8 Ellen sind also $\frac{8}{5}$ × 5 Ellen; folglich kosten sie auch $\frac{8}{5}$ × 4 fl. Wie rechnest du das? Antwort: Ich rechne 8 × 4 fl. und theile das Produkt durch 5.

5 Ell. : 8 Ell. = 4 fl. : x
8
5 | 32 | 6 fl.
30
2
60
5 | 120 kr. | 24 kr.
10
20
20

b. *Das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem der innern.* Da 4 *Gulden* durch 8 *Ellen* nicht multiplicirt werden können, so denke ich mir das erste Verhältniß als ein Verhältniß in *unbenannten* Zahlen, nämlich so:

5 : 8 = 4 fl. : x
8
5 | 32 | $6\frac{2}{5}$ fl.

5 x = 8 × 4 fl.; also ist x = 8 × 4 fl., getheilt durch 5; 8 × 4 fl. = 32 fl.; 32 fl. durch 5 getheilt = $6\frac{2}{5}$ fl. = 6 fl. 24 kr.

So ausführlich wird zuerst jede Aufgabe behandelt.

Aufg. z. Zifferr., drittes Heft, 1. Uebung.

Hiermit ist der Schüler in die angewandte Proportions-Rechnung eingeführt. Er kennt den Ansatz und die Ausrechnung, welche in allen Fällen darin besteht, *daß man das dritte Glied durch das zweite multiplicirt und das Produkt durch das erste Glied dividirt.* Das Verfahren, den Ansatz zu fertigen, wird jetzt freier und einfacher. Es wird nicht eher Etwas notirt, als bis die Aufgabe vollständig beurtheilt und den Zahlen ihre Stelle in der Proportion angewiesen ist.

Der Schüler hat das Aufgabenheft in der Hand und liest die

betreffende Aufgabe (jetzt nochmal mit Nr. 1 der ersten Uebung beginnend) laut vor.

Für 12 Thlr. erhält man 43 ℔ Flachs; wie viel für 17 Thlr.? Dann fährt er fort: Hiernach ist zu suchen, wie viel Pfd. Flachs man für 17 Thlr. bekommt, und gegeben ist, wie viel man für 12 Thlr. erhält? (Jetzt haben wir die beiden Zahlen, welche das erste Verhältniß bilden, 17 Thlr. und 12 Thlr. Es ist nun noch zu bestimmen, ob das Verhältniß steigend oder fallend sein muß. Darum heißt es weiter:) Für 12 Thlr. erhält man 43 Pfd.; für 17 Thlr. erhält man **mehr;** die Thaler müssen daher in einem **steigenden** Verhältniß stehen. Ich setze also: 12 Thlr. verhalten sich zu 17 Thlr., wie 43 Pfd. zu x. Steht mit Ausrechnung:

```
12 : 17 = 43 ℔ : x
          17
         ----
         301
          43
        -----
   12 | 731 | 60 ℔
         72
         --
          11
          32
          --
          22
          33
        -----
   12 | 352 Lth. | 29 1/3 Lth.
         24
         ---
         112
         108
         ---
           4
```

a. Für 12 Thlr. 43 Pfd., für 2 × 12 Thlr. 2 × 43 Pfd., für 3 × 12 Thlr. 3 × 43 Pfd.; 12 Thlr. sind in 1 Thlr. $^1/_{12}$mal, in 17 Thlr. $^{17}/_{12}$mal enthalten; 17 Thlr. sind also $^{17}/_{12}$ × 12 Thlr; folglich erhalte ich dafür auch $^{17}/_{12}$ × 43 Pfd. = 17 × 43 Pfd., getheilt durch 12.

b. 12 x = 17 × 43 Thlr.; x = 17 × 43 Thlr., getheilt durch 12.

Sind die Aufgaben der ersten Uebung im Heftchen nochmal so durchgenommen, dann kommen Fälle, wo das Heben stattfinden kann.

Beispiel: Für 72 Tg. zahlt man 58 fl. Kostgeld; wie viel für 42 Tage?

Hiernach ist zu suchen, wie viel Kostgeld für **42 Tage** gezahlt werden muß, und gegeben ist, wie viel Kostgeld für **72 Tage** gezahlt wird. Für 72 Tage werden 58 fl. gezahlt; für 42 Tage ist **nicht so viel** zu zahlen. Die Verhältnisse müssen demnach **fallend** sein. Ich setze daher: 72 Tg. verhalten sich zu 42 Tg., wie 58 fl. zu x. Steht:

```
72 : 42 = 58 fl. : x
--------------------
12 :  7 = 58 fl. : x
--------------------
 6 :  7 = 29 fl. : x
            7
      6 | 203 | 33 fl. 50 kr.
```

x = 42 × 58 fl., getheilt durch 72. Die beiden inneren Glieder mit einander multiplicirt, geben die Zahl, welche durch das erste

Glied zu theilen ist; sie bilden also die Faktoren des Dividenden. Der Quotient ist aber derselbe, ob man mit dem Ganzen in das Ganze dividirt, oder mit der Hälfte in die Hälfte, oder mit dem Drittel in das Drittel u. s. f. Daher kann das erste Glied gegen jedes beliebige innere Glied gehoben werden. — Hier wurde 72 gegen 42 durch 6, dann 12 gegen 58 durch 2 gehoben.

$$x = 42 \times 58 \text{ fl., getheilt durch } 72,$$

$$= \frac{42 \times 58}{72} = \frac{7 \times 58}{12} = \frac{7 \times 29}{6} = \frac{203}{6} = 33^5/_6 \text{ fl.}$$

Aufg. z. Zifferr., 2. Uebung.

b. Mit Brüchen.

Die Brüche in der Proportion werden weggeschafft und zwar dadurch, daß man ihre Zähler als ganze Zahlen setzt. Welche Veränderung sie dadurch erleiden, zeigt das „Vorbereitende" auf Seite 243, das auch hier am Platze ist. Setzt man nämlich für einen Bruch dessen Zähler als ganze Zahl, so wird er auf das Sovielfache erhoben, als sein Nenner anzeigt. Setze ich z. B. für $^2/_3$ die Zahl 2, so steht das 3fache von $^2/_3$, und setze ich für $^3/_4$ die Zahl 3, so steht das 4fache von $^3/_4$.

Wird nun auf diese Weise das erste Glied einer Proportion vervielfacht, so muß zugleich auch eines der innern Glieder durch dieselbe Zahl vervielfacht werden, und umgekehrt. Der Quotient bleibt nur dann unverändert, wenn Divisor und Dividend zugleich und auf gleiche Weise, wie gehoben oder verkleinert, so auch vervielfacht oder vergrößert werden.

Beisp. 1. Ein Kapital wirft in $^5/_8$ Jahren 24 fl. Zinsen ab; wie viel in $3^3/_8$ Jahren? Antwort: 129 fl. 36 kr.

$$^5/_8 : 3^3/_8 = 24 \text{ fl.} : x$$

$$5 : 27 = 24 \text{ fl.} : x$$

$$x = 3^3/_8 \times 24 \text{ fl., dividirt durch } ^5/_8.$$

$3^3/_8 = {}^{27}/_8$. Anstatt $^{27}/_8$ setze ich 27. Hierdurch wird der Dividend 8mal so groß; denn 27×24 ist das 8fache von $^{27}/_8 \times 24$. Das ursprüngliche Verhältniß zwischen Divisor und Dividend wird aber einfach dadurch wieder hergestellt, daß ich auch für den Bruch $^5/_8$ dessen 8faches, nämlich 5 Ganze setze. $^5/_8$ verhalten sich zu $^{27}/_8$, wie 5 zu 27. Divisor und Dividend sind jetzt zugleich auf ihr 8faches erhoben. Die Proportion heißt nun: 5 verhält sich zu 27, wie 24 fl. zu x; $x = 27 \times 24$ fl., getheilt durch 5.

Beispiel 2. $^3/_4$ Pfd. Seide kosten 7 fl.; wie viel ist für 5 Pfd. zu zahlen? Antwort: 46 fl. 40 kr.

Ansatz und Berechnung:

$$^3/_4 \text{ Pfd.} : 5 \text{ Pfd.} = 7 \text{ fl.} : x \quad (x = 5 \cdot 7 \text{ div. durch } ^3/_4.)$$

$$3 : 20 = 7 \text{ fl.} : x.$$

Für $^3/_4$ setze ich 3; 3 ist aber 4mal so viel als $^3/_4$. Deßhalb setze ich auch für 5 das 4fache, nämlich 4×5 oder 20. Divisor und Dividend sind jetzt zugleich 4mal so groß. Wir dividiren jetzt mit dem 4fachen des gegebenen Divisors in das 4fache des gegebenen Dividenden. 5×7, getheilt durch $^3/_4 = 20 \times 7$, getheilt durch 3.

Beisp. 3. 4 Ell. Leinwand zu 15 fl.; was kosten $^7/_8$ Ellen? Antwort: 3 fl. 16 kr. $3^1/_2$ pf.

4 Ell. : $^7/_8$ Ell. = 15 fl. : x (x = $^7/_8$. 15 fl., div. d. 4)

32 : 7 = 15 fl. : x

Für $^7/_8$ setze ich 7. Der eine Faktor des Dividenden ist jetzt 8mal so groß und in Folge dessen der Dividend selbst; denn 7×15 fl. ist 8mal so viel, als $^7/_8 \times 15$ fl. Was muß ich nun thun, damit sich gleichwohl das richtige Facit ergibt? Ich muß auch das erste Glied, den Divisor 4, auf das 8fache erheben, statt 4 also 8×4 oder 32 setzen. $^7/_8 \times 15$ fl., getheilt durch $4 = 7 \times 15$ fl., getheilt durch 32.

Beisp. 4. Um $^5/_6$ fl. erhalte ich 8 Loth; was kosten 13 Lth.? Antwort: 1 fl. 21 kr. 1 pf.

8 Loth : 13 Loth = $^5/_6$ fl. : x (x = 13 . $^5/_6$ fl., div. d. 8.)

48 : 13 = 5 fl. : x (x = 13 . 5 fl., div. d. 48.)

Beisp. 5. $4^1/_3$ Ell. kosten 12 fl.; wie hoch kommen $7^3/_5$ Ellen zu stehen? Antwort: 21 fl. 2 kr. $3^1/_{13}$ pf.

a.	$4^1/_3$ Ell. :	$7^3/_5$ Ell. =	12 fl. : x
b.	13	3	12 fl.
c.	5	38	
	65 :	114 =	12 fl. : x

a. x = $7^3/_5 \times 12$ fl., getheilt durch $4^1/_3$.

b. $4^1/_3 = {}^{13}/_3$. Für $^{13}/_3$ setze ich 13 Ganze. Hierdurch wird der Divisor 3mal so groß. Mithin muß ich auch den Dividenden auf das 3fache erheben, und dieß geschieht, indem ich 3 als Faktor auf dessen Seite setze.

c. $7^3/_5 = {}^{38}/_5$. Statt $^{38}/_5$ setze ich 38 Ganze. Hierdurch wird ein Faktor des Dividenden und also dieser selbst 5mal so groß. Folglich muß ich auch den Divisor auf das 5fache erheben, und dies geschieht, indem ich 5 auf seine Seite setze.

Divisor und Dividend sind nun zugleich 3×5 oder 15mal so groß als zuerst. Die Proportion heißt jetzt: 5×13 oder 65 verhält sich zu 38×3 oder 114, wie 12 fl. zu x. Mithin ist x = 114×12 fl., getheilt durch 65.

Beispiel 6. Für 2 Ctr. zahle ich $8^3/_5$ Thlr. Frachtgeld; wie viel für $^3/_4$ Ctr.? Antwort: 3 Thlr. 6 Gr. 9 Pfg.

2 Ctr. :	$^3/_4$ Ctr.	=	$8^3/_5$ Thlr. : x
2	3		43
4			
5			
40	: 3	=	43 Thlr. : x

2 ist der Divisor; $^3/_4$ und $8^3/_5$ sind die Faktoren des Dividenden. 2 kommt unverändert herunter. — Statt $^3/_4$ setze ich 3; hierdurch wird der eine Faktor des Dividenden und also dieser selbst 4mal so groß; daher mache ich auch den Divisor 4mal so groß; ich setze 4 auf seine Seite. — $8^3/_5 = {}^{43}/_5$. Statt $^{43}/_5$ setze ich 43; hierdurch wird der andere Faktor des Dividenden und also dieser selbst wieder 5mal so groß. Um dies auszugleichen, so setze ich auch 5 als Faktor zum Divisor. — Divisor und Dividend sind jetzt zugleich 5 $\times$ 4mal oder 20mal so groß als ursprünglich. Die Proportion heißt nun: 5 $\times$ 4 $\times$ 2 oder 40 verhält sich zu 3, wie 43 Thlr. zu x.

Beisp. 7. Wie viel kosten $^7/_8$ Pfd., wenn $3^1/_4$ Pfd. auf $15^2/_5$ fl. kommen? Antwort: 4 fl. 8 kr. $3^1/_{13}$ pf.

$3^1/_4$ ℔ :	$^7/_8$ ℔	=	$15^2/_5$ fl. : x
13	4		77
8	7		
5			
2			
130	: 7	=	77 fl. : x

Aufg. z. Zifferr., 3. bis 5. Uebung.

c. Mit ungleich benannten Zahlen.

Beispiel 1. Wie hoch kommen 15 Ctr. Kaffee, wenn 75 Pfd. 36 fl. kosten? Antwort: 720 fl.

Zu berechnen ist, wie hoch 15 Ctr. Kaffee kommen; gegeben ist, wie viel 75 Pfd. kosten; 15 Ctr. kosten mehr als 75 Pfd.; 15 Ctr. und 75 Pfd. müssen daher in einem steigenden Verhältniß stehen. Das erste Verhältniß ist also 75 Pfd. : 15 Ctr. Um aber erkennen zu können, in welchem Verhältnisse 75 Pfd. zu 15 Ctr. stehen, so müssen beide Größen, die zwar gleichartig, aber nicht gleichnamig sind, in gleichbenannte verwandelt werden. Und es geschieht, indem man a. die 15 Ctr. in Pfd, oder b. die 75 Pfd. in Centnertheile verwandelt.

a.

75 ℔ :	1500 ℔	=	36 fl. : x
3	60		
1	20		
1 :	20	=	36 fl : x

b.

$^3/_4$ Ctr. :	15 Ct.	=	36 fl. : x
3	60	=	36 fl. : x
1	20		
1	: 20	=	36 fl. : x

Beispiel 2. In einer Fabrik wurden in 14 Wch. und 4 Tg. 1 Ctr. 43 Pfd. Oel verbraucht; wie viel in 5 Wch. 3 Tg.? Antwort: $53^5/_8$ Pfd.

a.

14 Wch. 4 Tg.	:	5 Wch. 3 Tg.	=	1 Ctr. 43 ℔	:	x
6		6		100		
88 Tg.	:	33 Tg.	=	143 ℔	:	x
8		3				
8	:	3	=	143 ℔	:	x

b.

$14\frac{2}{3}$ Wch.	:	$5\frac{1}{2}$ Wch.	=	143 ℔	:	x
44		3		143		
2		11				
4		1				
8	:	3	=	143 ℔	:	x

Aufg. z. Zifferr., 6. bis 8. Uebung.

Wir haben nun für die schriftliche Berechnung der Regeldetri- oder Verhältnißaufgaben dreierlei Formen gegeben: den Zweisatz in Divisionsform, den Zweisatz in Bruchform und die Proportion. Es versteht sich von selbst, daß damit nicht gemeint ist, als sollten alle 3 Formen nach einander auch in der Schule behandelt werden. Wir rathen vielmehr, bei einer Form zu bleiben, hierin aber eine auf Selbstbewußtsein und Selbstthätigkeit beruhende und darum sichere Fertigkeit zu erstreben. Eine zweckmäßige Rechnungsform hat einen großen Werth. Man glaube aber ja nicht, mit Einführung derselben schon alles gethan zu haben. Nicht die Form ist die Hauptsache. Wichtiger ist das Verständniß des innern Wesens, der klare Durchblick der Beziehungen, die verständige Beurtheilung der Aufgaben. Wo man diesen Punkt mit Liebe und Geschick recht in's Auge faßt, da wird mit einer unvollkommneren Form mehr geleistet, als anderwärts, wo man sich einer besseren Form bedient, diese aber über das Wesen setzt und die gründliche Beurtheilung der Aufgaben außer Augen läßt.

Daß die Lehre von der Proportion nicht ausführlicher behandelt wurde, wie vielleicht von Manchem gewünscht werden möchte, hatte seinen Grund: wir mußten uns auf den dafür verwendeten Raum beschränken.

Bei den nun folgenden Aufgaben wird diejenige Rechnungsform angewendet, die man mit den Schülern eingeübt hat, also entweder der Zweisatz in der einen oder in der andern Form, oder die Proportion.

---

6. Aufgaben mit einfachen umgekehrten Verhältnissen.

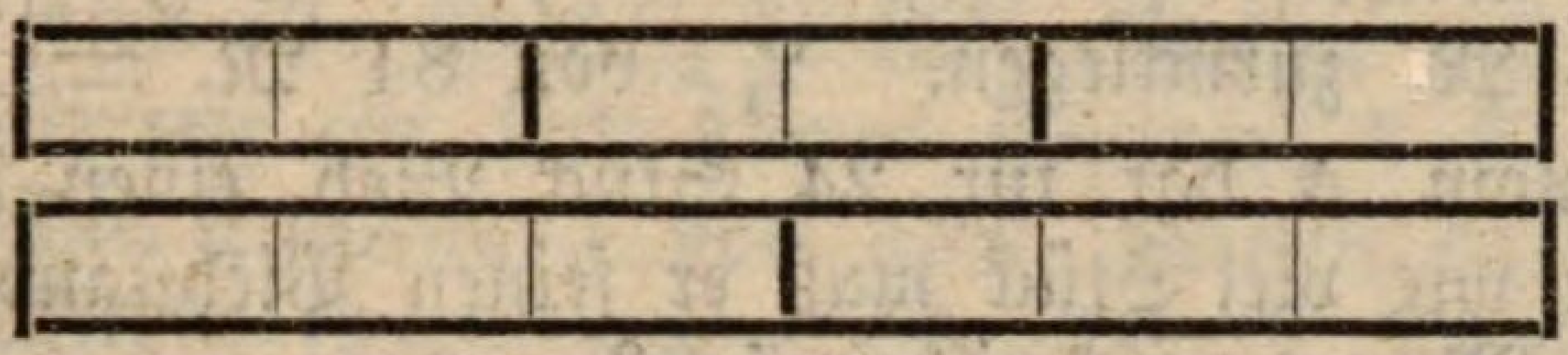
A. Mündlich.

1) 3 Taglöhner fertigen einen Graben in zwei Tagen; wie lange brauchen 2 dazu?

Aufl. Die 3 Taglöhner treten an die Arbeit. Um sicher zu wissen, wie viel davon auf jeden von ihnen kommt, so theilen sie dieselbe in 3 gleiche Theile, und um zu wissen, wie viel der Mann in 1 Tag zu machen hat, so theilt jeder sein Stück wieder in 2 gleiche Theile. Die ganze Arbeit ist sonach in 3×2 oder 6 Theile getheilt. Jeder Theil ist das Tagewerk für 1 Mann. 1 Mann würde also zur ganzen Arbeit 6 Tage brauchen. Wird sie von 2 Taglöhnern ausgeführt, so kommt auf jeden die Hälfte von den 6 Theilen, nämlich 3. Also bringen 2 Taglöhner den Graben in der Hälfte von 6 Tg. d. i. in 3 Tg. fertig.

3 Taglöhner … 2 Tage.

2 Taglöhner … 3 Tage.



2) Ein Getreidfeld kann von 4 Schnittern in 3 Tagen geschnitten werden; wie viel sind erforderlich, um die Arbeit in 2 Tagen zu vollenden?

Aufl. Man denkt sich das Feld zuerst nach der Zahl der Tage in 3 und jeden Theil nach der Zahl der Schnitter wieder in 4, das Ganze also in 3×4 oder 12 gleiche Theile getheilt. Jeder Theil ist das Tagwerk für 1 Person. Wäre die Arbeit in 1 Tg. zu vollenden, so müßten es also 12 Schnitter sein. Da aber 2 Tage Zeit gegeben sind, so ist in 1 Tg. nur die Hälfte von den 12 Theilen zu schneiden; folglich ist auch nur die Hälfte von 12 Schnittern erforderlich. In 2 Tg. wird daher die Arbeit von 6 Schn. vollendet.

3) Will ein Landmann seine Wiese in 2 Tg. abmähen, so muß er täglich 8 Stunden dazu verwenden; wie lange braucht er täglich nur zu mähen, um die Arbeit in 3 Tg. zu vollenden?

Aufl. Um mit dem Mähen in 2 Tagen fertig zu werden, so muß er täglich 8 Stunden lang daran sein. Also braucht er im Ganzen 2×8 oder 16 Std. Wollte er die Arbeit in 1 Tag vollenden, so müßte er in Einem fort 16 Std. darüber bleiben. Da er sich aber 3 Tage Zeit nehmen will, so braucht er in 1 Tag nur den 3. Theil d. i. $5\frac{1}{3}$ Std. lang zu mähen.

4) Wenn ein Mädchen täglich 4 Std. lang an einem Hemde näht, so bringt sie es in 5 Tg. fertig; wie viel Tage wird sie dazu brauchen, wenn sie täglich nur 3 Std. daran arbeiten kann?

Aufl. Wenn sie täglich 4 Std. lang näht, so bringt sie das Hemd in 5 Tg. fertig. Sie braucht also im Ganzen 4×5 oder 20 Std. Zeit dazu. Näht sie täglich nur 3 Std. lang daran, so braucht sie so vielmal 1 Tg, als 3 Std. in 20 Std. enthalten sind, nämlich $6\frac{2}{3}$ mal 1 Tg. oder $6\frac{2}{3}$ Tage.

5) A macht den Weg von München nach Hamburg zu Fuß. Geht er täglich 6 Meilen weit, so braucht er 20 Tage; wie viel Tage wird er brauchen, wenn er täglich nur 5 Meilen zurücklegt?

Aufl. Da A 20 Tage braucht, wenn er täglich 6 Meilen macht; so ist die Entfernung von München bis Hamburg $= 20 \times 6$ oder 120 Meilen. Legt er davon täglich 5 zurück, so dauert seine Reise so vielmal 1 Tg., als 5 Meilen in 120 M. enthalten sind d. i. 24 Tage.

6) Ich gehe von A nach B. Will ich die Reise in 12 Tg. vollenden, so muß ich täglich 7 Meilen zurücklegen; wie weit muß ich täglich gehen, um mein Ziel in 15 Tg. zu erreichen?

Aufl. Meine Reise dauert 12 Tg., wenn ich täglich 7 Meilen gehe. Die Länge des Wegs beträgt also 12×7 oder 84 Meilen. Will ich diese in 15 Tg. machen, so muß ich an jedem Tag $^1/_{15}$ des Wegs, mithin $^1/_{15}$ von 84 M. zurücklegen. $^1/_{15}$ von 84 M. $= 5^3/_5$ Meilen.

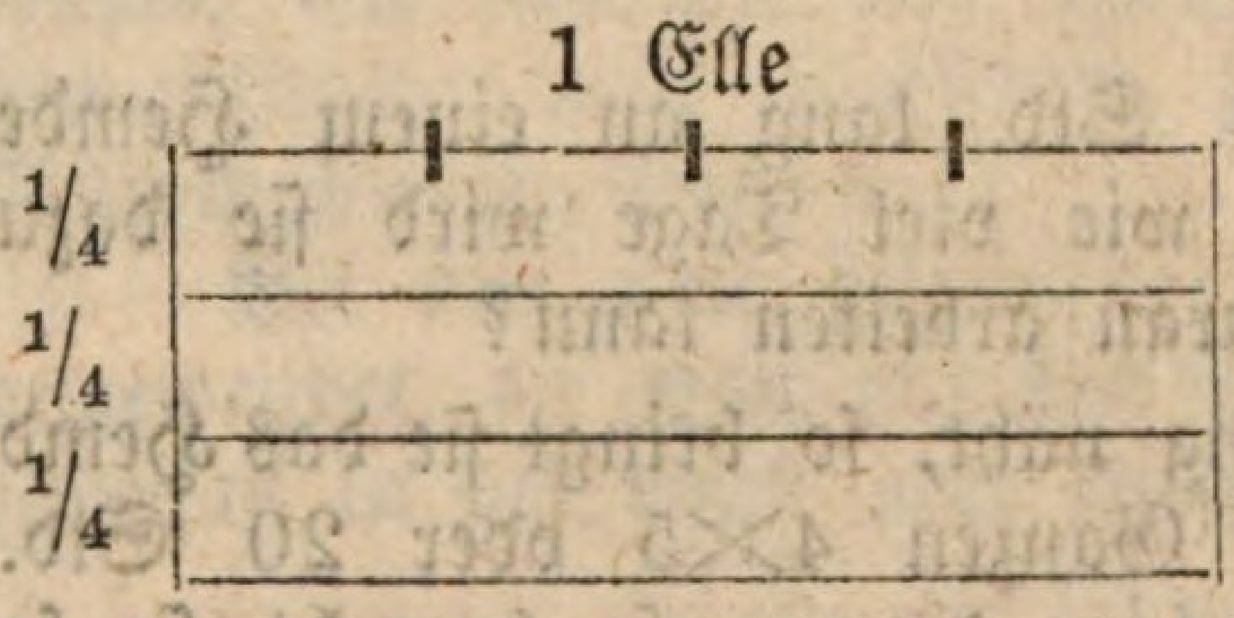
7) Der Oekonom A hat für 24 Stück Vieh einen Futtervorrath auf 5 Monate; um wie viel Stück muß er seinen Viehstand vermindern, wenn das Futter 6 Monate ausreichen soll?

Aufl. Ehe man finden kann, wie viel Stück Vieh abzuschaffen sind, muß man wissen, für wie viel Stück das Futter auf 6 Monate ausreicht. Für 24 Stück reicht der Vorrath 5 Monate lang. Man denkt sich denselben in 24 Theile und jeden davon wieder in 5 Theile, den ganzen Vorrath also in 24×5 oder 120 Theile getheilt. Jeder Theil ist die monatliche Portion für 1 Stück. Sollen die 120 Portionen auf 6 Monate reichen, so darf A in 1 Mon. nur den 6. Theil von 120 oder 20 Portionen verfüttern. Sein Viehstand darf also auch nur 20 Stück betragen. Mithin muß er denselben um $24 - 20$ d. i. um 4 Stück vermindern.

8) A hat für 8 Pferde auf 6 Monat Hafer; wie lange würde dieser für 5 Pferde reichen?

Aufl. Der Hafervorrath gibt 8×6 oder 48 Monatsportionen für 1 Pferd. Sollen davon 5 Pferde gefüttert werden, so gehen in 1 Monat 5 Portionen auf. Der Vorrath reicht also auf so vielmal 1 Monat, als 5 Portionen in 48 Portionen enthalten sind, d. i. auf $9^3/_5$ Monat.

9) Frau A braucht zu einem Kleide 10 Ellen $^3/_4$ breiten Zeug; wie viel Ellen wird sie von einem Zeuge nehmen müssen, der $^4/_4$ breit ist?



Aufl. Der Zeug, wovon 10 Ellen zum Kleide erforderlich sind, ist $^3/_4$ Ellen breit. Daher denke ich mir die Elle der Länge nach in 3 Theile getheilt, deren jeder 1 Elle lang ist und $^1/_4$ Elle breit. Die 10 Ellen enthalten also 10×3 oder 30 dergleichen Theile. Und eben so viel solche Theile sind zum Kleide erforderlich, der Zeug mag eine Breite haben, welche er wolle. Ist er nur $^1/_4$ Elle breit, so sind 30 Ellen nöthig. Ist er $^4/_4$ Ellen breit, so enthält 1 Elle 4 der gedachten Theile; mithin ist davon so vielmal 1 Elle nöthig, als 4 Theile in 30 Theilen enthalten sind d. i. $7^1/_2$ Ellen.

10) Für einen gewissen Lohn werden 3 Ctr. $5^1/_4$ Meilen weit gefahren; wie weit 7 Ctr. für dasselbe Geld?

Aufl. Werden 3 Ctr. $5^1/_4$ Meilen weit gefahren, so kommt der erste Ctr. $5^1/_4$ M. weit, der 2. Ctr. $5^1/_4$ M. weit und der 3. Ctr. $5^1/_4$ M. weit. Lasse ich den 2ten Ctr. zurück, so muß mir der Fuhrmann dafür den ersten Ctr. um $5^1/_4$ M. weiter, im Ganzen also $2 \times 5^1/_4$ M. weit fahren. Lasse ich auch den 3ten Ctr. zurück, so muß er mir dafür den ersten Ctr. wieder um $5^1/_4$ M. weiter, im Ganzen also $3 \times 5^1/_4$ M. weit fahren.

1 Ctr. wird also $3 \times 5^1/_4 = 15^3/_4$ Meilen weit gefahren.

Nun fällt mir ein, statt eines Centners 7 Ctr. für dasselbe Geld mitzugeben. Die Entfernung von $15^3/_4$ Meilen vertheilt sich jetzt auf die 7 Ctr. Mithin kommt auf 1 Ctr. der 7. Theil von $15^3/_4$ M. d. i. $2^1/_4$ M.

11) Ein Decimale ($= {}^1/_{100}$) von 1 bayr. Morgen ist eine Fläche, welche, wenn sie 20 Fuß lang ist, auch 20 Fuß breit sein muß; wie breit muß sie sein, wenn ihre Länge 25 Fuß beträgt?

Aufl. Denkt man sich ein Decimale, welches 20 Fuß lang und 20 Fuß breit ist, sowohl seiner Länge als seiner Breite nach in 20 gleiche Theile getheilt; so ist dasselbe in 20×20 oder 400 Quadrate zerlegt, von denen jedes 1 Fuß lang und 1 Fuß breit ist, also in 400 Q.-Fuß. Ist eine Fläche 25 Fuß lang und 1 Fuß breit, so beträgt sie 25 □Fuß; ist sie 25 Fuß lang und 2 Fuß breit, so beträgt sie 2×25 □Fuß u. s. f. Ist also ein Decimal, welches 400 □Fuß beträgt, 25 Fuß lang, so muß es so vielmal 1 Fuß breit sein, als 25 □Fuß in 400 □Fuß enthalten sind, nämlich 16×1 Fuß oder 16 Fuß.

12) Aus einer Quantität Mehl bäckt man 24 Brode à 4 Pfd.; wie viel Brode von 3 Pfd. ließen sich daraus backen?

Aufl. Die Quantität Mehl ergibt 24 Brode à 4 Pfd., mithin 24×4 oder 96 Pfd. Brod. Bäckt man daraus lauter Brode, die 3 Pfd. wiegen, so erhält man ihrer so viele, als 3 Pfd. in 96 Pfd. enthalten sind, nämlich 32.

13) Wenn der Scheffel Korn 12 fl. kostet, so soll der Zwölferlaib 5 Pfd. 8 Loth wiegen; wie schwer soll derselbe sein, wenn der Scheffel 15 fl. kostet?

Aufl. Kostet der Scheffel 12 fl., so soll der Zwölferlaib 5 Pfd. 8 Loth wiegen. Kostet der Scheffel 3 fl., also nur $^1/_4$mal so viel; so braucht man aus demselben, um die Auslage zu decken, auch nur $^1/_4$mal so viel Zwölferlaibe zu backen. Diese können daher 4mal so schwer gemacht werden. Der Laib wird also $4 \times 5^1/_4$ Pfd. oder 21 Pfd. wiegen müssen. Kostet der Scheffel aber 15 fl. d. i. 5mal so viel, so muß man auch 5mal so viel Zwölferlaibe daraus backen; also kann 1 Brod nur $^1/_5$ mal 21 Pfd. wiegen. $^1/_5$ von 21 Pfd. $=$ 4 Pfd. $6^2/_3$ Loth.

Anm. So lehren gewöhnlich die Rechenbücher, nach der Annahme, daß das Brodgewicht in demselben Verhältnisse steigen müsse, wie der Preis des Getreides fällt, und fallen müsse, wie der Preis des Getreides steigt. Es stimmt dieß aber mit der Praxis nicht ganz überein, weil dem Getreide-

preis die Mannsnahrung für die Bäcker und die etwaige Localabgabe beigeschlagen wird, beide aber für einen und denselben Distrikt immer von gleicher Größe sind. Ist die Mannsnahrung = 2 fl., die Accise = 30 kr., und kostet der Scheffel Korn 10 fl., so kommt derselbe für die Consumenten auf 10 fl. + 2 fl. + 30 kr. = 12 fl. 30 kr. Steigt der Preis auf das Doppelte von 10 fl. d. i. auf 20 fl., so kommt der Scheffel Korn auf 20 fl. + 2 fl. 30 kr. = 22 fl. 30 kr., mithin nicht ganz auf das Doppelte von 12 fl. 30 kr. Der Laib muß also mehr als die Hälfte wiegen, denn zuvor. Die Behörden, welche die Brodpreise oder Brodgewichte zu bestimmen haben, rechnen so:

Die Mannsnahrung sei = 2 fl. 10 kr., die Accise = 30 kr., 1 Scheffel Korn = 280 Pfd. Brod. Das sind constante Werthe. — Der Scheffel Korn koste 10 fl. Mit der Mannsnahrung und mit der Accise kommt derselbe auf 10 fl. + 2 fl. 10 kr. + 30 kr. = 12 fl. 40 kr. — Will man wissen, wie viel der Laib Brod für 12 kr. wiegen müsse, so heißt die Aufgabe: Für 12 fl. 40 kr. erhält man 280 Pfd. Brod, wie viel für 12 kr.? Und will man wissen, wie viel der 6pfündige Laib kosten soll, so heißt es: 280 Pfd. Brod zu 12 fl. 40 kr.; was kosten 6 Pfund Brod?

Wer also Aufgaben dieser Art genau berechnen will, der setze sich vor Allem in Kenntniß der unveränderlichen Werthe, welche für seinen Ort bei dieser Berechnung zu Grunde liegen.

Siehe Kopf- oder Denk-Rechnen, Multiplikations-Divisions-Regeldetri, Stufe V.

B. Schriftlich.

Beispiel. 6 Männer vollenden eine Arbeit in 7 Wochen; wie lange würden 5 derselben dazu brauchen?

Nach dem Zweisatze.

I. Divisionsform.

6 M.		7 Wch.	
5 M.		?	
6 M.		7 Wch.	
1 „		6	
5 „	5		
	5	42	$8^2/_5$ Wch.

II. Bruchform.

6 M.	7 Wch.	
5 M.	?	
6 M.		
1 „	$\frac{7 \times 6}{5} = \frac{42}{5} = 8^2/_5$ Wch.	
5 „		

Denk- oder Sprechweise: 6 Männer brauchen 7 Wochen; 1 M. braucht 6mal so lang, also 6×7 Wch.; 5 Männer aber bedürfen nur den 5. Theil dieser Zeit, nämlich 6×7 Wch., getheilt durch 5.

III. Nach der Proportion.

Berechnet soll werden, wie lange 5 Männer zu einer Arbeit brauchen; bekannt ist, wie lange 6 Männer dazu brauchen. 6 Männer brauchen 7 Wochen; 5 Männer arbeiten in derselben Zeit nicht so viel; sie brauchen daher zu derselben Arbeit länger als 7 Wochen. Die Verhältnisse der Proportion müssen also steigend sein. Ich setze daher:

5 M. : 6 M. = 7 Wch. : x

$$5 \;|\; 42 \;|\; 8^2/_5 \text{ Wch.}$$

(6 über der 42)

6 M. brauchen 7 Wch.; 5 M. brauchen $8^2/_5$ Wochen. In demselben Verhältniß, in welchem die Zahl der Arbeiter abnimmt, in eben demselben Verhältniß nimmt die Zahl der Tage zu. Arbeiter und Zeit sind umgekehrt proportionirt.

Aufg. z. Zifferr., 9. Uebung.

C. Aufgaben mit mehrfachen Verhältnissen.

A. Mündlich.

Beispiel. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 36 fl.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

Behandlung.

I. Ich suche zuerst, wie viel 1 Arbeiter in 1 Tag verdient, und dann, was 8 Arbeiter in 15 Tagen erhalten. Das kann auf zweierlei Weise geschehen:

a) Verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen 36 fl.; so
6 Arbeiter in 1 Tag 3 fl., 1 Arbeiter in 1 Tag $^1/_2$ fl.
1 Arbeiter in 15 Tagen $7^1/_2$ fl., 8 Arbeiter in 15 Tagen 60 fl.

b) Verdienen 6 Arbeiter in 12 Tagen 36 fl.; so
1 Arbeiter in 12 Tagen 6 fl., 1 Arbeiter in 1 Tag $^1/_2$ fl.
8 Arbeiter in 1 Tag 4 fl., 8 Arbeiter in 15 Tagen 60 fl.

II. Ich löse die zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe in zwei einfache auf. Kann wieder auf zweifache Art geschehen:

a) 6 Arbeiter erhalten in 12 Tagen 36 fl.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in derselben Zeit? Antwort 48 fl.
8 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 48 fl., wie viel in 15 Tagen? Antw.: 60 fl.

b) 6 Arbeiter verd. in 12 Tagen 36 fl., wie viel in 15 Tagen? Antw.: 45 fl.
6 Arbeiter verd. in 15 Tagen 45 fl., wie viel verdienen 8 Arb. in dieser Zeit? Antw.: 60 fl.

III. Ich ziehe die zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe in eine einfache zusammen. Wieder auf zweierlei Weise:

a) Was 6 Arbeiter in 12 Tagen verdienen, das verdienen in einem Tag 12×6 oder 72 Arbeiter. Und was 8 Arbeiter in 15 Tagen verdienen, das verdienen in einem Tag 15×8 oder 120 Arb. Nun heißt die Aufgabe: 72 Arb. verdienen 36 fl.; wie viel verd. 120 Arb.? Antw.: 60 fl.

b) Was 6 Arbeiter in 12 Tagen verdienen, das verdient 1 Arbeiter in 6 mal 12 oder 72 Tagen. Und was 8 Arb. in 15 Tagen erhalten, das bekommt 1 Arb. in 8 mal 15 oder 120 Tagen. Die Aufgabe heißt jetzt: In 72 Tagen werden 36 fl. verdient, wie viel in 120 Tagen? Antwort: 60 fl.

Anm. Eine vortreffliche Uebung ist es, die Auflösung solcher Aufgaben von den Schülern, wie hier oben, in Worten schriftlich darstellen zu lassen.

Aufg. z. Kopf- oder Denkrechnen S. 30.

B. Schriftlich.

I. Nach dem Zweisatz in Divisionsform.

Beispiel 1. 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 36 fl.; wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

6 Arb.	12 Tg.	36 fl.
8 Arb.	15 Tg.	?

6 Arb.		36 fl.
1 „	6	
8 „ (in 12 Tag)		8
1 „	12	
15 „		15
	2	3
		4
		60 fl.

Die Auflösung zerfällt in zwei Schlußreihen:

a) 6 Arb. verd. in 12 Tg. 36 fl.;
1 „ „ den 6. Theil;
8 „ „ 8 mal so viel und zwar in 12 Tagen.

b) Mithin verdienen 8 Arb. in 1 Tg. den 12. Theil und in 15 Tagen 15 mal so viel.

Beispiel 2. 8 Wägen, welche täglich 10 Stunden lang gehen, bringen einen Schutthaufen in 20 Tagen auf eine andere Stelle. Wie viel Tage zu 8 Stunden würden 12 Wägen daran zu fahren haben? ($16\frac{2}{3}$ Tg.)

Ansatz und Berechnung.

8 Wg.	10 Std.	20 Tg.
12 Wg.	8 Std.	?

8 Wg.		20 Tg.
1 „		8
12 „ (10 St.)	12	
1 „		10
8 „	8	

Der Rechner denkt:
8 Wägen brauchen 20 Tg.;
1 Wg. braucht 8 mal so lang;
12 Wg. brauchen den 12. Theil der Zeit, wenn sie täglich 10 Std. fahren; fahren sie täglich 1 Stunde, so 10 mal so lang; wenn aber 8 Stunden, so den 8. Theil.

Beispiel 3. Wie lange reichen 24 Personen mit dem Brode für 20 fl., wenn der Scheffel Korn 28 fl. kostet und jede Person täglich 20 Loth erhält; da 18 Personen an dem Brode für 12 fl., als der Schff. 16 fl. kostete und jede Person 1 Pfd. 4 Lth. verzehrte, 10 Tage lang hatten? Antwort: $12\frac{6}{7}$ Tage.

Ansatz und Berechnung:

18 Perſ.	12 fl. Brod	16 fl. Schff.	36 Lth.	10 Tg.
24 Perſ.	20 fl. Brod	28 fl. Schff.	20 Lth.	? Tg.

18 Perſ.		10 Tag.
1 „		18
24 „ (12 fl. Brod)	24	
1 fl. „	12	
20 fl. „ (16 fl. Schff.		20
1 fl. „		16
28 fl. „ . (36 Lth.) .	28	
1 „		36
20 „	20	
	7	90

II. Nach dem Zweisatze in der Bruchform.

1) 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 36 fl., wie viel verdienen 8 Arbeiter in 15 Tagen?

6 Arb.	12 Tag.	36 fl.
8 Arb.	15 Tag.	?

6 Arb.	12 Tg.
1 „	1 „
8 „	15 „

$$\frac{\overset{3}{\not{3}\not{6}} \times 8 \times 15}{\not{6} \times \underset{2}{\not{1}\not{2}}} = 60 \text{ fl.}$$

6 Arbeiter verdienen in 12 Tg. 36 fl.; 1 Arb. verdient in 12 Tg. $^1/_6$ von 26 fl.; 8 Arb. verdienen in 12 Tg. 8 mal ſo viel. In 1 Tg. verdienen ſie $^1/_{12}$ davon, in 15 Tg. aber 15 mal ſo viel.

2) 8 Wägen, welche täglich 10 Std. lang gehen, bringen einen Schutthaufen in 20 Tg. auf eine andere Stelle; wie viel Tage zu 8 Std. würden 12 Wägen daran zu fahren haben?

8 Wg.	10 Std.	20 Tg.
12 „	8 „	?

8 Wg.	10 Std.
1 „	1 „
12 „	8 „

$$\frac{\overset{5}{\not{2}\not{0}} \times 8 \times 10}{\underset{3}{\not{1}\not{2}} \times 8} = \frac{50}{3} = 16^2/_3 \text{ Tg.}$$

8 Wägen brauchen 20 Tage; 1 Wagen braucht 8 mal ſo lang, 8×20 Tage; 12 Wägen brauchen den 12. Theil dieſer Zeit, nämlich 8×20 Tage, getheilt durch 12. So viel Tage brauchen die 12 Wägen, wenn ſie täglich 10 Stunden lang fahren. Fahren ſie täglich nur 1 Stunde lang, ſo brauchen ſie 10 mal ſo viel Tage. Wenn ſie aber 8 Std. fahren, ſo brauchen ſie nur den 8. Theil, d. i. 10×8×20 Tg., getheilt 8×12.

III. Nach der Proportion.

Beiſpiel 1. 8 Arbeiter verdienen in 6 Tagen 36 fl.; wie viel werden 5 Arbeiter in 7 Tagen verdienen?

Ansatz und Berechnung:

Die Frage heißt: Wie viel, wie viel Gulden, werden 5 Arbeiter in 7 Tagen verdienen? Das Fragеglied ist daher x fl., das hintere Verhältniß also 36 fl. : x.

Wovon hängt es hier ab, wie viel verdient wird? (Von der Anzahl der Arbeiter und von der Arbeitszeit.) Fassen wir zuerst die Arbeiter in's Auge.

Von welcher Anzahl Arbeiter werden 36 fl. verdient? (Von 8 Arb.) Und von welcher Anzahl Arbeiter ist der Verdienst zu suchen? (Von 5.) Verdienen diese 5 Arbeiter mehr oder weniger als jene 8, bei gleicher Zeit? (Weniger.) Das Verhältniß 36 fl. : x fl. ist also abnehmend oder fallend. In demselben Verhältnisse, in welchem die Anzahl der Arbeiter abnimmt, in eben demselben Verhältnisse, nimmt auch der gemeinschaftliche Verdienst derselben ab. Wir setzen daher 8 Arbeiter : 5 Arb., steht:

8 Arbeiter : 5 Arb. = 36 fl. : x

Würden die 5 Arbeiter eben so lange arbeiten, als die 8, so wäre ihr Verdienst = 5 × 36 fl. getheilt durch 8 = $22\frac{1}{2}$ fl. Ihre Arbeitszeit ist aber eine andere. Also ist auch ihr Arbeitslohn ein anderer.

In welcher Zeit werden denn die 36 fl. verdient? (In 6 Tg.) Und für welche Zeit ist der Verdienst zu berechnen? (Für 7 Tg.) Wird der Verdienst für diese 7 Tage mehr oder weniger betragen, als für jene 6? (Mehr.) Das Verhältniß der Zeiten wirkt also zunehmend auf das Verhältniß 36 fl. : x. Denn in demselben Verhältnisse, in welchem die Arbeitszeit wächst, in eben demselben Verhältniß wächst auch der Arbeitslohn. Wir setzen daher unter das erste Verhältniß noch das zweite 6 Tag : 7 Tg.

8 Arb.	: 5 Arb.	= 36 fl.	: x
6 Tg.	: 7 Tg.		
~~48~~	: 35	= ~~36~~ fl.	: x
4		3	

8 Arb. verdienen in 6 Tag 36 fl. Denken wir uns an jedem der 6 Tage 8 andere Arb. angestellt, so sind es dann im Ganzen 6 × 8 oder 48 Arb., und jeder von ihnen arbeitet 1 Tag lang. Was 8 Arb. in 6 Tagen thun und verdienen, das thun und verdienen also 6 × 8 oder 48 Arb. in 1 Tag. Und was 5 Arbeiter in 7 Tagen thun und verdienen, das thun und verdienen 7 × 5 oder 35 Arb. in 1 Tag. Der Einfluß der Zeit auf den Verdienst ist nun auf die Anzahl der Arbeiter übergetragen; das besondere Verhältniß der Zeit ist dadurch aufgehoben. Die 2 Verhältnisse sind in eines zusammengezogen. Wir haben nun eine einfache Proportion.

Beispiel 2. Wie lang brauchen 10 Arbeiter bei täglich 12stündiger Arbeit, wenn 8 Arbeiter, welche täglich 10 St. arbeiten, 20 Tage brauchen? Antwort $13\frac{1}{2}$ Tag.

Ansatz und Berechnung:

Die Frage heißt: Wie lange d. h. wie viele Tage brauchen 10 Arb. bei täglich 12stündiger Arbeit? Das Fragеglied ist daher x

Tage, das hintere Verhältniß also

20 Tg. : x

Worauf kommt es an, wie viele Tage zu einer gewissen Arbeit erforderlich sind? (Auf die Anzahl der Arbeiter und auf die Anzahl der Stunden, welche sie täglich auf die Arbeit verwenden. Denn je mehr Arbeiter bei der Arbeit beschäftigt sind, desto eher werden sie damit fertig; je weniger Arbeiter, desto länger werden sie dazu brauchen. Je mehr Stunden täglich auf die Arbeit verwendet werden, desto mehr wird in 1 Tag gethan und desto weniger Tage sind dazu erforderlich; je weniger Stunden täglich auf die Arbeit verwendet werden, desto—.) Fassen wir nun zuerst die Zahl der Arbeiter ins Auge und dann die Zahl der Stunden. 20 Tage lang brauchen 8 Arbeiter; **10** Arbeiter brauchen nicht so lang; das Verhältniß der Arbeiter ist daher abnehmend zu setzen.

10 Arb. : 8 Arb. = 20 Tg. : x

20 Tage sind erforderlich, wenn täglich 10 Std. lang gearbeitet wird. Wird täglich 12 Stunden lang gearbeitet, so braucht man nicht so lange. Also ist auch das Verhältniß der Stunden abnehmend zu setzen.

10 Arb. : 8 Arb. = 20 Tg. : x
12 Std. : 10 Std.

$\overset{3}{\cancel{120}}$: $\overset{2}{\cancel{80}}$ = 20 Tg. : x

Was 1 Arbeiter in 12 Std. thut, das können in 1 Std. 12 Arbeiter leisten, und was 10 Arbeiter in 12 Stunden thun, das können 10 × 12 oder **120** Arbeiter in 1 Stunde verrichten. — Eben so können das, was 8 Arbeiter in 10 Std. thun, 8 × 10 oder **80** Arbeiter in 1 Stunde leisten. — Die 120 Arbeiter arbeiten täglich 1 Std. und die 80 Arbeiter arbeiten auch täglich 1 Stde. Die Anzahl der Tage hängt also jetzt einzig und allein von der Anzahl der Arbeiter ab. Anstatt der zwei vorderen Verhältnisse ist jetzt das eine da: 120 Arb. : 80 Arb.; die zusammengesetzte Rechnung ist in eine einfache verwandelt.

x = 80 × 20 Tg., getheilt durch 120,
= 2 × 20 Tg., getheilt durch 3 = $13\frac{1}{3}$ Tg.

Aus diesen Beispielen ergibt sich das Verfahren: **man multiplicirt die unter einander stehenden Glieder mit einander und betrachtet die Produkte als ein Verhältniß.**

Die inneren Glieder der Proportion (hier 8, 10, 20) sind die Faktoren des Dividenden; die äußeren (10 und 12) sind die Faktoren des Divisors. So wie man den Divisor und den Dividenden gegenseitig heben kann; eben so kann man auch die Faktoren des Divisors gegen die Faktoren des Dividenden heben. **Jedes äußere Glied kann gegen jedes innere Glied gehoben werden,** wofern die

Beschaffenheit der Zahlen es gestattet. Demnach können wir auch so verfahren:

~~10~~ Arb.	:	~~8~~ Arb.	= 20 Tg. : x	
~~12~~ Std.	:	~~10~~ Std.		
1		1		
3		2		
3	:	2	= 20 Tg. : x	

Wir heben 10 gegen 10 durch 10, und 12 gegen 8 durch 4.

Wie gezeigt, so wird auch in den Fällen verfahren, wo die gesuchte Größe von mehr als 2 Verhältnissen abhängig ist. Nur unterlasse man nicht, jede Aufgabe, sobald das hintere Verhältniß angesetzt ist, so zu beurtheilen, daß der Schüler die Art der Abhängigkeit des Gesuchten von dem Gegebenen deutlich erkennt.

Aufg. z. Zifferr., 10. Uebung.

D. Aufgaben mit mehrfachen Gleichungen.

Kettenrechnung.

Die Kettenrechnung oder Kettenregel, nach dem holländischen Kaufmann Rees, welcher sie besonders in Aufnahme brachte, auch Rees'scher Satz genannt, wird von Manchen unbedingt gelobt, von Manchen unbedingt verworfen. Wir thun weder das Eine, noch das Andere. In Wahrheit empfiehlt sie sich durch ihre Leichtigkeit im Ansatze, durch ihre Uebersichtlichkeit in der Darstellung und durch ihre Kürze. Durch ihre Kürze insofern, als durch sie gewisse Aufgaben, die sonst nur mittelst zwei oder mehrerer Ansätze zu lösen sind, in einem Ansatze ausgerechnet werden können. Eben so gewiß ist aber auch, daß der Rees'sche Satz sehr leicht und schnell zum todten Mechanismus heruntersinkt, daß er mit dem Kopfrechnen in gar keiner Verbindung steht, mithin der Grundlage entbehrt, welche Klarheit und Dauer verleiht, und daß er weder in allen Fällen vortheilhaft, noch überall, namentlich bei den Aufgaben mit umgekehrten Verhältnissen, ausreichend ist. Da derselbe jedoch seiner oben erwähnten Vortheile wegen im Geschäftsleben immer in Geltung bleiben wird, so kann er auch aus der Schule nicht verwiesen werden.

I. Aufgaben mit Resolutionen und Reduktionen.

Beisp. 1. Was kosten 4 Ctr., wenn man für 12 kr. 1 ℔ kauft?

Ansatz und Berechnung.

?	4 Ctr.	**„Was kosten (?) 4 Centner."** Da uns die Aufgabe sagt, wie viel 1 Pfd. kostet, so müssen wir die 4 Ctr. in Pfd. verwandeln;
Ctr. 1	~~100~~ Pfd.	wir setzen daher **„1 Ctr. = 100 Pfd."**; die 4 Ctr. sind also = 4 × 100 Pfd.
Pfd. 1	~~12~~ kr.	**„1 Pfd. kostet 12 kr."**; 4 × 100 Pfd. kosten also 4 × 100 × 12 kr. Da sich voraussichtlich eine große Anzahl von Kreuzern ergibt, so verwandeln wir sie sogleich in Gulden. Wir setzen daher zum
kr. ~~60~~	1 fl.	Schlusse noch **60 kr. = 1 fl.** Das ist der Ansatz. Er wird gelesen:
~~5~~	20	Was kosten 4 Ctr., wenn 1 Ctr. = 100 Pfd.,
1	80 fl.	1 Pfd. = 12 kr. und 60 kr. = 1 fl.?

4 Ctr. oder 4 × 100 Pfd. kosten 4 × 100 × 12 kr. oder, was eben so viel ist, 4 × 100 × 12 × 1 fl., dividirt durch 60. 12 gegen 60 aufgehoben, gibt 5; 5 gegen 100 aufgehoben, gibt 20; 20 × 4 = 80. Also kosten 4 Ctr. 80 fl.

Beispiel 2. Ein Pfd. Gewürz zu 64 fl.; was kostet 1 Qt.?

Ansatz und Berechnung.

?	1 Qt.	**„Wie viel (?) kostet 1 Qt.“** Da uns die Aufgabe sagt, was 1 Pfd. kostet, so müssen wir von 1 Qt. über 1 Loth zu 1 Pfd. aufsteigen. Wir setzen daher
Qt. 4	1 Lth.	**„4 Qt. = 1 Loth“**
Lth. 32	1 Pfd.	**„32 Lth. = 1 Pfd.“**
Pfd. 1	~~64~~ fl.	**„1 Pfd. = 64 fl.“**, dem Werthe nach. Auf der linken Seite ist das Pfd. in Quint verwandelt. 1 Pfd. = 32 Loth. = 32 × 4 Qt. Das Pfd. oder die 32 × 4 Qt. kosten 64 fl. Mithin kostet 1 Qt. 64 fl., getheilt durch 32 × 4. Daß auf 1 Qt. kein ganzer Gulden entfällt, ist leicht einzusehen. Wir verwandeln daher die 64 fl. sogleich in Kreuzer und setzen noch
fl. 1	~~60~~ kr.	**„1 fl. = 60 kr.“** Die 32 × 4 Qt. kosten also 64 × 60 kr.; 1 Qt. kostet demnach 64 × 60 kr., getheilt durch 32 × 4. Wird 32 gegen 64 und 4 gegen 60 gehoben, so ergibt sich, daß das Facit 2 × 15 oder 30 kr. beträgt.
1	2	
1	15	
1	30 kr.	

Worin besteht nun das Eigenthümliche dieser Rechnungsform?

1) Die Zahlen stehen in 2 senkrechten Reihen untereinander.

2) Als erstes Glied der linken Reihe steht ein Fragezeichen (häufig mit dem Namen der gesuchten Größe) und ihm gegenüber als erstes rechtes Glied die gegebene Größe, wovon der Werth zu suchen ist.

3) Das linke Glied jeder folgenden (wagrechten) Zeile schließt sich durch gleichen Namen an das vorherstehende rechte an.

4) Jede wagrechte Zeile enthält 2 gleiche Werthe.

5) Die rechte Reihe ist als Dividend, die linke als Divisor anzusehen.

Da die Glieder des Ansatzes durch Namen und Werth wie die Glieder einer Kette zusammenhängen, so wird er Kettensatz und das ganze Verfahren Kettenregel oder Kettenrechnung genannt.

Beispiel 3. 24 Pfd. kosten 70 fl.; wie hoch kommen 7 Loth? Antwort: 38 kr. $1^1/_8$ pf.

Ansatz und Berechnung.

?	7 Lth.	Was kosten 7 Loth; wenn
32	1 Pfd.	32 Loth = 1 Pfd. und
24	70 fl.	24 Pfd. dem Werthe nach = 70 fl.?
1	60 kr.	24 Pfd. oder 24 × 32 Loth kosten 70 fl.;
32	1225 kr.	7 Loth kosten so viel mal 70 fl., als 24 × 32

Loth in 7 Loth enthalten sind, mithin 7 × 70 fl., dividirt durch 24

× 32. Es ist leicht einzusehen, daß der Divisor größer wird, als der Dividend. Weil sich deßhalb ganze Gulden nicht ergeben, so verwandelt man die 70 fl. sogleich in Kreuzer.

Beispiel 4. Ein Dampfboot legt in $4\frac{1}{6}$ Std. $64\frac{4}{5}$ Seemeilen zurück, wie weit kommt dasselbe in $18\frac{3}{4}$ Std.? Antw. $291\frac{1}{5}$ M.

Ansatz und Berechnung:

? M.	$18\frac{3}{4}$ St.
$4\frac{1}{6}$	$64\frac{4}{5}$ M.
4	75
25	6
5	334

Wie viel Meilen macht das Schiff in $18\frac{3}{4}$ Std., da es in $4\frac{1}{6}$ Std. $64\frac{4}{5}$ Meil. geht? Es macht in $18\frac{3}{4}$ Std. so vielmal $64\frac{4}{5}$ M., als $4\frac{1}{6}$ Std. in $18\frac{3}{4}$ Std. enthalten sind d. i. $18\frac{3}{4} \times 64\frac{4}{5}$ M., dividirt durch $4\frac{1}{6}$.

$18\frac{3}{4} = \frac{75}{4}$; statt $\frac{75}{4}$ setze ich 75; hierdurch wird ein Faktor des Dividenden, mithin dieser selbst, 4mal so groß. Soll der Quotient derselbe bleiben, so muß auch der Divisor 4mal so groß gemacht werden, und dieß geschieht, indem ich 4 als Faktor auf die linke Seite setze. — So mit allen Brüchen. — Hierauf werden die Faktoren des Divisors gegen die Faktoren des Dividenden so viel als möglich wieder gehoben.

Beisp. 5. Für 8 Lth. 2 Qt. löst man 13 kr. 3 pf.; wie viel für 12 Pfd. 20 Loth? Antwort: 10 fl. $53\frac{1}{2}$ kr.

I. Vorarbeit.

a. Durch Resolviren.

8 Lth. 2 Qt. = 34 Qt.
13 kr. 3 pf. = 55 pf.
12 Pfd. 20 Lth. = 404 Lth.

b. Durch Reduciren.

8 Lth. 2 Qt. = $8\frac{1}{2}$ Lth.
13 kr. 3 pf. = $13\frac{3}{4}$ kr.
12 Pfd. 20 Lth. = $12\frac{5}{8}$ Pfd.

II. Ansatz.

a.

? fl.	404 Lth.
1	4 Qt.
34	55 pf.
4	1 kr.
60	1 fl.
102	1111 fl.

b.

? fl.	$12\frac{5}{8}$ Pfd.
1	32 Lth.
$8\frac{1}{2}$	$13\frac{3}{4}$ kr.
60	1 fl.
102	1111 fl.

Aufg. z. Zifferr., 11. Uebung.

Jede der bisherigen Aufgaben läßt sich auch nach dem Zweisatze und nach der Proportion durch einen einzigen Ansatz rechnen. Bei den folgenden Aufgaben ist dieß nicht der Fall. Für sie ist daher der Kettensatz besonders geeignet.

II. Zusammengesetzte Aufgaben.

Beisp. 1. Wie viel Krthlr. erhält man für 378 pr. Thlr., da 10 Krthlr. = 27 fl., und 7 fl. = 4 pr. Thlr.? Antw. 245 Krthlr.

Aufl. Wir verwandeln die pr. Thlr. in Gulden und die Gulden in Krthlr.

Ansatz und Berechnung.

? Krthlr.	378 pr. Thlr.
4	7 fl.
27	10 Krthlr.
1	245 Krthlr.

Wie viel Krthlr. = 378 pr. Thlr? So oft 4 pr. Thlr. in 378 pr. Thlr. enthalten sind, so vielmal 7 fl.; also sind 378 pr. Thlr. = 378 × 7 fl., dividirt durch 4. So oft in diesen Gulden 27 fl. enthalten sind, so vielmal 10 Krthlr.; also sind 378 pr. Thlr. = 378 × 7 × 10 Krthlr., dividirt durch 4 × 27. Das Fragglied oben links und das Schlußglied unten rechts sind nun gleichnamig. Die Kette ist geschlossen, der Ansatz fertig. Nun erfolgt das Heben.

Dieselbe Aufgabe

durch den Zweisatz:

a.	4 Thlr.	7 fl.
	378 „	?
b.	27 fl.	10 Thlr.
	$661\frac{1}{2}$ „	?

durch die Proportion:

a. 4 Thlr. : 378 Thlr. = 7 fl. : x
x = $661\frac{1}{2}$ fl.

b. 24 fl. : $661\frac{1}{2}$ fl. = 10 Krthlr. : x
x = 245 Krthlr.

Beisp. 2. Ein Nürnberger kauft in Hamburg 242 Pfd. Gewürz; beim Verkaufe wiegt er von 25 Pfd. 1 Pfd. ein und gibt das Pfd. um 48 kr.; wie viel beträgt sein Erlös, da 116 hamb. Pfd. = 100 nürnb. Pfd.?

? fl.	242 Pfd. Hbg.	Wie viel fl. thun 242 Pfd. von Hamburg, wenn
116	100 Pfd. Nbg.	116 Pfd. von Hambg. = 100 Pfd. zu Nbg.,
25	24 Pfd.	25 Pfd. im Einkauf = 24 Pfd. im Verkauf,
1	48 kr.	1 Pfd. im Werthe = 48 kr. und
60	1 fl.	60 kr. = 1 fl.
145	23232 fl. = 160 fl. $13\frac{7}{29}$ kr.	

So oft 116 hamb. Pfd. in 242 hamb. Pfd. enthalten sind, so vielmal 100 nürnb. Pfd. kommen. So oft 25 Pfd. in diesen enthalten sind, so vielmal 24 Pfd. werden im Verkaufe bezahlt. So oftmal 1 Pfd. bezahlt wird, so vielmal 48 kr. werden eingenommen. Und so oft 60 kr. in den Kreuzern enthalten sind, so vielmal 1 fl. macht der Erlös.

Beispiel 3. Wie viel russ. Silberrubel betragen 1200 span. Piaster, wenn sich verhält der Piaster zum südd. Gulden wie 5 zu 2, der südd. Gulden zum pr. Thlr. wie 4 zu 7, und der pr. Thlr. zum Silberrubel wie 35 zu 38.

a. Verwandlungen der Verhältnisse in Gleichungen.

Es verhält sich

1 Piaster zu 1 südd. fl. wie 5 : 2; also sind 2 Piaster = 5 fl.
1 Gulden zu 1 pr. Thlr. „ 4 : 7; „ „ 7 fl. = 4 pr. Thlr.
1 pr. Thlr. zu 1 S. Rubel „ 35 : 38; „ „ 38 Thlr. = 35 S. R.

b. Ansatz und Berechnung.

? S. R.	1200 Piaster	Wie viel S. Rubel = 1200 Piaster,
2	5 fl.	wenn 2 Piaster = 5 fl.,
7	4 pr. Thlr.	7 Gulden = 4 pr. Thlr.
38	35 S. R.	und 38 pr. Thlr. = 35 S. R.
19	30000 = $1578^{18}/_{19}$ S. R. = 1578 S. R. $94^{14}/_{19}$ Kopeken.	

So oft 2 Piaster in 1200 Piaster enthalten sind, so vielmal 5 fl. kommen. So oft in diesen Gulden 7 fl. enthalten sind, so vielmal 4 pr. Thlr. kommen. Und so oft in diesen pr. Thlrn. 38 pr. Thlr. enthalten sind, so vielmal 35 S. Rubel kommen.

Aufg. z. Zifferr., 12. Uebung.

Dritte Abtheilung.

Regeldetri- oder Verhältnißrechnungen,

nach den Gegenständen geordnet.

Die verschiedenen Gattungen der nun zur unterrichtlichen Behandlung kommenden Aufgaben entsprechen den verschiedenen Lebensverhältnissen, welche rechnerisch zu bestimmende Leistungen und Geschäfte mit sich bringen. Die Gliederung des Stoffes in diesem Sinne soll Gelegenheit und Veranlassung geben, die betreffenden Verhältnisse einmal klar und anschaulich ins Licht zu setzen, einerseits, damit der Schüler eine seiner Entwicklungsstufe entsprechende und seinen Gesichtskreis erweiternde Einsicht in dieselben erhalte, andererseits, damit er, um die Aufgaben mit Sinn und Verstand rechnen zu können, die Art der Abhängigkeit des Gesuchten vom Gegebenen deutlich erkenne und mit den oft eigenthümlichen Kalkulationen und Benennungen bekannt werde.

Das Erste und Wichtigste im Unterrichte ist also von jetzt an die Belehrung des Schülers über die Sachverhältnisse, sowohl im Allgemeinen, als im Besonderen. Das Zweite ist die Beurtheilung der vorkommenden Zahlenverhältnisse und beim Zifferrechnen die Bestimmung der zur Ausrechnung anzuwendenden Rechnungsform. Die Ausrechnung wird nämlich bei manchen Aufgaben am einfachsten blos durch Anwendung der Multiplikation oder Division, bei andern durch Anwendung des Zweisatzes (oder der Proportion) und wieder bei andern durch den Kettensatz ausgeführt werden. Dieß ist daher immer, bevor zur Ausrechnung selbst geschritten wird, zu beurtheilen. Sowie die Schüler bei den Regeldetri-Aufgaben am Ende des vierten und fünften Cursus aufzufinden hatten, welche Grund-Rechnungsart in jedem einzelnen Falle anzuwenden sei; so müssen sie jetzt bei jeder Aufgabe zu erkennen suchen, nach welcher Rechnungsform dieselbe am zweckmäßigsten ausgerechnet werde. Die letztere Forderung ist eine höhere. Sie darf

es aber sein, weil der Schüler inzwischen an Einsicht und Urtheilskraft zugenommen hat, und sie muß es sein, weil es das Leben so verlangt.

Der Lehrer aber muß wissen, welche Abschnitte er in seiner Schule durchzunehmen habe und inwieweit; denn Alles ist nicht für Alle. Er muß, ohne die allgemeine Bildung seiner Schüler zu vernachlässigen, auch dem lokalen Bedürfnisse Rechnung tragen und die vorherrschenden Erwerbszweige seines Ortes in ihrem rechnerischen Theile besonders eingehend und ausführlich behandeln.

Abgaben-Rechnung.

Die meisten Aufgaben, die wir bisher gerechnet haben, waren über Kauf, Erwerb und Verbrauch. Ein geregelter Verkehr und Erwerb, ein ruhiger Besitz und Genuß des Erworbenen ist aber nur in einem Lande möglich, wo Sicherheit der Person und des Eigenthums ist, sowohl vor gewaltthätigen Menschen im Innern des Landes, als vor auswärtigen Feinden. Dieselbe herzustellen und zu erhalten, ist Sache der Regierung und der Gerichtshöfe, der Beamten und Richter und des Militärs. Damit also Hunderttausende und Millionen gesichert leben und wirken können, sind Hunderte und Tausende nöthig, darüber zu wachen. Andere Hunderte und Tausende haben die Aufgabe, an der Bildung und Erziehung des Volks zu arbeiten. Und das ist nicht weniger wichtig. Denn nur ein wohlunterrichtetes, gebildetes und gut erzogenes Geschlecht sucht und findet seinen Erwerb auf die rechte und zugleich ergiebigste Weise, achtet Sitte und Gesetz und des Nächsten Eigenthum und Leben, erkennt und fördert die wohlthätigen Bestrebungen einer weisen und gerechten Regierung.

Alle aber, welche ihr Leben dem Dienste des Staates widmen, werden billig von demselben auch erhalten.

Die Mittel zur Bestreitung dieser und andrer Ausgaben, z. B. für Staatsgebäude, Brücken, Strassen rc., werden zum Theil aus dem Ertrage der dem Staate eigenthümlichen Waldungen, Eisenbahnen, Bergwerke und Salinen, des Malzaufschlags, des Zolls, der Stempelgebühren u. s. w., und zum Theil durch besondere Auflagen oder Abgaben gewonnen. Dergleichen sind die Grund-, Haus-, Gewerb-, Kapital- und Einkommensteuer. Sie werden nach Verhältniß des Besitzes, des Erwerbs oder des Einkommens entrichtet und von der Staatsregierung mit Zuziehung der Vertreter des Volks nach Bedürfniß des Staatshaushalts im Allgemeinen festgestellt.

Außerdem gibt es noch Kreis-, Distrikts- und Gemeindeumlagen, welche zur Deckung der besondern Ausgaben im Regierungsbezirke, im Gerichtsdistrikte und in der Gemeinde dienen. Diese werden nach dem Steuerfuße erhoben, d. h. die Pflichtigen haben ihre Beiträge nach dem Verhältniß ihrer Steuer zu leisten.

Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Die Grundsteuer richtet sich nach der Größe und Bodengüte der Grundstücke, also nach der Ertragsfähigkeit derselben. Die Ertragsfähigkeit aber wird durch eine Zahl ausgedrückt, welche die ein-

fache Steuer bezeichnet, und diese wird in Bayern jährlich $2^1/_5$ fach erhoben. Wie viel beträgt demnach die Grundsteuer

a. von einem Acker, dessen einfache Steuer = 17 kr. 4 hlr.?

Ausrechnung:

2×17 kr. 4 hlr. = 35 kr.
$^1/_5 \times 17$ kr. 4 hlr. = 3 kr. 4 hlr.
38 kr. 4 hlr.

Oder: $2^1/_5 \times 17^1/_2$ kr.

$$\frac{11}{5} \times \frac{35 \cdot 7}{2} = \frac{77}{2} = 38^1/_2 \text{ kr.}$$

b. von einer Wiese, deren einf. Steuer = 1 fl. 36 kr. 2 hlr.?

Ausr. 1 fl. 36 kr. 2 hlr.
2
3 fl. 12 kr. 4 hlr. (= 2×1 fl. 36 kr. 2 hlr.)
— fl. 19 kr. 2 hlr. (= $^1/_5 \times 1$ fl. 36 kr. 2 hlr.)
3 fl. 31 kr. 6 hlr. (= 3 pf.)

2) Wie viel Kreisumlage kommt auf 25 fl. 36 kr. Steuer, wenn der Steuergulden 10 kr. zahlt?

Ausr. Auf 25 fl. kommen 25×10 kr. = 4 fl. 10 kr., auf 30 kr. $^1/_2 \times 10$ kr. = 5 kr. und auf 6 kr. $^1/_{10} \times 10$ kr. = 1 kr.; 4 fl. 10 kr. + 5 kr. + 1 kr. = 4 fl. 16 kr.

Oder: $25^3/_5 \times 10$ kr. = 250 + 6 oder 256 kr. = 4 fl. 16 kr.

3) Bei Herstellung einer Distriktsstrasse ergab sich eine Baarauslage von 2250 fl.; die Steuersumme sämmtlicher Gemeinden des Distrikts = 5400 fl.; wie v. trifft auf die Gemeinde A, die 360 fl. Steuer zahlt?

Aufl. Zu berechnen ist, wie viel Umlage auf 360 fl. Steuer kommt, und die Aufgabe sagt, wie viel auf 5400 fl. kommt. Auf 5400 fl. Steuer kommen 2250 fl. Umlage; auf die Hälfte der Steuer kommt die Hälfte der Umlage, auf $^1/_3$ der Steuer $^1/_3$ der Umlage u. s. w. Sowie sich also die Steuer des ganzen Distrikts zur Steuer der Gemeinde A verhält, ebenso verhält sich die ganze Umlage zu dem Antheil der Gemeinde A.

Zweisatz.		Proportion.
5400 fl. St.	2250 fl. Uml.	5400 : 360 = 2250 fl. : x
360 fl. St.	?	x = 150 fl.

4) Hiernach muß die Gemeinde A auf ihre 360 fl. Steuer 150 fl. von der Distriktsumlage übernehmen; wie viel hat nun ein Gemeindeglied in A daran zu zahlen, dessen Steuer 23 fl. 30 kr. beträgt?

Mündl. Auf 1 Steuergulden kommt $^1/_{360}$ von 150 fl.; 360 = $36 \times 10 = 3 \times 12 \times 10$; $^1/_{10}$ von 150 fl. = 15 fl., $^1/_3$ von 15 fl. = 5 fl., und $^1/_{12}$ von 5 fl. = 25 kr.; auf 1 fl. St. kommen also 25 kr., mithin auf $23^1/_2$ fl. St. $23^1/_2 \times 25$ kr. = 9 fl. $47^1/_2$ kr.

Zweisatz.		Proportion.
360 fl. Str.	150 fl.	360 : $23^1/_2$ = 150 fl. : x
$23^1/_2$ fl.	?	x = 9 fl. $47^1/_2$ kr.

5) Die Brauer müssen von jedem Scheffel Gerste oder Malz 5 fl. Aufschlag entrichten; dafür wird die Ms. Bier um 1 kr. höher berech-

net. Wie viel bezahlt demnach A, welcher täglich $1\frac{1}{2}$ Ms. Bier trinkt, für den Malzaufschlag a. in 1 J.? b. in 24 J.?

Aufl. Für $1\frac{1}{2}$ Ms. macht es $1\frac{1}{2}$ kr., in 1 gemeinen Jahre also $365 \times 1\frac{1}{2}$ kr.; in 24 J. macht's 24mal so viel und wegen der 6 Schalttage noch $6 \times 1\frac{1}{2}$ kr. = 219 fl. 9 kr.

6) Der Ctr. Baumwollenwaaren zahlt 87 fl. 30 kr. Eingangszoll; um wie viel erhöht dieß den Preis für das Pfd.?

Mündl. Der Zoll beträgt für das Pfd. $\frac{1}{100}$ von $87\frac{1}{2}$ fl. Wie suchst du das? a. $87\frac{1}{2}$ fl. $= 50 + 25 + 12\frac{1}{2}$ fl; $\frac{1}{100}$ davon $= 30 + 15 + 7\frac{1}{2}$ kr. $= 52\frac{1}{2}$ kr. b $87\frac{1}{2}$ fl. $= 80 + 5 + 2\frac{1}{2}$ fl.; $\frac{1}{100}$ davon $= \frac{4}{5}$ fl. oder 48 kr. + 3 kr. + $1\frac{1}{2}$ kr. $= 52\frac{1}{2}$ kr. c. $87\frac{1}{2} = \frac{7}{8} \times 100$; $\frac{1}{100}$ von 100 fl. = 1 fl.; also ist $\frac{1}{100}$ von $\frac{7}{8} \times 100$ fl. $= \frac{7}{8} \times 1$ fl. oder $52\frac{1}{2}$ kr. b. $100 = 10 \times 10$; $\frac{1}{10}$ von 87 fl. 30 kr. = 8 fl. 45 kr., und $\frac{1}{10}$ von 8 fl. 45 kr. $= 52\frac{1}{2}$ kr.

Schriftlich.

	87 fl. 30 kr.
	60
100	5250 kr. $= 52\frac{1}{2}$ kr.

Anm. Es ist nicht uninteressant, den Eingangszoll für die gewöhnlichen Handelsartikel kennen zu lernen. Derselbe beträgt nach dem Zollvereins-Tarif per Ctr. für ein- und zweidräthiges Baumwollengarn 5 fl. 15 kr., für 3- und mehrdräthiges ditto 14 fl., für Kaffee 8 fl. 45 kr., für Zucker 17 fl. 20 kr., für Gewürz 11 fl. $22\frac{1}{2}$ kr., für Rauchtabak 19 fl. 15 kr., für Seidenwaaren 192 fl. 30 kr., für geschmiedetes und gewalztes Eisen 4 fl., für Wachs 5 fl. 30 kr.

7) Wie viel Accise (städtische Abgabe für Wein, Bier, Mehl) ist von 8 Eim. Wein zu zahlen, wenn der Eimer 24 fl. kostet und der Gulden $1\frac{3}{4}$ kr. gibt?

Aufl. a. Ich berechne die Accise zuerst vom 1 Eim. und dann von 8 Eimern. b. Ich suche zuerst, was die 8 Eim. kosten und dann, was die Accise von der ganzen Summe beträgt. c. Nach dem Kettensatz

?	8 Eim.
1	24 fl.
1	$1\frac{3}{4}$ kr.
60	1 fl.
5	28 fl. = 5 fl. 36 kr.

Aufg. z. Kopfr. S. 33, z Zifferr. 13 Uebung.

Tauschrechnung.

Die Mannigfaltigkeit der Dinge, die wir zum Leben oder zum Gebrauche nöthig haben, ist so groß, daß der Einzelne seinen Bedarf unmöglich selbst erzeugen oder herstellen kann. Daher die Theilung der Arbeit. Ein großer Theil der Menschen gibt sich blos mit Gewinnung der Rohprodukte ab: der Landmann mit dem Bau der Feldfrüchte und mit der Viehzucht, der Bergmann mit dem Zutagefördern der Metalle. Andere beschäftigen sich blos damit, die Rohprodukte zum Genusse zu-

zurichten oder zum Gebrauche zu verarbeiten. Und wie vielfach ist diese Beschäftigung! Wie vielfach allein in Bezug auf die Kleidungsstoffe! Und wie vielfach sind die Geschäfte der Metallarbeiter! So erzeugen und fertigen also die Einen dieß, die Andern jenes.

Am häufigsten geschieht es nun wohl, daß Jeder das, was er von seinen Erzeugnissen an Andere abtreten will, gegen baares Geld austauscht d. i. verkauft und das, was er von Andern bedarf, für baares Geld sich eintauscht d. i. einkauft. Es kommt aber auch vor, daß die Waaren selbst gegeneinander umgetauscht werden. Und dabei sind es vorzüglich drei wesentlich verschiedene Fälle, welche stattfinden. Entweder man will zwei Gegenstände umtauschen, deren Quantität (Größe oder Menge) im Voraus genau bestimmt ist, und den Werthunterschied durch baares Geld ausgleichen; oder man will für einen Gegenstand von bestimmter Quantität genau so viel von einem andern umtauschen, als zur Ausgleichung des Werthes erforderlich ist; oder man will aus der Quantität und dem Werthe eines Tauschgegenstandes den Preis von irgend einer Einheit desselben wissen.

a. Der Werthunterschied der Tauschgegenstände wird gesucht.

1) A tauscht seine Taschenuhr gegen eine neue um. Die neue Uhr kostet 15 fl.; die alte wird zu 8 fl. 36 kr. angenommen; wie viel hat A darauf zu zahlen?

Antw. So viel, als die neue Uhr mehr werth ist denn die alte, mithin so viel, als 15 fl. mehr sind denn 8 fl. 36 kr. d. i. 6 fl. 24 kr.

2) Jemand kauft einen neuen Ofen um 33 fl. und gibt einen alten von 2 Ctr. 48 Pfd. daran; das Pfd. von diesem wird zu $2\frac{1}{4}$ kr. gerechnet; wie v. ist noch darauf zu legen?

Ausr. Die Tauschgegenstände sind 2 Oefen, ein neuer und ein alter. Der Werth des neuen ist bekannt; er beträgt 33 fl. Den des alten müssen wir erst berechnen; dieser beträgt $248 \times 2\frac{1}{4}$ kr.; 248×1 kr. $=$ 4 fl. 8 kr.; 248×2 kr. $=$ 8 fl. 16 kr., und $248 \times \frac{1}{4}$ kr. $=$ 1 fl. 2 kr.; 8 fl. 16 kr. $+$ 1 fl. 2 kr. $=$ 9 fl. 18 kr. Wie viel ist also der neue Ofen mehr werth, als der alte? Antw. 33 fl. — 9 fl. 18 kr. $=$ 23 fl. 42 kr. Mithin muß der Eisenhändler außer dem alten Ofen noch 23 fl. 42 kr. baar erhalten.

3) Eine Frau kauft $16\frac{3}{4}$ Ellen Zeug, die Elle zu 36 kr., und gibt dagegen 7 Pfd. 20 Loth Wolle, das Pfd. zu 1 fl. 12 kr.; wie viel beträgt das Aufgeld?

Hier ist zuerst der Werth von beiden Tauschgegenständen zu berechnen; dann kann die Ausgleichung erfolgen.

a. $16\frac{3}{4}$ Ell. à 36 kr.	b. 7 Pfd. 20 Lth. à Pfd. 1 fl. 12 kr.
16 Ell. = 9 fl. 36 kr.	7 Pfd. = 8 fl. 24 kr.
$\frac{1}{2}$ „ = — fl. 18 kr.	16 Lth. = — fl. 36 kr.
$\frac{1}{4}$ „ = — fl. 9 kr.	4 Lth. = — fl. 9 kr.
10 fl. 3 kr.	9 fl. 9 kr.
9 fl. 9 kr.	
c. — fl. 54 kr., welche die Frau zu zahlen hat.	

b. Die Quantität des einen Tauschgegenstandes wird bestimmt.

1) Der Oekonom A tauscht für 1 Schff. Weizen Zwetschgen ein; der Schff. Weizen kostet 18 fl. 45 kr., die Mtz. Zwetschgen 36 kr.; wie v. Mtz. Zwetschgen wird er erhalten?

Aufl. Da der Schff. Weizen 18 fl. 45 kr. werth ist, so muß A auch für 18 fl. 45 kr. Zwetschgen bekommen.

Mündl. Für 1 fl. (= 36 + 24 kr.) erhält er $1\frac{2}{3}$ Mtz., für 18 fl. also $18 \times 1\frac{2}{3} = 30$ Mtz.; für 45 oder 36 + 9 kr. erhält er $1\frac{1}{4}$ Mtz.; mithin muß er im Ganzen $30 + 1\frac{1}{4} = 31\frac{1}{4}$ Mtz. erhalten.

Schriftl. 18 fl. 45 kr. machen so vielmal 1 Mtz. Zwetschgen, als 36 kr. darin enthalten sind.

a.

36 kr.	18 fl. 45 kr.
	60
36 kr.	1125 = $31\frac{1}{4}$ Mtz.

b.

$\frac{3}{5}$ fl.	$18\frac{3}{4}$ fl.
3	5
4	75 . 25
4	125 = $31\frac{1}{4}$ Mtz.

2) Wie viel Pfd. Lichter erhält man für $8\frac{1}{2}$ Pfd. Unschlitt, wenn 1 Pfd. Unschlitt 16 kr. und 1 Pfd. Lichter 24 kr. kostet?

Aufl. Warum kostet das Pfd. Lichter mehr, als das Pfd. Unschlitt? (Abgang, Arbeitskosten, Verzinsung des Betriebskapitals.) Vergleicht diese Aufgabe mit der vorigen! (Dort wurden für 1 Schff. Weizen Zwetschgen eingetauscht; hier sollen für $8\frac{1}{4}$ Pfd. Unschlitt Lichter eingetauscht werden. Der Werth von dem Schff. Weizen war bekannt; der Werth von den $8\frac{1}{2}$ Pfd. Unschlitt ist nicht bekannt, er ist also erst zu suchen.) Ausr. 8 Pfd. Unschlitt machen 8×16 kr. oder 2 fl. 8 kr.; das halbe Pfd. macht 8 kr.; zusammen 2 fl. 16 kr. Für 24 kr. erhält man 1 Pfd. Lichter, für 2 fl. oder 5×24 kr. also 5×1 Pfd. oder 5 Pfd.; für 16 oder $\frac{2}{3} \times 24$ kr. erhält man $\frac{2}{3} \times 1$ Pfd. oder $\frac{2}{3}$ Pfd.; zusammen $5\frac{2}{3}$ Pfd. Gehen 12 Stück auf 1 Pfd., so erhält man 5 Pfd. 8 Stück. Also &c.

3) Eine Frau gibt dem Kaufmann $6\frac{1}{4}$ Pfd. Federn, das Pfd. zu 2 fl. 12 kr.; von dem Betrage läßt sie eine alte Schuld von 3 fl. 15 kr. abrechnen, und für das übrige Geld nimmt sie Barchent, die Elle zu $22\frac{1}{2}$ kr.; wie v. Ellen erhält sie?

Ausr. a. $6\frac{1}{4}$ Pfd. à 2 fl. 12 kr.

6 ℔ =	13 fl. 12 kr.
$\frac{1}{4}$ ℔ =	— fl. 33 kr.
	13 fl. 45 kr.
	3 fl. 15 kr.
	10 fl. 30 kr.

b. Wie v. Ell. à $22\frac{1}{2}$ kr. für $10\frac{1}{2}$ fl.?

$\frac{3}{8}$ fl.	$10\frac{1}{2}$ fl.
1 . 3	8 . 4
1 . 2	21 . 7
1	28 Ellen.

c. Der Preis von irgend einer Einheit des einen Tauschgegenstandes ist zu bestimmen.

1) Um ihre Güter zu arrondiren, gibt A dem B einen Acker von

87 Decimalen und erhält dagegen einen andern vom 75 Dec. nebst 66 fl. Aufgeld; beide Grundstücke haben gleiche Lage und Bodengüte; wie berechnet sich das Decimale und wie das Tgw.?

Ausr. A bekommt für seinen Acker einen andern von gleicher Güte und Lage und außerdem noch 66 fl. Aufgeld. Warum dieß? Weil sein Acker, den er abtrat, um 12 Dec. größer ist, als der andere. Die 66 fl. sind also der Werth für 12 Decimale. Mithin kommt 1 Dec. auf $^1/_{12}$ von 66 fl. $= 5^1/_2$ fl und das Tagw. auf $100 \times 5^1/_2$ fl. $= 550$ fl.

2) Ein Oekonom schickt in eine Kunstmühle $3^1/_2$ Schff. Roggen und erhält dagegen 835 Pfd. Mehl; wie hoch kommt der Ctr. Mehl, wenn der Schff. Roggen 15 fl 24 kr. kostet?

Aufl. Die 836 Pfd. Mehl kommen so hoch, als was die $3^1/_2$ Schff. Roggen werth sind.

3 Schff. $= 3 \times$ 15 fl. 24 kr. $=$ 46 fl. 12 kr.
$^1/_2$ „ $= {^1/_2} \times$ 15 fl. 24 kr. $=$ 7 fl. 42 kr.

$3^1/_2$ Schff. Rgg. od. 835 Pfd. Mehl $=$ 53 fl. 54 kr.

Zweisatz.		Proportion.
835 Pfd.	$53^9/_{10}$ fl.	$835 : 100 = 53^9/_{10}$ fl. : x
100	?	$x = 6$ fl. $27^{51}/_{167}$ kr.

3) A gibt dem B 5 Schff. Kartoffeln und nimmt dafür Heu. Der gewöhnliche Preis für den Schff. ist 4 fl. 30 kr.; A setzt ihn aber zu 5 fl. an. a. Wie muß nun B, um keinen Schaden zu haben, den Ctr. Heu rechnen, wenn dessen Verkaufspreis = 1 fl. 12 kr.? b. Wie viel Ctr. hat er an A abzugeben?

Mündl. a. A setzt den Schff. von 4 fl. 30 kr. auf 5 fl., mithin um 30 kr. oder $^1/_9$ des gewöhnlichen Preises höher; also muß B den Ctr. Heu auch um $^1/_9$ höher als 1 fl. 12 kr. rechnen. $^1/_9$ von 1 fl. 12 kr. = 8 kr.; 1 fl. 12 kr. + 8 kr. = 1 fl 20 kr. — b Die 5 Schff. Kartoffeln machen $5 \times 5 = 25$ fl.; dafür muß B so vielmal 1 Ctr. Heu geben, als 1 fl. 20 kr. in 25 fl. enthalten sind. $1^1/_3$ fl. oder $^4/_3$ fl. sind in 25 fl. oder $^{75}/_3$ fl. $18^3/_4$mal enthalten; die Gegenleistung beträgt also $18^3/_4$ Ctr. Heu.

Schriftlich.

Zweisatz.		Proportion.
$4^1/_2$ fl.	5 fl.	$4^1/_2 : 5 = 1^1/_5$ fl. : x
$1^1/_5$ fl.	?	$x = 1^1/_3$ fl.

$1^1/_3$ fl.	25 fl.
	3
4	$75 = 18^3/_4$ Ct.

Aufg. z. Kopfr. S. 34, z. Zifferr., 14. Uebung.

Verwandlungs-Rechnung.

Sowohl bei dem Kaufe, als bei dem Tausche sind es entweder einzelne Dinge, oder größere und kleinere Quantitäten gewisser Waaren und deren Werth, um das sich's handelt.

Die Quantität d. i. die Menge oder das Wieviel der Waaren wird in manchen Fällen durch Zählen, in den meisten Fällen jedoch durch Messen oder Wägen bestimmt. Der Werth der Dinge aber wird überall, wenigstens bei den Kulturvölkern, nach geprägten Silber- oder Goldstücken, welche man Münzen nennt, festgestellt. Man sagt: dieses oder jenes Ding, die eine oder die andere Quantität von einer Waare hat einen Werth von so viel oder so viel Stücken dieser oder jener Münze.

Nun ist es natürlich, daß einerseits die Maße und Gewichte, durch welche die Quantität der Waaren bestimmt wird, und andrerseits die Gold- oder Silberstücke, welche zur Feststellung ihres Werthes dienen, nicht von beliebiger und stets veränderlicher Größe sein dürfen. Der Käufer will die Waare nach einem bestimmten und ihm bekannten Maße oder Gewichte gemessen oder gewogen haben, und der Verkäufer will dafür mit gangbaren, ihm nach Werth und Geltung bekannten Münzen bezahlt sein. Daher muß es auch solche festbestimmte und allgemein anerkannte und bekannte Maße und Gewichte, Gold und Silbermünzen geben. Und diese gibt es, zwar nicht die nämlichen in allen Ländern, aber doch in einem und demselben Lande. Sie werden von der Regierung desselben festgestellt und eingeführt. Die Maße und Gewichte, deren man sich innerhalb ihres Gebiets beim Handel und Wandel zu bedienen hat, werden von ihr geprüft und zum Zeichen dessen mit einem Stempel versehen. Die Münzen aber prägt sie selbst und hat sich das ausschließliche Recht dazu vorbehalten.*)

Die landesüblichen Münzen, Maße und Gewichte in Bayern sind uns schon aus dem Früheren bekannt. Eben so ihre Eintheilung und das gegenseitige Verhältniß ihrer Sorten. Hievon ist jetzt auch nicht die Rede, sondern davon, wie sich unsere Münzen, Maße und Gewichte zu denen andrer Staaten verhalten. Wenn man nämlich aus einem andern Lande Waaren bezieht, so werden Quantität und Preis nach dem Maße oder Gewichte und dem Gelde jenes Landes bestimmt, aus dem die Waare bezogen wird. Man muß daher wissen, wie

---

*) In jedem Staate ist irgend ein Gewicht als Einheit angenommen, und die übrigen Gewichtsorten sind entweder Theile oder Vielfache desselben. Die Gewichtsorten eines Landes stehen daher unter sich in einem bestimmten Verhältniß. Eben so ist es bei den Maßen und Münzen. Den Münz-, Maß- und Gewichtseinheiten selbst liegt aber gewöhnlich eine gemeinsame Einheit nicht zu Grund. Nur Frankreich macht eine Ausnahme. Dort ist der zehnmillionte Theil des pariser Meridian-Quadraten die Einheit des Längenmaßes. Derselbe heißt Meter, und beträgt etwa $3^2/_3$ bayr. Fuß. Der Meter wird in 10 Decimeter und in 100 Centimeter eingetheilt. Die Einheit des Flächenmaßes ist der Quadratmeter. Die Einheit aller Körper- oder Hohlmaße ist der Kubikmeter. Die Einheit des Gewichts heißt Gramme und ist das Gewicht eines Kubik-Centimeters destillirten Wassers im Zustande seiner größten Dichtigkeit. Die Einheit der Münzen ist der Frank; derselbe wiegt 5 Grammen und enthält 4,5 Gr. feines Silber. Der Meter ist also die Größe, welche dem franz. Maß-, Gewichts- und Münzsystem im Ganzen zu Grunde liegt.

sich Maß, Gewicht und Geld desselben zu denen im eigenen Lande verhalten, und jene in diese verwandeln können, d. h. man muß im Stande sein, zu berechnen, wie viel eine gewisse Quantität Waare, welche in dem jenseitigen Maß und Gewicht, und eine gewisse Summe, welche in dem dort eingeführten Gelde ausgedrückt ist, nach dem diesseitigen betrage.

Bevor wir jedoch zur Berechnung selbst übergehen, sei insbesondere über die Münzen und über das Münzverhältniß noch Folgendes bemerkt.

Daß die Münzen geprägte Metallstücke sind, welche einen bestimmten Werth haben und als Austauschmittel dienen, ist uns bekannt. Die Seite einer Münze, welche das Bild des Landesfürsten oder das Wappen trägt, heißt die Vorderseite (Avers). Die andere Seite, welche den Namen und die Geltung der Münze zeigt, heißt Kehr- oder Rückseite (Revers).

Ihrem Stoffe nach werden die Münzen in Gold-, Silber- und Kupfermünzen eingetheilt. Die Gold- und Silbermünzen werden aber nicht aus reinem Metalle geprägt. Bei jenen enthält das Münzmetall einen Zusatz von Silber oder Kupfer, oder es ist mit diesen beiden Metallen legirt; bei diesen ist es mit Kupfer vermischt. Durch den Zusatz wird das Münzmetall härter, und die Münzkosten werden zum Theil dadurch gewonnen. Die legirte Masse einer Münze heißt Schrot, das edle Metall darin Korn.

Das Abwägen des Goldes und Silbers geschah lange Zeit ausschließlich nach der köln. Mark ($=233\frac{4}{5}$ Grammen). Aus der köln. Mark feinen Silbers prägte Preußen 14 Thlr., Oesterreich 20 fl. und Bayern mit den übrigen süddeutschen Staaten $24\frac{1}{2}$ fl. Mit dem neuen (im Jahre 1857 eingeführten) Münzsystem trat in ganz Deutschland an die Stelle der köln. Mark das Zollvereinspfund ($=$ 500 Grammen). Aus dem Zollpfunde feinen Silbers werden nun von den Thalerstaaten je 30 Thlr., von den Staaten des rhein. Guldens je $52\frac{1}{2}$ fl., von Oesterreich je 45 fl. geprägt. Also sind

30 pr. Thlr. $=$ 45 fl. östr. $=$ $52\frac{1}{2}$ fl. süddeutsch.

Alle deutschen Staaten prägen außer ihren Landesmünzen einfache und doppelte Vereinsthaler, welche in allen ihren Kassen der Landesmünze gleich geachtet werden sollen. Der einfache Vereinsthaler hat den nämlichen Werth wie der preußische Thaler; der doppelte Vereinsthaler gilt zweimal so viel. Das Mischungsverhältniß der Vereinsmünzen ist auf $\frac{9}{10}$ Silber und $\frac{1}{10}$ Kupfer festgesetzt.

An die Stelle der bisherigen Goldmünzen tritt ein schweres Goldstück, die Krone, $=\frac{1}{50}$ vom Zollpfund feinen Goldes, und die halbe Krone, $\frac{1}{100}$ vom Zollpfund f. G. Auch beim Golde ist das Mischungsverhältniß 9 Theile Gold und 1 Theil Kupfer.

Nun zu den Aufgaben.

I. Das Verhältniß der betreffenden Münzen, Maße und Gewichte zu einander ist bekannt.

A. Münzen.

1) Preußische Thaler und süddeutsche Gulden.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß 30 pr. Thlr. = $52\frac{1}{2}$ südd. Gulden.

Das Erste ist nun, zu berechnen, wie viel ein pr. Thaler beträgt. Da 30 pr. Thlr. = $52\frac{1}{2}$ fl., so beträgt 1 pr. Thlr. $\frac{1}{30}$ von $52\frac{1}{2}$ fl.; $52\frac{1}{2}$ fl. = 30 + $22\frac{1}{2}$ fl. = 30 + 15 + $7\frac{1}{2}$ fl.; $\frac{1}{30}$ hievon = 1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ oder $1\frac{3}{4}$ fl.; also ist 1 pr. Thlr. = $1\frac{3}{4}$ fl. oder 1 fl. 45 kr. Eben so viel gilt auch 1 Vereinsthaler.

Das Andere ist, zu berechnen, welche Anzahl von pr. Thalern eine Anzahl ganzer Gulden gibt. Dieß wird gefunden

a. Aus dem Verhältniß beider Münzen.

1 fl. = 4 × 15 kr., und 1 pr. Thlr. = 7 × 15 kr.; der Gulden hat also 4 Theile, wie der pr. Thlr. 7 hat; mithin verhält sich der Gulden zum Thaler wie 4 : 7, und also sind 7 fl. = 4 pr. Thlr., oder 4 Thlr. = 7 fl.

b. Auf dem Wege der Erfahrung.

1 pr. Thlr. = 1 fl. 45 kr. = $1\frac{3}{4}$ fl. = 1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ fl.
2 „ „ = 2×1 fl. + 2×$\frac{1}{2}$ fl. + 2×$\frac{1}{4}$ fl. = 2+1+$\frac{1}{2}$ od. $3\frac{1}{2}$ fl.
3 „ „ = 3 × $1\frac{3}{4}$ fl. = 3 + $2\frac{1}{4}$ fl. oder $5\frac{1}{4}$ fl.
4 „ „ = 4×1 fl. + 4×$\frac{1}{2}$ fl. + 4×$\frac{1}{4}$ fl. = 4+2+1 od. 7 fl.

Dieß, nämlich das Letztere, ist wiederholt und zwar auch von den schwächsten Schülern so lange in der angegebenen Weise rechnen zu lassen, bis die Resultate unverlierbar eingeprägt sind. Dann folgen Aufgaben.

Aufg. 1. Wie viel Gulden sind 8 (20, 12, 28 2c.) pr. Thlr.?

a) Von 1 Thlr. ausgehend. 1 Thlr. = 1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ fl.; 8 Thlr. machen also 8 × 1 fl. + 8 × $\frac{1}{2}$ fl. + 8 × $\frac{1}{4}$ fl. = 8 + 4 + 2 oder 14 fl.

b) Von 4 Thlrn. ausgehend. 4 Thlr. = 7 fl.; so vielmal 4 Thlr., so vielmal 7 fl.; 8 Thlr. = 2 × 4 Thlr., also auch 2 × 7 oder 14 fl.

Aufg. 2. Wie viel Gulden sind 11 (5, 18, 31 2c.) pr. Thlr.?

a. 11 Thlr. = 8 + 3 Thlr.; 8 oder 2 × 4 Thlr. = 2 × 7 oder 14 fl., und 3 Thlr. = 5 fl. 15 kr.; 14 fl. + 5 fl. 15 kr. = 19 fl. 15 kr.

b. 11 Thlr = 12 Thlr — 1 Thlr.; 12 oder 3 × 4 Thlr. = 3 × 7 oder 21 fl.; 21 fl. — 1 fl. 45 kr. = 19 fl. 15 kr.

Aufg. 3. Wie viel pr. Thlr. sind 21 (35, 14, 49 2c.) Gulden?

Ausr. 7 fl. = 4 Thlr.; so vielmal 7 fl., so vielmal 4 Thlr.; also sind 21 oder 3 × 7 fl. = 3 × 4 oder 12 Thlr.

Aufg. 4. Wie viel pr. Thlr. sind 13 (17, 48, 54, 100) fl.?

a. 13 fl. = 7 + 6 fl.; 7 fl. = 4 Thlr.; 6 fl. = 5 fl. 15 kr. + 45 kr. = 3 Thlr. und 45 kr.; also sind 13 fl. = 4 Thlr. + 3 Thlr. 45 kr. = 7 Thlr. 45 kr.

b. 13 fl. = 14 fl. — 1 fl.; 14 oder 2 × 7 fl. = 2 × 4 oder 8 Thlr.; 8 Thlr. — 1 fl. = 7 Thlr. und 45 kr.

Nun beiderlei Arten von Aufgaben vermischt. Z. B. 25 Vereinsthaler, wie viel Gulden? 25 fl., wie viel Vrsthlr.?

Hat man kleinere Summen von pr. Thlrn. oder Vereinsthlrn. zu zählen, so legt man immer 4 zusammen; je 4 dergleichen Thaler sind je 7 fl. Sind größere Summen zu zählen, so legt man immer 57 Stck. + 15 kr. zusammen; das gibt eine Rolle zu 100 fl.

2) Oesterreichische Gulden und süddeutsche.

45 östr. Gulden = $52\frac{1}{2}$ südd. Gulden; 1 östr. Gulden ist also $\frac{1}{45}$ von $52\frac{1}{2}$ südd. Gulden. $52\frac{1}{2}$ fl. = 45 fl + $7\frac{1}{2}$ fl.; $\frac{1}{45}$ von 45 fl. = 1 fl.; $7\frac{1}{2}$ fl. = 450 kr.; $\frac{1}{45}$ von 450 kr. = 10 kr.; 1 östr. Gulden beträgt also nach unserm Gelde 1 fl. 10 kr.

Es entsteht nun die Frage: Welche Anzahl von östr. Gulden gibt eine Anzahl von ganzen südd. Gulden?

a. 1 östr. G. = 7 × 10 kr., und 1 südd. Gulden = 6 × 10 kr.; der östr. Gulden verhält sich daher zum südd. wie 7 : 6; mithin sind 6 östr. G. = 7 südd. Gulden.

b. Wie oft ist $\frac{1}{6}$ zu nehmen, um 1 Ganzes zu erhalten? Nimmt man also auf der einen Seite 1 östr. Gulden und auf der andern Seite $1\frac{1}{6}$ südd. G. 6mal, so erhält man auf beiden Seiten ganze Zahlen. 1 östr. Gulden = $1\frac{1}{6}$ südd. Gulden; mithin sind 6 × 1 oder 6 östr. Gulden = 6 × $1\frac{1}{6}$ oder 7 südd. Gulden.

c. 1 östr. Gulden = 1 fl. 10 kr.	4 östr. Gulden = 4 fl. 40 kr.
2 „ „ = 2 fl. 20 kr.	5 „ „ = 5 fl. 50 kr.
3 „ „ = 3 fl. 30 kr.	6 „ „ = 7 fl. — kr.

Aufg. 1. Wie viel südd. G. sind 100 östr. Gulden?

a. 1 östr. Gulden = $1\frac{1}{6}$ südd. Gulden; also sind 100 östr. Gulden 100 × $1\frac{1}{6}$ südd. Gulden = 100 + $16\frac{2}{3}$ = $116\frac{2}{3}$ südd. Gulden.

b. 6 fl. östr. = 7 südd. fl.; 96 oder 16 × 6 östr. fl. = 16 × 7 od. 112 südd. fl.; 4 östr. fl. = 4 fl. 40 kr.; 112 fl. + 4 fl. 40 kr. = 116 fl. 40 kr.

Aufg. 2. Drücke 100 südd. Gulden in östr. Gulden aus!

7 südd. fl. = 6 östr. fl.; 100 = 70 + 28 + 2; 70 oder 10 × 7 südd. fl = 10 × 6 od. 60 östr. fl.; 28 oder 4 × 7 südd. fl. = 4 × 6 od. 24 östr. fl.; 60 + 24 = 84; 2 südd fl. od. 1 fl. 10 kr. + 50 kr. = $1\frac{5}{7}$ östr. fl.; 84 + $1\frac{5}{7}$ = $85\frac{5}{7}$.

3) Kronenthaler und süddeutsche Gulden.

Der Krthlr. gilt 2 fl. 42 kr. oder $2^7/_{10}$ fl.; 10 Krthlr. machen also 10 × $2^7/_{10}$ fl. = 20 + 7 oder 27 fl.

Zuerst werden die Krthlr. von 1 bis 10 in Gulden ausgedrückt und dieß bis zur Geläufigkeit geübt. Am besten geschieht es in nachstehender Weise.

1 Krthlr. = 2 fl. 42 kr. od. 2 fl. + ½ fl. + 12 kr. od. 2 fl. + 7 Sechser.

2 Krthlr. = 2 × 2 fl. + 2 × ½ fl. + 2 × 12 kr. = 4 fl. + 1 fl. + 24 kr. oder 5 fl. 24 kr.

4 Krthlr. = 2 × 2 Krthlr., also auch = 2 × 5 fl. 24 kr. = 10 fl. 48 kr.

8 Krthlr. = 2 × 4 Krthlr., also auch 2 × 10 fl. 48 kr. = 21 fl. 36 kr.

Nun berechnen wir 3, 6 und 9 Krthlr.

3 Krthlr. = 3 × 2 fl. + 3 × 7 Sechser = 6 fl. + 2 fl. 6 kr. = 8 fl. 6 kr.

6 Krthlr. = 2 × 3 Krthlr., also auch 2 × 8 fl. 6 kr. = 16 fl. 12 kr.

9 Krthlr. = 3 × 3 Krthlr., also auch 3 × 8 fl. 6 kr. = 24 fl. 18 kr.

Jetzt nehmen wir 10, 5 und 7 Krthlr.

10 Krthlr. = 27 fl.

5 Krthlr. sind die Hälfte von 10 Krthlr.; daher betragen sie auch die Hälfte von 27 fl., nämlich 13 fl. 30 kr.

7 Krthlr. = 7 × 2 fl. + 7 × 7 Sechser = 14 fl. + 4 fl. 54 kr. = 18 fl. 54 kr.

Zusammenstellung:

1 Krthlr.	= 2 fl. 42 kr.	3 Krthlr.	= 8 fl. 6 kr.	10 Krthlr.	= 27 fl.
2 „	= 5 fl. 24 kr.	6 „	= 16 fl. 12 kr.	5 „	= $13^1/_2$ fl.
4 „	= 10 fl. 48 kr.	9 „	= 24 fl. 18 kr.	7 „	= 18 fl. 54 kr.
8 „	= 21 fl. 36 kr.				

Aufg. 1. 28 (13, 37 rc.) Kronenthlr, wie viele Gulden?

a. 1 Krthr. = 2 fl. + ½ fl. + ⅕ fl.; 28 Krthlr. also = 28 × 2 fl. + 28 × ½ fl. + 28 × ⅕ fl = 56 fl. + 14 fl. + $5^3/_5$ fl. = $75^3/_5$ fl.

b. 10 Kr. = 27 fl.; 20 od. 2 × 10 Krthlr. = 2 × 27 od. 54 fl.; 8 Krthlr. = 21 fl 36 kr.; 54 fl. + 21 fl. 36 kr. = 75 fl. 36 kr.

Aufg. 2. Wie viele Krthlr. sind zu 100 fl. nöthig?

Ausr. 27 fl. = 10 Krthlr.; 100 = 81 + 19; 81 oder 3 × 27 fl. = 3 × 10 oder 30 Krthlr.; 19 fl. = 18 fl. 54 kr. + 6 kr. = 7 Krthlr. + 6 Kreuzer; also sind zu 100 fl erforderlich 37 Krthlr. und 6 kr.

4) Fünffrankenthaler und südd. Gulden.

In Frankreich rechnet man nach Franken. Ein Frank macht nach unserm Gelde 28 Kreuzer. Der Fünffrankenthaler gilt also 5 × 28 kr. oder 2 fl. 20 kr.; 2 Ffrkthlr. = 4 fl. 40 kr., und 3 = 7 fl.

Aufg. Wie viel Gulden machen 10 (12, 26 rc.) Ffrkthlr.?

a. 1 Ffrkthlr. = $2\frac{1}{3}$ fl.; 10 Ffrkthlr = $10 \times 2\frac{1}{3}$ fl. od. $23\frac{1}{3}$ fl.

b. 3 Ffrkthlr. = 7 fl.; 10 oder $3 \times 3 + 1$ Ffrkthlr. = 3×7 oder 21 fl. + 2 fl. 20 kr. = 23 fl. 20 kr.

5) Preußische Thaler und östr. Gulden.

30 pr. Thlr. = 45 östr. Gulden; also ist 1 pr. Thlr. $\frac{1}{30}$ von 45 d. i. $1\frac{1}{2}$ östr. Gulden, und 2 pr. Thlr. = 3 östr. Gulden. Hieraus folgt, daß umgekehrt 3 östr. Gulden = 2 pr. Thlr., und daß also 1 östr. Gulden = $\frac{2}{3}$ pr. Thlr.

Beim Verwandeln pr. Thlr. in östr. Gulden kann man nun davon ausgehen, daß 1 pr. Thlr. = $1\frac{1}{2}$ östr. fl., oder auch davon, daß 2 pr. Thlr. = 3 östr. fl. Eben so kann man beim Verwandeln östr. Gulden in pr. Thlr. die Berechnung darauf gründen, daß 1 östr. fl. = $\frac{2}{3}$ pr. Thlr., oder darauf, daß 3 östr. fl. = 2 pr. Thlr. Das Weitere überlassen wir dem Lehrer.

Alles dieß mündlich. Die schriftliche Berechnung ist sehr einfach. Ein Beispiel genügt.

Aufgabe: 370 Vereinsthlr., wie viel Gulden?

Erste Weise.

Da 1 Vrsthlr. = 1 fl. + $\frac{1}{2}$ fl. + $\frac{1}{4}$ fl., so sind 750 Vrsthlr. =
750 fl.
375 fl.
187 fl. 30 kr.
1312 fl. 30 kr.

Zweite Weise.

4 Vereinsthlr. = 7 fl.

Nach dem Zweisatz.		Nach der Proportion:
4 Vrsthlr.	7 fl	4 Thlr. : 750 Thlr. = 7 fl. : x
750 „	?	

Sowie eine Waare gegen eine andere, so kann man auch eine Geldsorte gegen eine andere vertauschen. Man nennt dieß wechseln. Gewöhnlich werden größere Geldsorten gegen kleinere, oder Goldmünzen gegen Silbermünzen verwechselt. Bei Summen von Belang besorgt es der Wechsler oder Banquier. Dafür berechnet er ein Aufgeld oder Agio, das entweder für 1 Stück, oder für 100 festgesetzt wird.

Beisp. 1. Wie viel Friedrichsdor à 9 fl. 51 kr. erhält man für 1275 fl. Silbergeld, wenn für das Stück 3 kr. Agio zu zahlen sind?

Aufl. 1 Fdr. kommt auf 9 fl. 51 kr. + 3 kr. = 9 fl. 54 kr.; mithin erhält man so vielmal 1 Fdr., als $9\frac{9}{10}$ fl. in 1275 fl. enthalten sind.

Ausr. $9\frac{9}{10}$ | 1275
| 10
99 | 12750 = $128\frac{78}{99}$ Fdr.

1 Fdr. $9\frac{9}{10}$ oder $\frac{99}{10}$ fl.; $\frac{78}{99}$ Fdr. = $\frac{78}{99} \times \frac{99}{10}$ fl. = $7\frac{4}{5}$ fl.
Also erhält man für 1275 fl. 128 Fdr. und noch 7 fl. 48 kr. zurück.

Beisp. 2. Ein Kleinhändler hat für 360 fl. Scheidemünzen (Sechser, Groschen und Kreuzer); wie viel Vrsthlr. wird er dafür erhalten, wenn ihm auf 100 Stück noch 2 als Agio berechnet werden?

Durch den Zweisatz oder durch die Proportion:

a. 7 fl. machen 4 Vrsthlr.; was thun 360 fl.? Antw. $205\frac{5}{7}$ Thlr.

b. Wegen des Aufgeldes erhält er für 102 Thlr. in Scheidemünzen nur 100 Stck. Vrsthlr.; wie viel für $205\frac{5}{7}$ Thlr.?

Antw. $201\frac{81}{119}$ Thlr. = 201 Thlr. + 1 fl. $11\frac{8}{17}$ kr.

Durch den Kettensatz:

? Vthlr.	360 fl.
7	4 Thlr.
102	100 Thlr.

So oft 7 fl. in 360 fl. enthalten sind, so vielmal 4 Thlr. betragen diese. So oft 102 Thlr. in diesem enthalten sind, so vielmal 100 Stck. Vrsthlr. werden gezahlt.

Aufg. z. Zifferr., 15. Uebung.

Zu beliebigem Gebrauche geben wir hier noch den Werth verschiedener ausländischer Münzen in dem $52\frac{1}{2}$ fl.Fuß.

Staaten.	Geldsorte.	fl.	kr.	pf.
Frankreich . . . / Belgien . . . . / Schweiz	1 Frank à 100 Centimen . .	—	28	—
Niederlande . . .	1 Gulden à 100 Cent. . . .	1	—	—
Schweden . . .	1 Speciesthlr. à 48 Schilling	2	40	—
Rußland u. Polen	1 Rubel à 100 Kopeken . .	1	53	—
	Gold: ½ Imperial	9	48	—
Dänemark . . .	1 Reichsbanko-Thaler . . .	1	20	—
	1 Speciesthaler	2	40	—
Hamburg . . .	1 Mark Courant	—	43	—
	1 „ Banko, Rechnungsmünze	—	52	2
England	1 Schilling à 12 Pence . .	—	36	—
	1 Livre oder Pfund	12	—	—
Kirchenstaat . . .	1 Scudo à 100 Bajochi . .	2	30	—
Sardinien . . .	1 Lire à 100 Centisimi . . .	—	28	—
Portugal . . .	1 Krone à 1000 Reis . . .	2	50	—
Spanien	1 Piaster	2	30	—
	1 Reale	—	7	2
	1 Duros à 20 Realen . . .	2	27	—
Türkei	1 Piaster	—	6	1
	1 Zwanzig-Piasterstück . . .	2	5	—
Griechenland . .	1 Drachma- od. 100 Leptastck.	—	25	1
Nord- und Mittel-Amerika . . .	1 Dollar à 100 Cent. . . .	2	30	—
Brasilien . . .	1 Milreis	1	20	—
	Gold: 1 Eagle à 10 Dollar .	24	45	—
Chili	1 Piaster	2	20	—
	1 Unze Gold = 17 Piaster .			
China	1 Dollar à 1000 Cask. . .	3	37	2
Ostindien . . .	1 Rupie à 2 Schilling . . .	1	10	—

B. Maße und Gewichte.

Beispiel. 5 bayr. Ellen = 7 badischen; wie viel badische Ellen machen 120 bayrische?

a. Wenn 5 bayr. Ellen = 7 badischen, so beträgt 1 bayr. Elle $\frac{1}{5}$ von 7 d. i. $1\frac{2}{5}$ bad. Ellen; 120 bayr. Ellen machen also $120 \times 1\frac{2}{5} = 120 + 48$ oder 168 badische Ellen.

b. So vielmal 5 bayr. Ellen, so vielmal 7 badische. Also sind 120 oder 24×5 bayr. Ellen $= 24 \times 7$ oder 168 bad. Ellen.

Notizen zu ähnlichen Aufgaben:

2 bayr. Ell. = 3 frankf. Ell.		2 bayr. Schff. = 3 bad. Mltr.		
3 „ „ = 4 würtb. „		4 prß. „ = 1 bayr. Schff.		
4 „ „ = 5 preuß. „		5 würt. „ = 4 „ „		
7 „ „ = 10 augsb. „		7 darmst. Mltr. = 4 „ „		
9 „ „ = 5 franz. „		9 bayr. Schff. = 20 fr. Hectoliter.		
32 „ „ = 41 nürnb. „		10 eng. Quarter = 13 bayr. Schff.		

In den Maß- und Gewichtstabellen, welche für einen mehr allgemeinen Gebrauch bestimmt sind, ist der Werth gewöhnlich in dem französischen Maße oder Gewichte ausgedrückt. Um zu zeigen, wie man sich derselben zu bedienen habe, so soll es hier auch mit dem Flüssigkeitsmaße und mit dem Gewichte geschehen.

	Franz. Kubikzoll.		Grammen.
1 bayr. Eim. à 64 Ms.	= 3450	1 franz. Kilogramm	= 1000
1 bad. Ohm à 100 Ms.	= 7560	1 Zollpfund	= 500
1 würt. Eim à 160 Ms.	= 13470	1 bayr. Pfund	= 560
1 prß. Eim. à 60 Ms.	= 3460	1 hamb. Pfd.	= 484
1 franz. Hectoliter	= 5040	1 italienisches Pfd.	= 370
1 engl. Gallon	= 230	1 russisches Pfd.	= 410
1 östr. Eim. à 40 Ms.	= 2850	1 engl. Handels-Pfd.	= 454

Anm. Das östr. Pfund = dem bayerischen. In vielen deutschen Staaten ist das Zollgewicht als allgemeines Landesgewicht eingeführt, seit 1858 auch in Preußen; eben so in der Schweiz. Belgien und Holland haben das französische Maß und Gewicht.

Beisp. 1. Wie viel bayr. Eimer machen 25 bad. Ohm?

a. Man drückt zuerst das Verhältniß der beiden Maße in den möglichst kleinsten Zahlen aus.

Der bayr. Eimer = 3450 fr. Kubikzoll, das bad. Ohm = 7560; jener hat also 3450 Theile, wie dieses 7560; mithin verhält sich der bayr. Eimer zum bad. Ohm wie 3450 zu 7560 = 345 zu 756 = 115 zu 252. Es sind daher umgekehrt 252 bayr. Eim. = 115 bad. Ohm. Also:

Zweisatz.	Proportion.
115 bad. Ohm 252 b. E.	$115 : 25 = 252$ E. : x
25 „ „ ?	$x = 54\frac{18}{23}$ Eim.

b. Man nimmt die in der Tabelle gegebenen Zahlen, wie sie sind.

? Eim.	25 Ohm
1	7560 K. Z.
3450	1 Eim.
23	1260

25 Ohm = 25 × 7560 K. Zoll, und dieß sind so viel Eim., als 3450 K. Z. darin enthalten sind.

Beisp. 2. Wie viel Zollpfd. betragen 125 bayr. Pfd.?

a.

Mündlich. Das bayr. Pfd. = 560, das Zollpfd. = 500 Grammen; jenes verhält sich daher zu diesem wie 560 : 500; also sind umgekehrt

500 bayr. Pfd. = 560 Zllpfd.
100 „ „ = 112 „
50 „ „ = 56 „
25 „ „ = 28 „

125 oder 100 + 25 bayr. Pfd. betragen also 112 + 28 od. 140 Zllpfd.

Schriftlich.

100 b. Pfd.	112 Zllpfd.
125 „ „	?

100 : 125 = 112 Zllpfd. : x
x = 140 „

b.

? Zllpfd.	125 bayr. Pfd.
1	560 Grammen
500	1 Zllpfd.
1	140

Aufg. z. Zifferr., 16. Uebung.

II. Das Verhältniß der betreffenden Münzen, Maße und Gewichte zu einander selbst ist nicht bekannt, sondern ihr Verhältniß zu einem dritten.

Beispiel. Wie viel Dollar à 2 fl. 30 kr. machen 75 pr. Thlr.?

Berechnung:

Erste Weise. Wir wissen weder, wie viel 1 pr. Thlr. in Dollars, noch wie viel 1 Dollar in pr. Thalern beträgt. Wohl aber ist uns bekannt, wie viel jede von beiden Münzen nach süddeutscher Währung gilt. 1 pr. Thlr. = 1 fl. 45 kr., und 1 Dollar = 2 fl. 30 kr. Wir können daher jede Summe von beiden Geldsorten in Gulden, und jede Summe von diesen in jene verwandeln. Welchen Weg werden wir daher einschlagen, um zu finden, wie viel Dollars 75 pr. Thlr. betragen? Wir verwandeln die pr. Thaler in Gulden und die Gulden in Dollars.

1 pr. Thlr. = $1^3/_4$ fl. oder 4 pr. Thlr. = 7 fl.; 75 oder 18 × 4 + 3 pr. Thlr. also = 18 × 7 + $5^1/_4$ oder $131^1/_4$ fl. Diese verwandeln wir nun in Dollars. $2^1/_2$ fl. = 1 Dollar, und 5 fl. =

2 Dollar. So oft also 5 fl. in $131\frac{1}{4}$ fl. enthalten sind, so vielmal 2 Dollar betragen diese. 5 fl. sind in 130 fl. 26mal und in $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ fl. $\frac{1}{4}$mal, in $131\frac{1}{4}$ fl. also $26\frac{1}{4}$mal enthalten; folglich sind $131\frac{1}{4}$ fl. oder 75 pr. Thlr. = $26\frac{1}{4} \times 2$ oder $52\frac{1}{2}$ Dollar.

Zweite Weise. Beide Münzsorten können in Kreuzern ausgedrückt werden. 1 pr. Thlr. = 105 kr., 1 Dollar = 150 kr. Sie lassen sich also in gleiche Theile getheilt denken. 1 pr. Thlr. hat 105 Theile, wie 1 Dollar 150 hat; jener verhält sich daher zu diesem wie 105 : 150, oder wie 21 : 30, oder wie 7 : 10. Also sind umgekehrt 10 pr. Thlr. = 7 Dollar. Nun können wir die 75 pr. Thlr. geradezu in Dollars verwandeln. Da 10 pr. Thlr. = 7 Dollar, so sind 75 oder $7\frac{1}{2} \times 10$ pr. Thlr. = $7\frac{1}{2} \times 7$ oder $52\frac{1}{2}$ Dollar.

Verwandelt nun eben so

a. 50, 80, 120, 360 pr. Thlr. in Dollars! b. 63, 84, 175, 350 Dollar in pr. Thlr.! c. 18, 27, 84, 100 Ffrkthlr. in Vrsthlr.! d. 20, 48, 84, 100 Vrsthlr. in Ffrkthlr.!

Auch schriftlich werden dergleichen Aufgaben auf verschiedene Weise gerechnet.

Beispiel 1. 1575 Dollar, wie viel pr. Thaler?

Erste Weise.

Durch zwei Rechnungen. Durch die eine verwandelt man die Dollars in Gulden, durch die andere die Gulden in pr. Thaler. Geht man hierbei davon aus, daß 1 Dollar = $2\frac{1}{2}$ fl., und 1 pr. Thlr. = $1\frac{3}{4}$ fl., so hat man blos die entsprechenden Grund-Rechnungsarten anzuwenden.

1575 Doll. = 1575 fl.
1575 fl.
$787\frac{1}{2}$ fl.
$3937\frac{1}{2}$ fl.

$1\frac{3}{4}$ fl.	$3937\frac{1}{2}$ fl.
7	4
2	7875
1	2250 pr. Thlr.

Geht man aber davon aus, daß 2 Doll. = 5 fl. und 4 pr. Thlr. = 7 fl.; so rechnet man

nach dem Zweisatz

2 Doll.	5 fl.
1575 „	?
7 fl.	4 Thlr.
$3937\frac{1}{2}$ fl.	?

nach der Proportion.

2 : 1575 = 5 fl. : x
x = $3937\frac{1}{2}$.

7 : $3937\frac{1}{2}$ = 4 pr. Thlr. : x
x = 2250.

Zweite Weise.

Durch eine Rechnung, nämlich durch den Kettensatz und zwar

a.

? pr. Thlr.	1575 Doll.
1	$2\frac{1}{2}$ fl.
$1\frac{3}{4}$	1 pr. Thlr.

b.

? pr. Thlr.	1575 Doll.
2	5 fl.
7	4 pr. Thlr.

1575 Doll. sind 1575 × $2\frac{1}{2}$ fl., und dieß sind so viel pr. Thlr., als $1\frac{3}{4}$ fl. darin enthalten sind.

So oft 2 Doll. in 1575 Doll. enthalten sind, so oft 5 fl.; und so oft 7 fl. in diesem enthalten sind, so oft 4 pr. Thaler.

Beispiel 2. Man möchte gern wissen, wie viel augsburger Ellen 185 frankfurter machen, und findet (wie S. 286) in einer Tabelle, daß 2 bayr. Ellen = 3 frankf., und 7 bayr. E. = 10 augsburger.

a) Man verwandelt zuerst die frankf. Ellen in bayerische, und dann diese in augsburger.

Durch den Zweisatz.		Durch die Proportion.
3 fr. Ell.	2 b. Ell.	3 : 185 = 2 b. Ell. : x
185 „ „	?	x = $123\frac{1}{3}$
7 b. Ell.	10 augsb. E.	7 : $123\frac{1}{3}$ = 10 augsb. E. : x
$123\frac{1}{3}$ „ „	?	x = $176\frac{4}{21}$.

b. Durch eine Rechnung, nämlich durch den Kettensatz.

? augsb. E.	185 frkf. E.
3	2 b. Ell.
7	10 augs. E.
21	3700

So oft 3 frkf. E. in 185 frkf. Ellen enthalten sind, so oft 2 bayr. Ell., und so oft in diesen 7 bayerische Ellen enthalten sind, so oft 10 augsb. Ellen.

Aufg. z. Zifferr., 17. Uebung.

III. Verwandlungen mit Preisberechnung.

A. Mündlich.

Beispiel 1. Das bayr. Pfd. Waare kostet 42 kr.; wie hoch kommt das Zollpfund?

a. Ich verwandle das bayr. Pfd. in Zollpfund. 100 bayr. Pfd. = 112 Zollpfd.; also ist 1 bayr. Pfd. $\frac{1}{100}$ von 112 Zllpfd.; der 100. Theil von 112 Zllpfd. = $1\frac{12}{100}$ oder $1\frac{3}{25}$ Zllpfd. Nun heißt die Aufgabe: $1\frac{3}{25}$ Zllpfd. kosten 42 kr.; wie hoch kommt 1 Zllpfd.? Kosten $1\frac{3}{25}$ oder $\frac{28}{25}$ Pfd. 42 kr., so kostet $\frac{1}{25}$ Pfd. den 28. Theil von 42 kr. oder $1\frac{1}{2}$ kr., und 1 Pfd. kostet 25 × $1\frac{1}{2}$ kr., oder $37\frac{1}{2}$ kr.

b. Ich verwandle das Zollpfd. in bayr. Pfund. 112 Zllpfd. = 100 bayr. Pfd.; 1 Zllpfd. ist also der 112. Theil von 100 = $\frac{100}{112}$ oder $\frac{25}{28}$ bayr. Pfd. Nun heißt die Aufgabe: 1 bayr. Pfd. zu 42 kr.; was kosten $\frac{25}{28}$ bayr. Pfd.? — Wenn 1 Pfd. 42 kr. kostet, so kostet $\frac{1}{28}$ Pfd. den 28. Theil von 42 kr. = $1\frac{1}{2}$ kr, und $\frac{25}{28}$ Pfd. kosten 25 × $1\frac{1}{2}$ kr. oder $37\frac{1}{2}$ kr.

Beispiel 2. Wie berechnen sich 70 Zllpfd., wenn 25 bayr. Pfd. 17 fl. 30 kr. kosten?

a. 25 bayr. Pfd. = 28 Zllpfd. Was also 25 bayr. Pfd. kosten,

das kosten auch 28 Zllpfd. Mithin heißt nun die Aufgabe: 28 Zllpfd. kosten 17 fl. 30 kr.; wie berechnen sich 70 Zllpfd.? — Kosten 28 Pfd. 17 fl. 30 kr., so kosten 14 Pfd. die Hälfte von 17 fl. 30 kr., nämlich 8 fl. 45 kr., und 70 oder 5 × 14 Pfd. kosten 5 × 8 fl. 45 kr. = 43 fl. 45 kr.

b. 28 Zllpfd. = 25 bayr. Pfd., 14 Zllpfd. = $12\frac{1}{2}$ bayr. Pfd., und 70 oder 5 × 14 Zllpfd. = 5 × $12\frac{1}{2}$ oder $62\frac{1}{2}$ bayr. Pfd. Nun heißt es: 25 bayr. Pfd. zu 17 fl. 30 kr., wie hoch kommen $62\frac{1}{2}$ bayr. Pfd.? — 50 Pfd. kosten 2 × 17 fl. 30 kr. = 35 fl., und $12\frac{1}{2}$ Pfd. kosten $\frac{1}{2}$ × 17 fl. 30 kr. = 8 fl. 45 kr.; 35 fl. + 8 fl. 45 kr. = 43 fl. 45 kr. Also kosten $62\frac{1}{2}$ bayr. oder 70 Zllpfd. 43 fl. 45 kr.

Aufg. z. Kopfr., S. 35.

B. Schriftlich.

Beispiel: 120 berliner Ellen Zeug kommen auf 215 Thlr.; wie hoch berechnen sich 10 würzburger Ellen, wenn 5 berliner Ellen = 4 bayerischen, und 5 bayr. Ellen = 7 würzburger? Antw. 31 fl. 15 kr.

Wollte man diese Aufgabe nach dem Zweisatze oder nach der Proportion rechnen, so würden 4 Ansätze erforderlich sein. Durch den Kettensatz geht es auf einmal.

? fl.	10 würzb. E..
würzb. E. 7	5 bayr. E.
bayr. E. 4	5 berl. E.
berl. E. 120	215 pr. Thlr.
pr. Thlr. 4	7 fl.
172	5375 fl.

Denkweise:

So oft 7 würzb. Ell. in 10 würzb. Ell. enthalten sind, so vielmal 5 bayr. Ell. kommen.

So oft in diesen 4 bayr. E. enthalten sind, so vielmal 5 berl. Ell. kommen.

So oft in diesen 120 berl. Ellen enthalten sind, so vielmal 215 pr. Thlr. kommen.

So oft in diesen 4 pr. Thlr. enthalten sind, so vielmal 7 fl. kommen.

Aufg. z. Zifferr., 18. Uebung.

Procent-Rechnung.

Der Werth der Schnittwaaren wird meistens per Elle, der Flüssigkeiten per Maas und Eimer, der Materialwaaren per Ctr., Pfd., Lth, Qt., vieler zählbaren Dinge per Stück, Dutzend, Mandel und Schock festgesetzt. Zins und Rabatt, oft auch Gewinn und Verlust, sowie die chemischen Bestandtheile mancher Dinge u. s. w. pflegt man vom Hundert (= pro cent = %) zu bestimmen. Was also z. E. bei den Schnittwaaren die Elle ist, das ist in den Fällen, wo der Werth nach Procenten bestimmt zu werden pflegt, das Hundert. Und wie dort der Werth gewöhnlich von 1 Elle gegeben und von einer größeren oder kleineren Länge zu berechnen ist, oder umgekehrt; so ist hier entweder der Werth vom Hundert gegeben und von einer größeren oder kleineren Summe zu suchen, oder es ist der Werth von einer größeren oder kleineren Summe als 100 gegeben und vom Hundert zu berechnen.

A. Mündlich.

a. Der Werth vom Hundert wird bestimmt.

1) Ein Handelsmann verkauft für 200 fl. Waaren und gewinnt damit 42 fl.; wie viel proc., d. i. wie viel gewinnt er mit 100 fl.? (Gewinnt man mit 200 fl. 42 fl., so gewinnt man mit 100 fl. die Hälfte von 42 fl., nämlich 21 fl.; also ist der Gewinn 21 %.) — 2) Ein Weinhändler kauft für 800 fl. Wein, verliert aber beim Verkauf 75 fl.; wie viel proc. also? (Verliert man mit 800 fl. 75 fl., so verliert man mit 100 fl. $^1/_8$ von 75 = $9^3/_8$ fl., der Verlust = $9^3/_8$ %.) — 3) Von 400 Pfd. Kartoffeln erhält man nur 98 Pfd. getrocknete Scheiben; wie viel proc.? ($^1/_4$ von 98 Pfd. = $24^1/_2$ Pfd.) — 4) 1000 Pfd. Winterreps geben 330 Pfd. Oel, wie viel proc.? ($^1/_{10}$ von 330 = 33 %.) — 5) 1200 Pfd. Rohflachs ergeben 210 Pfd. geschwungenen Flachs, wie viel proc.? ($^1/_{12}$ von 210 = $17^1/_2$ %.) — 6) Von 2500 Mann Soldaten fielen in einem Gefechte 200 Mann, wie viel proc. beträgt der Verlust? ($^1/_{25}$ von 200 = 8 %.)

---

7) 50 Pfd. Leinsamen geben 14 Pfd. Oel; wie viel proc.? (Geben 50 Pfd. Leinsamen 14 Pfd. Oel, so geben 100 oder 2 × 50 Pfd. Leinsamen 2 × 14 oder 28 Pfd.) — 8) $33^1/_3$ Pfd. Sonnenblumen geben 5 Pfd. Oel; wie viel proc.? (15 %.) — 9) 25 Pfd. Bucheckern geben 4 Pfd. Oel; wie viel proc.? (16 %.) — 10) 20 Pfd. Kartoffeln enthalten 14 Pfd. Wasser; wie viel proc.? (70 %.) — 11) Von 10 Pfd. Rindfleisch gehen durchs Kochen 2 Pfd., durchs Braten $1^1/_2$ Pfd. ab; wie viel beträgt der Verlust proc.? (20 %, 15 %.) — 12) Mit 5 kr. gewinnt man $1^1/_2$ kr.; wie viel proc.? (30 %.) — 13) $66^2/_3$ Pfd. Schweinefleisch enthalten 16 Pfd. nährenden Stoff; wie viel proc.? ($66^2/_3$ = 2 × $33^1/_3$, 100 = 3 × $33^1/_3$. Man geht also von $66^2/_3$ auf $33^1/_3$ und dann auf 100; $66^2/_3$ Pfd. enthalten 16 Pfd. Nahrungsstoff, $33^1/_3$ = $^1/_2$ von 16 Pfd. = 8 Pfd., 100 Pfd. = 3 × 8 oder 24 Pfd.) — 14) Mit 75 kr. gewinnt Jemand 36 kr.; wie viel proc.? (48 %.) — 15) Von 40 Kindern starben in ihrem ersten Lebensjahre 7, wie viel proc.? ($17^1/_2$ %.) — 16) Eine Hausfrau mischt unter 50 Pfd. Kornmehl 30 Pfd. Gerstenmehl; wie viel proc. Gerstenmehl sind unter der Mischung? ($37^1/_2$ %.) — 17) Ein Fabrikherr erhöht den Tagelohn seiner Arbeiter von 48 kr. auf 54 kr., um wie viel proc. also? (48 macht 6, 4 macht $^1/_2$, 100 macht $12^1/_2$.) — 18) Der Bauer A erntet von einem Ackerfeld 15 Schff. Korn, sein Nachbar von einem gleichgroßen Acker 18 Schff.; wie viel proc. erntet dieser mehr als jener? (15 macht 3, 5 macht 1, 100 macht 20 × 1 = 20, also 20 %.)

---

19) 150 Pfd. Weizenkörner gaben $1^7/_8$ Pfd. Asche, die in Wasser löslich war; wie viel proc.? (150 = $1^7/_8$ Pfd., 50 = $^1/_3$ von $1^7/_8$ = $^5/_8$ Pfd., 100 = 2 × $^5/_8$ Pfd. = $1^1/_4$ Pfd.; also $1^1/_4$ %.) — 20) 125 Pfd. getrocknete Kartoffelknollen enthalten 8 Pfd. lösliche

Asche; wie viel proc.? ($6^2/_5$ %.) — **21)** A stieg von 450 fl. Gehalt auf 525 fl.; wie viel proc. beträgt seine Einnahme jetzt mehr? ($16^2/_3$ %.) — **22)** Von 750 fl. Kapital rettete A bei einem Concurse 600 fl.; wie viel betrug sein Verlust proc.? (750 — 600 = 150; an 750 fl. verliert A 150 fl., an 50 fl. also $^1/_{15}$ von 150 fl. = 10 fl., an 100 fl. 2 × 10 = 20 fl.) — **23)** $1^1/_4$ Mtz Aussaat geben 18 Mtz. Ernte; wie viel proc. also? (Erntet man von $1^1/_4$ oder $^5/_4$ Mtz. 18 Mtz., so macht es auf $^1/_4$ Mtz. $3^3/_5$ Mtz., auf 1 Mtz. 4 × $3^3/_5$ = $14^2/_5$ Mtz. und auf 100 × $14^2/_5$ = 1440 Mtz.) — **24)** Aus $12^1/_2$ Pfd. rohem Hanfe erhält man 7 Pfd. langen Hanf; wie viel proc.? (56 %.)

b. Der Werth vom Hundert ist gegeben.

1) A kauft 1 Mrg. Wiesen um 400 fl. und berechnet, daß ihm so sein Geld 8 % abwirft, wie viel Gulden also? (Werfen 100 fl. 8 fl. ab, so 400 fl. 4 × 8 oder 32 fl.) — **2)** Das Fleisch hat durchschnittlich 26 % nährende Stoffe; wie viel Pfd. Nahrungsstoff enthalten demnach 200 Pfd. Fleisch? 500 Pfd. Fl.? 50 Pfd. Fl.? 25 Pfd. Fl.? (52, 130, 13, $6^1/_2$ Pfd. Nahrungstheile.) — **3)** Im Allgemeinen rechnet man von dem in die Mühle gegebenen Getreide: auf die Mahlgebühr oder Mitze 10 %, auf das Verstäuben 6 %, auf Kleie 14 % und auf Mehl 70 %; wie viel Pfund macht jedes von 1 Schff. Weizen zu 300 Pfd.? (30 Pfd. Mitze, 18 Pfd. Mehlstaub, 42 Pfd. Kleie, 210 Pfd. Mehl.) — **4)** Durch Eintrocknen gehen beim Aufspeichern von Körnerfrüchten in dem ersten Jahre 3 % verloren; wie viel wird von 80 Schff. neuer Frucht nach 12 Monaten noch vorhanden sein? (100 Schff. machen 3, 20 machen $^3/_5$, 80 machen 4 × $^3/_5$ = $2^2/_5$; 80 — $2^2/_5$ = $77^3/_5$.) — **5)** Neues Wiesenheu verliert in den ersten 5 Monaten $11^1/_2$ % am Gewichte; wie viel beträgt der Verlust von 15 Wagen Heu à 30 Ctr. in dieser Zeit? (15 × 30 = 450; $4^1/_2$ × $11^1/_2$ = $51^3/_4$.) — **6)** Ein Landmann hat seine Früchte auf dem Halme gegen Hagelschlag mit 1275 fl. versichern lassen und zahlt dafür 4 % an Prämie; wie viel also? (1275 = $12^3/_4$ Hundert; $12^3/_4$ × 4 = 51.)

Aufg. z. Kopfr., Nr. 1—21.

Bisher haben wir, im Ganzen genommen, immer eine und dieselbe Berechnungsweise angewendet. Es ist dieß diejenige, welche der schriftlichen Berechnung zu Grunde liegt. Für das Kopfrechnen gibt es jedoch eine zweite, welche in vielen Fällen jener vorzuziehen ist. Damit nun der Lehrer die Eigenthümlichkeit der einen wie der andern kennen lerne und hierdurch zugleich des Unterschieds derselben sich klar bewußt werde, so stellen wir beide an einem Beispiele neben einander. Die Aufgabe sei: Wie viel Pfd. Oel erhält man von 360 Pfd. Mohnsamen, wenn dessen Oelgehalt $33^1/_3$ % beträgt?

Der Oelgehalt beträgt $33^1/_3$ %, d. h. 100 Pfd. Mohnsamen geben $33^1/_3$ Pfd. Oel. Hieraus ist nun zu berechnen, wie viel Pfd. Oel

360 Pfd. Mohnsamen geben. Der leichteren Uebersicht wegen setzen wir dieß in Proportion.

100 Pfd. Mohns. : 360 Pfd. Mohns. = 33$^1/_3$ Pfd. Oel : x.

a. Bisherige Weise. Man vergleicht die 100 Pfd. Mohn, deren Oelbetrag bekannt ist, mit den 360 Pfund Mohn, deren Oelbetrag gesucht werden soll, das erste Glied also mit dem zweiten. Hieraus ergibt sich, daß die 360 Pfd. Mohn das 3$^3/_5$fache von den 100 Pfd. Mohn sind. Da nun 100 Pfd. Mohn 33$^1/_3$ Pfd. Oel geben, so folgt, daß man von 360 Pfd. Mohn auch das 3$^3/_5$fache von 33$^1/_3$ Pfd. Oel, nämlich 120 Pfd. erhalten wird.

b. Andere Weise. Man vergleicht die Quantität des Mohns, von welcher der Oelbetrag bekannt ist, mit der Quantität des daraus gewonnenen Oels selbst, das erste Glied also mit dem dritten oder das Ganze mit dem Theile. 100 Pfd. Mohn geben 33$^1/_3$ Pfd. Oel; 33$^1/_3$ Pfd. sind $^1/_3$ von 100 Pfd.; das Gewicht des Oels beträgt also $^1/_3$ von dem Gewichte des Mohns; mithin wird auch das Oel von 360 Pfd. Mohn $^1/_3$ davon, nämlich 120 Pfd. betragen.

Die zweite Weise ist hier unstreitig die bessere. Und warum? Weil das dritte Glied (die Zahl der Procente) ein einfacher Theil von 100 ist, während das zweite Glied weder dieß, noch ein reines Vielfaches von 100 ist. Dieselbe wird daher in allen Fällen mit Vortheil angewendet, wo die Zahl der Procente ein bequemer Bruchtheil vom Hundert ist.

So ist's auch, wenn wir die Aufgabe umkehren und setzen: Von 360 Pfd. Mohn erhielt man 120 Pfd. Oel; wie viel proc.?

360 Pfd. Mohn : 100 Pfd. Mohn = 120 Pfd. Oel : x

a. Bisherige Weise. Man vergleicht die 360 Pfd. Mohn mit den 100 Pfd. Mohn, und da 100 weder ein reines Vielfaches, noch ein einfacher Theil von 360 ist; so geht man von 360 Pfd. auf 20 Pfd. und von 20 Pfd. auf 100 Pfd. Facit: 33$^1/_3$ %.

b. Andere Weise. Man vergleicht die 360 Pfd. Mohn mit den daraus gewonnenen 120 Pfd. Oel, woraus sich ergibt, daß die Quantität des Oels $^1/_3$ von der Quantität des Mohns ist. Also, so schließen wir nun, muß auch das Oel von 100 Pfd. Mohn $^1/_3$ von 100 Pfd. d. i. 33$^1/_3$ Pfd. betragen.

Die zweite Weise führt auch hier leichter und schneller zum Ziele, als die erste. Darum ist der Schüler auch besonders darin zu üben. Als Vorübung dient das Folgende:

a. 50	procent	= 50	von 100	= $^1/_2$	vom	Ganzen.
33$^1/_3$	"	= 33$^1/_3$	v. 100	= $^1/_3$	"	"
25	"	= 25	von 100	= $^1/_4$	"	"
20	"	= 20	von 100	= $^1/_5$	"	"
12$^1/_2$	"	= 12$^1/_2$	v. 100	= $^1/_8$	"	"
10	"	= 10	von 100	= $^1/_{10}$	"	"
5	"	= 5	von 100	= $^1/_{20}$	"	"
4	"	= 4	von 100	= $^1/_{25}$	"	"
2	"	= 2	von 100	= $^1/_{50}$	"	"
1	"	= 1	von 100	= $^1/_{100}$	"	"

b. $\frac{1}{2}$ vom Ganzen	= 50 proc.		$\frac{1}{7}$ vom Ganzen	= $14\frac{2}{7}$ proc.	
$\frac{1}{3}$ " "	= $33\frac{1}{3}$ "		$\frac{1}{8}$ " "	= $12\frac{1}{2}$ "	
$\frac{2}{3}$ " "	= $66\frac{2}{3}$ "		$\frac{1}{9}$ " "	= $11\frac{1}{9}$ "	
$\frac{1}{4}$ " "	= 25 "		$\frac{1}{10}$ " "	= 10 "	
$\frac{3}{4}$ " "	= 75 "		$\frac{1}{15}$ " "	= $6\frac{2}{3}$ "	
$\frac{1}{5}$ " "	= 20 "		$\frac{1}{20}$ " "	= 5 "	
$\frac{2}{5}$ " "	= 40 "		$\frac{1}{25}$ " "	= 4 "	
$\frac{3}{5}$ " "	= 60 "		$\frac{1}{30}$ " "	= $3\frac{1}{3}$ "	
$\frac{4}{5}$ " "	= 80 "		$\frac{1}{40}$ " "	= $2\frac{1}{2}$ "	
$\frac{1}{6}$ " "	= $16\frac{2}{3}$ "		$\frac{1}{50}$ " "	= 2 "	

Wird durchgesprochen und eingeübt, wie folgt:

50% gewinnen heißt, mit 100 fl. 50 fl., mit 100 kr. 50 kr., mit 100 Thlr. 50 Thlr., mit 100 pf. 50 pf., überhaupt also mit 100 50 oder die Hälfte gewinnen; wer also 50% gewinnt, der gewinnt mit 200 fl. die Hälfte von 200 fl., mit 300 fl. die Hälfte von 300 fl., mit 400 Thlrn. die Hälfte von 400 Thlrn., mit 48 kr. $\frac{1}{2} \times$ 48 kr., mit 13 Gr. $\frac{1}{2} \times$ 13 Gr., mit 6 pf. $\frac{1}{2} \times$ 6 pf., also immer die Hälfte vom Ganzen.

1) A verliert durch einen Bankrott die Hälfte seines Vermögens; wie viel proc. also? (50%). — 2) Ein Wohlthäter schenkt zur Armenstiftung seines Ortes $\frac{3}{8}$ seines Geldes, wie viel proc.? ($\frac{1}{8}$ von 100 $= 12\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8} = 3 \times 12\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$; also $37\frac{1}{2}$%.) — 3) Ein Kaufmann gewinnt mit 10 kr. 4 kr., wie viele Theile vom Ganzen also und wie viel proc.? ($4 = \frac{2}{5}$ von 10; $\frac{2}{5}$ von $100 = 40$; also 40%.) 4) Der Kopf, die Zunge und die Füße eines Ochsen betragen $\frac{1}{20}$, die Haut $\frac{1}{12}$ des lebenden Gewichts; wie viel proc.? (5%, $8\frac{1}{3}$%.) — 5) Bei einem Schweine rechnet man, daß das Fleischgewicht 75% des lebenden betrage; welchen Theil also? ($\frac{3}{4}$.) — 6) Das Hammelfleisch verliert beim Braten 24%, welchen Theil also vom Ganzen? (1% $= \frac{1}{100}$, 24% $= \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.) — 7) In England leben 50% der Einwohnerzahl in Städten, im Königreiche Sachsen $33\frac{1}{3}$%, in Frankreich 25%, in Bayern 24%; welche Theile also vom Ganzen? ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{25}$.) — 8) A, der 80 fl. Miethe zahlte, wird um 20 fl. gesteigert, mithin um wie viel %? (20 fl. sind $\frac{1}{4}$ von 80 fl.; A wird also um $\frac{1}{4}$ gesteigert; das macht vom Hundert $\frac{1}{4}$ von 100 oder 25; die Erhöhung des Miethzinses beträgt also (25%.) — 9) B bietet die Elle zu 2 fl. 40 kr., gibt sie aber um 2 fl. 20 kr., wie viel proc. also billiger? (2 fl. 40 kr. — 2 fl. 20 kr. = 20 kr.; 20 kr. sind $\frac{1}{8}$ von 2 fl. 40 kr.; das macht vom Hundert $\frac{1}{8}$ von 100 oder $12\frac{1}{2}$; er gibt die Elle also um $12\frac{1}{2}$% billiger, als er sie bot.)

Aufg. z. Kopfr., Nr. 22—40.

B. Schriftlich.

1) Jemand kauft sich für 775 fl. ein Grundstück; dasselbe gewährt ihm jährlich durch Verpachtung einen Reinertrag von 51 fl. 30 kr.; wie viel proc. wirft ihm die Kaufsumme ab?

Aufl. Berechnen soll ich, wie viel 100 fl. von der Kaufsumme jährlich abwerfen, und die Aufgabe sagt mir, wie viel die **ganze** Kauf-

summe abwirft. Die Aufgabe ist also die: 775 fl. werfen $51\frac{1}{2}$ fl. ab, wie viel 100 fl.?

Zweisatz.		Proportion:
775 fl. K.	$51\frac{1}{2}$ fl.	$775 : 100 = 51\frac{1}{2}$ fl. : x
100 fl. K.	?	$x = 6\frac{20}{31}$ %.

2) A verkauft den Scheffel Weizen einmal für 18 fl. 36 kr. und einmal für 16 fl. 42 kr.; wie viel proc. löste er dießmal weniger?

Ausr. 18 fl. 36 kr.
16 fl. 42 kr.
1 fl. 54 kr.

Von $18\frac{3}{5}$ fl. betrug der Mindererlös $1\frac{9}{10}$ fl.; wie viel von 100 fl.?

$18\frac{3}{5}$ fl.	$1\frac{9}{10}$ fl.	$18\frac{3}{5} : 100 = 1\frac{9}{10} : x$
100 „	?	$x = 10\frac{20}{93}$ %.

Aufg. z. Zifferr., 19. und 20. Uebung.

3) Nach Angabe der Chemiker enthält die Eichenrinde 15 % Gerbestoff; wie viel Gerbestoff enthalten demnach 8 Ctr. 65 Pfd. Eichenrinde?

Aufl. Wenn man 100 Pfd. trockene Eichenrinde mahlt und durch Wasser den Gerbestoff herauszieht, die Rinde dann wieder trocknet und wiegt; so hat sie dann nur noch ein Gewicht von 85 Pfd. Die 100 Pfd. Eichenrinde enthielten also 15 Pfd. Gerbestoff. Nach der Aufgabe ist zu berechnen, wie viel dieses Stoffs 8 Ctr. 65 Pfd. oder 865 Pfd. Eichenrinde enthalten.

100 ℔ R.	15 ℔ G.	100 : 865 = 15 ℔ : x
865 ℔ „	?	$x = 129\frac{3}{4}$ ℔.

4) A betheiligte sich bei einem Eisenbahn-Unternehmen mit 3500 fl. und verkaufte seine Aktien wieder, nachdem sie um $13\frac{1}{2}$ % gestiegen waren; wie viel betrug sein Erlös?

Aufl. A trat einer Gesellschaft bei, welche auf ihre Kosten einen Eisenbahnbau unternahm, und zahlte zu diesem Zwecke 3500 fl. Dafür erhielt er Aktien, d. h. gleichlautende schriftliche Scheine (etwa über je 500 fl. einen), worin ihm zugleich ein verhältnißmäßiger Antheil an dem jährlichen Reinertrag der Bahn zugesichert ward. Da später die Bahn eine hohe Einnahme und daher auch einen guten Antheil (eine gute Dividende) für die Aktienbesitzer abwarf; so wurden die Aktien von Andern zu kaufen gesucht. Sie stiegen deßhalb im Preise. Gewöhnlich wird dieß nun nach Procenten bestimmt. Zahlt man z. B. für eine Aktie, welche auf 500 fl. lautet, 500 + 5 fl.; so macht das für 100 fl. 100 + 1 fl. Die Aktien sind also um 1 % gestiegen; sie stehen 1 % über pari = 101. Sind also die Aktien des A um $13\frac{1}{2}$ proc. gestiegen, so kostet jedes Hundert $100 + 13\frac{1}{2} = 113\frac{1}{2}$ fl.

100 fl.	$113\frac{1}{2}$ fl.		$100 : 3500 = 113\frac{1}{2}$ fl. : x
3500 fl	?		$x = 3972\frac{1}{2}$ fl.

Aufg. z. Zifferr., 21. u. 22. Uebung.

Gewinn- und Verlust-Rechnung.

Werden erkaufte Gegenstände wieder verkauft, so beträgt der Erlös daraus entweder eben so viel, oder mehr oder weniger als der Einkaufspreis. Der Mehrerlös ist Gewinn, der Mindererlös Verlust. Gewinn und Verlust sind also der Unterschied zwischen der Ausgabe für den Einkauf und der Einnahme aus dem Verkaufe. Demnach kommen bei der Gewinn- und Verlustrechnung zunächst dreierlei Werthe vor: der Einkaufspreis, der Verkaufspreis und der Unterschied zwischen beiden — Gewinn und Verlust. Sind zwei dieser Stücke gegeben, so läßt sich das dritte durch Rechnung finden. Also sind, da jedes derselben in Frage stehen kann, 3 Formen von Aufgaben möglich. Sie lassen sich, wenn man den Einkaufspreis mit a, den Verkaufspreis mit b und den Unterschied mit c bezeichnet, wie folgt, darstellen:

Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.
a, b.	c.	a, c.	b.	b, c.	a.

Gesetzt, man habe Gelegenheit, bei einem Geschäfte mit je 25 fl. 8 und bei einem anderen Geschäfte mit je 40 fl. 13 zu gewinnen. So entsteht die Frage: welches derselben bietet den größeren Gewinn? Um dieß bestimmen zu können, so muß man wissen, wie viel in beiden Fällen mit einer gleichen Summe gewonnen wird. Als solche läßt sich jede beliebige Zahl annehmen. Gewöhnlich setzt man 100. Man sucht also den Gewinn pro cent. Gewinnt man mit 25 fl. 8, so werden mit 100 oder 4mal 25 fl. 4mal 8 oder 32 fl. gewonnen. Gewinnt man aber mit 40 fl. 13, so beträgt der Gewinn von 100 d. i. von $2\frac{1}{2}$mal 40 fl. $2\frac{1}{2}$mal 13 oder $32\frac{1}{2}$ fl., mithin $\frac{1}{2}$% mehr als im vorigen Falle. — Der Gewinn und Verlust pro cent ist daher in besonderen Fällen eben so wohl zu wissen nöthig, als der Gewinn und Verlust überhaupt. Er ist der vierte Begriff in der Gewinn- und Verlustrechnung und kann in den vorhin bezeichneten 3 Formen an die Stelle jedes der drei Werthe treten. Dadurch lassen sich, wie folgende Uebersicht ergibt, wieder 3mal 3 oder 9 verschiedene Formen von Aufgaben bilden.

Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.	Gegeben,	gesucht.
a, b.	%.	a, c.	%.	b, c.	%.
a, %.	c.	a, %.	b.	b. %	a.
%. b.	c.	%. c	b	% c.	a.

Die Mannigfaltigkeit der Aufgaben dieser Art wird aber noch vermehrt, wenn man die Angaben zum Theil auf die ganze Quantität, zum Theil auf einen Theil derselben, und die Procente auf eine bestimmte Zeit bezieht.

A. Aufgaben ohne Procent-Bestimmung.

a. Der Gewinn oder Verlust wird gesucht.

Beispiel 1. A kauft 25 Ellen zu 40 fl. und gibt die Elle zu 2 fl. 24 kr.; wie viel hat er Gewinn?

Aufl. Um den Gewinn von einer gewissen Sache oder Quantität Waare bestimmen zu können, so muß man wissen, was sie im Einkauf und im Verkauf kostet. Nach unserer Aufgabe ist zu suchen, wie viel A an 25 Ellen gewinnt. Also muß ich wissen, was ihn diese gekostet haben, und was er dafür löst. Was ihn die 25 Ellen gekostet haben, ist uns aus der Aufgabe bekannt, nämlich 40 fl.; wie viel er aber dafür einnimmt, ist nicht geradezu gesagt; sondern es ist nur angegeben, was er für die Elle löst. Also müssen wir's berechnen. Für die Elle erhält er 2 fl. 24 kr.; mithin für 25 Ellen 25 × 2 fl. 24 kr. oder 60 fl. Was A über 40 fl. löst, ist Gewinn. Da er 60 fl. löst, so beträgt sein Gewinn 60—40 oder 20 fl.

Beisp. 2. B kauft den Schff. Linsen für 17 fl. 36 kr. und verkauft die Mtz. für 2 fl. 54 kr.; wie viel wird er an $4^1/_2$ Schff. gewinnen oder verlieren?

Aufl. Hier ist zu suchen, wie viel der Gewinn oder Verlust von $4^1/_2$ Schff. beträgt. Das kann ich finden, wenn ich weiß, was dieselben im Einkauf und im Verkauf kosten. Aus der Aufgabe wissen wir weder das eine, noch das andere. Also müssen wir beides berechnen. Das gibt zwei besondere Aufgaben. Die erste ist: 1 Schff. kostet den B 17 fl. 36 kr.; was kosten ihn $4^1/_2$ Schff.? Antwort: $4^1/_2$ × 17 fl. 36 kr. = 79 fl. 12 kr. Die andere ist: Für 1 Mtz. löst B 2 fl. 54 kr.; wie viel für $4^1/_2$ Schff. oder 27 Mtz.? Antwort: 27 × 2 fl. 54 kr. = 78 fl. 18 kr. Der Ankauf beträgt 79 fl. 12 kr., der Erlös nur 78 fl. 18 kr.; also verkauft B mit Verlust. Er verliert an den $4^1/_2$ Schff. 79 fl. 12 kr. — 78 fl. 18 kr. = 54 kr.

Die Aufgabe läßt sich noch auf eine zweite und dritte Weise berechnen. Wie viel B an $4^1/_2$ Schff. verliert, kann nämlich auch gefunden werden, wenn man weiß, wie viel er an einem Scheffel verliert, oder wenn man weiß, wie viel er an einer Metz verliert. Will man zuerst suchen, wie viel B an dem Scheffel verliert, so muß man den Einkaufspreis und den Verkaufspreis von dem Scheffel kennen; und will man zuerst suchen, wie viel B an der Metz verliert, so muß man sowohl den Einkaufspreis, als den Verkaufspreis von der Metz wissen.

Hieraus geht überhaupt hervor: um den Gewinn oder Verlust bestimmen zu können, so muß man den Einkaufspreis und den Verkaufspreis **von einer gleichen Quantität** Waare kennen, und ist dieß in der Aufgabe nicht gegeben, so ist das Erste, es zu suchen.

b. Der Verkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. Ein Kaufmann zahlt für 40 Pfd. Gewürz 336 fl. und will am Pfd. 3 fl. 12 kr. gewinnen; wie muß er das Loth verkaufen?

Aufl. Der Verkaufspreis beträgt so viel, als der Einkaufspreis und der Gewinn zusammen genommen. Will ich also finden können, wie das Loth zu verkaufen

ist; so muß ich den Einkaufspreis und den Gewinn von 1 Loth wissen, und da die Aufgabe dieß nicht sagt, so muß ich es berechnen. Das gibt wieder zwei besondere Aufgaben. Die erste ist: 40 Pfd. kosten im Einkaufe 336 fl.; wie hoch kommt das Loth? Die andere: Am Pfund will man 3 fl. 12 kr. gewinnen; wie viel am Loth? — Ausr. 40 Pfd. machen 336 fl.; 1 Pfd. macht $^1/_{40}$ davon; $^1/_4$ von 336 fl. = 84 fl., und $^1/_{10}$ von 84 fl. = 8 fl. 24 kr.; 1 Pfd. kostet 8 fl. 24 kr., mithin 1 Lth. $^1/_{32}$ davon = $15^3/_4$ kr. So viel kostet das Loth im Einkauf. Nun berechne ich den Gewinn. Derselbe beträgt vom Pfund 3 fl. 12 kr., vom Loth also $^1/_{32}$ von 3 fl. 12 kr.; $^1/_4$ von 3 fl. 12 kr. = 48 kr., und $^1/_8$ von 48 kr. = 6 kr.; $15^3/_4$ + 6 kr. = $21^3/_4$ kr. Das Loth ist also um 21 kr. 3 pf. zu verkaufen.

Wie das Loth zu verkaufen ist, kann übrigens auch gefunden werden, wenn man weiß, wie das Pfund, oder wie die 40 Pfd. zu verkaufen sind. Also noch auf zweierlei Weise. Im erstern Falle muß man den Einkaufspreis und den Gewinn vom Pfunde kennen, im andern Falle den Einkaufspreis und den Gewinn von 40 Pfd., mithin immer den Einkaufspreis und den Gewinn von einer gleichen Quantität.

Beisp. 2. Ein Melber kauft 5 Ctr. Mehl, den Ctr. zu 10 fl. 48 kr.; die Mehlpreise fallen, und er muß das Pfd. mit $1^1/_2$ kr. Schaden verkaufen; wie viel wird er für 5 Ctr. lösen?

a. Die 5 Ctr. kosteten 5 × 10 fl. 48 kr. = 54 fl.; daran werden verloren 5 × 100 × $1^1/_2$ kr. = 12 fl. 30 kr.; 54 fl. — 12 fl. 30 kr. = 41 fl. 30 kr.

b. Aus dem Ctr. werden gelöst 10 fl. 48 kr. weniger 100 × $1^1/_2$ kr. = 10 fl. 48 kr. — 2 fl. 30 kr. = 8 fl. 18 kr.; aus 5 Ctr. 5 × 8 fl. 18 kr.

c. Der Einkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. Ein Händler verkauft 12 Ctr. Hopfen, den Ctr. zu 95 fl.; wie hat er den Ctr. gekauft, wenn er im Ganzen 150 fl. gewinnt?

Aufl. So viel der Händler am Ctr. gewinnt, um eben so viel hat er ihn billiger eingekauft, als verkauft. Um daher den Einkaufspreis zu finden, so muß man den Gewinn vom Verkaufspreis abziehen. Daher muß man auch den Verkaufspreis und den Gewinn kennen und zwar von einer und derselben Quantität Waare, hier also entweder a. von 1 Ctr. oder b. von 12 Ctr.

a. Im erstern Fall heißt die Frage: Wie wurde der Ctr. verkauft, und wie viel wurde daran gewonnen? Verkauft wurde der Ctr. um 95 fl., und gewonnen wurde am Ctr. $^1/_{12}$ von 150 fl. = $12^1/_2$ fl.; der Ankauf betrug also pr. Ctr. 95 fl. — $12^1/_2$ fl. = $82^1/_2$ fl.

b. Im andern Fall heißt die Frage: Wie wurden die 12 Ctr. verkauft, und wie viel wurde daran gewonnen? Verkauft wurden die 12 Ctr. um 12 × 95 fl. oder 1140 fl.; gewonnen wurden daran 150 fl.; also sind sie um 1140—150=990 fl. eingekauft worden. Der Ctr. kostete demnach $^1/_{12}$ von 990 fl. = $82^1/_2$ fl.

Beisp. 2. A verkauft 5 Schff. Getreid um 84 fl. und verliert dabei an dem Scheffel 2 fl. 24 kr.; wie hat er denselben eingekauft?

Aufl. So viel A am Scheffel verliert, um so viel hat er ihn höher

eingekauft, als verkauft. Um also den Einkaufspreis zu finden, so muß man den Verlust zum Verkaufspreis **addiren**. Zuvor aber muß ich beide kennen.

a. Wie viel betragen Verkaufspreis und Verlust von 1 Scheffel? Verkauft wurde der Schff. um $^1/_5$ von 84 fl. = $16^4/_5$ fl.; verloren wurden an demselben 2 fl. 24 kr. Mithin beträgt der Einkaufspreis 16 fl. 48 kr. + 2 fl. 24 kr. = 19 fl. 12 kr.

b. Wie viel betragen Verkaufspreis und Verlust von 5 Schff.? Verkauft wurden sie um 84 fl., und verloren wurden daran 5 × 2 fl. 24 kr. oder 12 fl.; der Ankauf der 5 Schff. beträgt also 84 + 12 oder 96 fl. Mithin kostete den A der Scheffel $^1/_5$ von 96 fl. = 19 fl. 12 kr.

Hieher gehört noch ein im Eingange nicht erwähnter Fall, nämlich der: **aus dem Gewinn oder Verlust die Quantität der Waare zu berechnen.**

Beisp. 1. Ein Obsthändler kaufte eine Partie Aepfel, die Metz zu 48 kr.; er verkaufte diese wieder um 1 fl. 15 kr. und gewann im Ganzen 24 fl.; wie viel Mtz. Aepfel sind es gewesen?

Aufl. An 1 Mtz. gewinnt er 1 fl. 15 kr. — 48 kr. = 27 kr. So vielmal 1 Mtz. Aepfel er kaufte und verkaufte, so vielmal 27 kr. beträgt sein Gewinn. Da er nun im Ganzen 24 fl. gewann, so waren es so vielmal 1 Mtz. Aepfel, als 27 kr. in 24 fl. enthalten sind. 27 kr. sind in 1 fl. $2^2/_9$ mal, in 24 fl. 24 mal so oft; also 24 × $2^2/_9$ = $53^1/_3$ mal enthalten. Mithin sind es $53^1/_3$ Mtz. Aepfel gewesen.

Beisp. 2. Ein Pfund kostete im Einkaufe 3 fl. 12 kr. und 1 Loth im Verkaufe 7 kr.; wie viel wurde verkauft, wenn der Gewinn 50 fl. betrug?

Aufl. Im Allgemeinen wurden so viel Pfund verkauft, als der Gewinn von 1 Pfd. in 50 fl. enthalten ist. Der Gewinn vom Pfund beträgt 32 × 7 kr. — 3 fl. 12 kr. = 32 kr.; 32 kr. = $^8/_{15}$ fl.; $^8/_{15}$ fl. liegen in 1 fl. $1^7/_8$ mal; $^8/_{15}$ sind in 50 fl. 50 mal so oft, also 50 × $1^7/_8$ oder $93^3/_4$ mal enthalten. Die Quantität Waare an welcher 50 fl. gewonnen wurden, beträgt also $93^3/_4$ Pfd.

Aufg. z. Kopfr., S. 38, Nr. 1—6.

Schriftlich.

1) Ein Wirth kauft 8 Eim. 48 Ms. Wein, den Eim. zu 15 fl. 30 kr.; das Fuhrlohn und die andern Unkosten betragen im Ganzen 7 fl. 15 kr.; wie viel gewinnt er daran, wenn er die Maas um 24 kr. gibt? (Ich berechne zuerst die Auslage, dann den Erlös, dann den Gewinn.)

a. Auslage.		b. Erlös.
8 Eim. à 15 fl. 30 kr.	= 124 fl.	8 Eim. 48 Ms.
32 Ms.	= 7 fl. 45 kr.	64
16 „	= 3 fl. $52^1/_2$ „	560 Ms.
	135 fl. $37^1/_2$ kr.	24
	7 „ 15 „	2240
	142 fl. $52^1/_2$ kr.	1120
		60 | 13440 kr. | 224 fl.

c. 224 fl.
142 fl. 52 kr. 2 pf.
Gewinn = 81 fl. 7 kr. 2 pf.

2) A kauft $1^5/_8$ Ctr. Zucker um 48 fl. 45 kr. und will am Pfd. 6 kr. gewinnen; wie muß er es verkaufen?

Ich berechne zuerst, was ihn selbst das Pfd. kostet, und zähle dann die 6 kr. dazu.

Zweisatz.

$1^5/_8$ Ctr.	$48^3/_4$ fl.
1 Pfd.	?

Also muß A das Pfd. um 18 + 6 oder 24 kr. verkaufen.

Kettensatz.

?	1 Pfd.
100	1 Ctr.
$1^5/_8$	$48^3/_4$ fl.
1	60 kr.
1	18 kr.

3) Ein Händler verkaufte $15^1/_2$ Ctr. Wolle, den Ctr. zu 96 fl. und gewann im Ganzen 85 fl. 15 kr.; wie hat er den Ctr. eingekauft?

Ich suche, wie viel er am Ctr. gewonnen hat, und ziehe dieß vom Verkaufspreise ab.

$15^1/_2$ Ctr.	$85^1/_4$ fl.
1 „	„

$15^1/_2 : 1 = 85^1/_4$ fl : x
x = 5 fl. 30 kr.

Verkauf = 96 fl.
Gewinn = 5 fl. 30 kr.
Ankauf = 90 fl. 30 kr.

Aufg. z. Zifferr., 23. Uebung.

B. Aufgaben mit Procentbestimmung.

I. Der Gewinn oder Verlust procent wird gesucht.

a. Aus dem Einkaufspreise und dem Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. A kauft die Elle zu 2 fl. 30 kr. und verkauft sie wieder mit 30 kr. Gewinn; wie viel proc. gewinnt er?

Aufl. Berechnet soll werden, wie viel procent d. h. wie viel am Hundert gewonnen wird, und gegeben ist, wie viel der Gewinn von 2 fl. 30 kr. beträgt. Die Zahl 2 fl. 30 kr. ist eine zweifach benannte; sie besteht in Gulden und Kreuzern. Die Frage: wie viel mit 100? kann daher genommen werden: wie viel mit 100 Kreuzer? und auch: wie viel mit 100 Gulden? Um zu finden, wie viel mit 100 kr. gewonnen wird, so muß ich 2 fl. 30 kr. zu Kreuzer machen. Um aber zu finden, wie viel B mit 100 fl. gewinnt, so muß man die 2 fl. 30 kr., so wie die 30 kr. Gewinn, in Gulden verwandeln.

a. 2 fl. 30 kr. = 150 kr. Mit 150 kr. gewinnt B 30 kr., wie viel mit 100 kr.? Das läßt sich auf verschiedene Weise berechnen.

α) Man schließt von 150 kr. auf 50 kr. und von 50 kr. auf 100 kr. Gewinnt B mit 150 kr. 30 kr., so gewinnt er mit 50 kr. $^1/_3$mal 30 = 10 kr. und mit 100 kr. 2mal 10 oder 20 kr. Er gewinnt also 20%.

β) Man sucht, wie sich der Gewinn zum Einkaufspreis verhält. 30 kr. bilden $^1/_5$ von 150 kr. Gewinnt B mit 150 kr. $^1/_5$ von 150 kr., so gewinnt er mit 100 kr. $^1/_5$ von 100 kr.; $^1/_5$ von 100 kr. = 20 kr. = 20%.

b) 2 fl. 30 kr. = $2^1/_2$ fl., und 30 kr. = $^1/_2$ fl. Nun heißt es: Mit $2^1/_2$ fl. gewinnt man $^1/_2$ fl.; wie viel mit 100 fl.?

Die Berechnung kann wieder auf zweierlei Weise ausgeführt werden.

Beisp. 2. B muß das Pfund einer Waare, das ihn 7 kr. 2 pf. kostete, mit 2 pf. Schaden verkaufen; wie viel proc. beträgt sein Verlust?

a. An 7 kr. 2 pf. od. 30 pf. verliert B 2 pf.; wie viel an 100 pf.?

α) Verliert B an 30 pf. 2 pf., so verliert er an 10 pf. $^1/_3 \times 2$ oder $^2/_3$ pf., und an 100 pf. $10 \times {}^2/_3$ oder $6^2/_3$ pf. = $6^2/_3$%.

β) Verliert B an 30 pf. 2 pf., so verliert er $^1/_{15}$ von 30 pf.; an 100 pf. verliert er also $^1/_{15}$ von 100 oder $6^2/_3$ pf.

b. An 7 kr. 2 pf. oder $7^1/_2$ kr. verl. B $^1/_2$ kr.; wie v. an 100 kr.? Auch dieß läßt sich wieder auf zweifache Weise rechnen.

Aufg. z. Kopfr., Nr. 7—12.

b. Aus dem Einkaufs- und Verkaufspreis.

Beisp. 1. Dem Obsthändler A kommt das Pfund Kirschen auf 12 kr.; wie viel proc. gewinnt (oder verliert) er, wenn er es um 13 (10, 15, 8, 18, 6, 24) kr. wieder verkauft?

Ausr. Wenn A das Pfd. um 12 kr. kauft und um 13 kr. verkauft, so gewinnt er mit 12 kr. 1 kr., also $^1/_{12}$ vom Ganzen; folglich gewinnt er an 100 kr. $^1/_{12}$ von 100 kr. oder $8^1/_3$ kr., d. i. er gewinnt $8^1/_3$%. — Verkauft er das Pfd. um 10 kr., so verliert er an 12 kr. 2 kr., also $^1/_6$ von 12 kr.; folglich verliert er an 100 kr. $^1/_6$ von 100 kr. oder $16^2/_3$ kr. d. i. $16^2/_3$%. So fort.

Beisp. 2. Ein Händler kauft die Mtz. Erbsen um 3 fl.; wie viel proc. gewinnt (oder verliert) er, wenn er dieselben um $3^2/_3$ ($2^3/_4$, $3^3/_4$, $2^2/_3$) Gulden wieder verkauft?

Ausr. Wenn der Händler die Mtz. Erbsen um 3 fl. kauft und um $3^2/_3$ fl. verkauft, so gewinnt er mit 3 fl. $^2/_3$ fl., mit 1 fl. den 3. Theil von $^2/_3$ fl. oder $^2/_9$ fl. und mit 100 fl. $100 \times {}^2/_9$ fl. oder $22^2/_9$ fl., mithin $22^2/_9$%. — Verkauft er die Metz um $2^3/_4$ fl., so verliert er an 3 fl. $^1/_4$ fl. d. i. den 12. Theil von 3 fl.; also verliert er an 100 fl. $^1/_{12}$ von 100 oder $8^1/_3$ fl. = $8^1/_3$%.

Beisp. 3. A kauft 36 Ellen um 126 fl. und verkauft die Elle um 4 fl.; wie v. beträgt sein Gewinn oder Verlust proc.?

a. Ich suche zuerst, was A **an der Elle** gewinnt oder verliert. Das kann ich finden, wenn ich weiß, wie A die Elle einkauft und wieder verkauft. 36 Ellen kosten ihn 126 fl.; 1 Elle kostet $^1/_{36}$ davon; $^1/_6$ von 126 fl. = 21 fl., und $^1/_6$ von 21 fl. = 3 fl. 30 kr. Die Elle kostet ihn also 3 fl. 30 kr. Sein Erlös dafür beträgt 4 fl.; demnach gewinnt er an der Elle 30 kr. Womit gewinnt denn aber A die 30 kr.: mit den 3 fl. 30 kr. oder mit den 4 fl.? Antwort: Mit dem Gelde, das er für die Elle gezahlt hat, also mit 3 fl. 30 kr. Die Aufgabe ist nun:

Mit 3 fl. 30 kr. gewinnt A 30 kr.; wie viel proc.? 30 kr. sind $^1/_7$ von 3 fl. 30 kr.; also gewinnt er auch $^1/_7$ von 100 d. i. $14^2/_7 = 14^2/_7\%$. Oder:

b. Ich suche, wie viel er mit den **36 Ellen** gewinnt. In diesem Falle muß ich wissen, was ihn die 36 Ell. gekostet haben, und was er dafür löst. Gekostet haben sie ihn 126 fl. Sein Erlös dafür ist 36 × 4 oder 144 fl. Sein Gewinn an den 36 Ellen beträgt also überhaupt 144 — 126 = 18 fl. Diese gewinnt er mit 126 fl. Nun suchen wir den Gewinn proc. Da der Weg von 126 auf 100 nicht bequem ist, so untersuchen wir, was für ein Theil die 18 fl. von den 126 fl. sind. 18 fl. sind in 126 so oft enthalten, als die Hälfte von 18 fl. in der Hälfte von 126 fl. d. i. so oft als 9 fl. in 63 fl., nämlich 7mal. Also sind 18 fl. $^1/_7$ von 126 fl.; folglich gewinnt A mit 100 fl. $^1/_7$ von 100 fl. = $14^2/_7$ fl.

Aufg. z. Kopfr., Nr. 13—17.

c. Aus dem Verkaufspreis und dem Gewinn od. Verlust.

Beisp. 1. A verkauft den Ctr. Heu mit 36 kr. Mehrerlös um 1 fl. 24 kr.; wie viel macht der Gewinn procent?

Aufl. Wenn ich den Gewinn proc. berechnen will, so muß ich den Einkaufspreis und den Gewinn kennen. Der Gewinn ist bekannt; er = 36 kr.; der Einkaufspreis aber beträgt 1 fl. 24 kr. — 36 kr. d. i. 48 kr. Mit 48 kr. werden also 36 kr. d. i. $^3/_4$ × 48 kr. gewonnen. Folglich beträgt der Gewinn vom Hundert $^3/_4$ × 100 oder 75. A gewinnt also 75%.

Beisp. 2. Eine Quantität Kaffee wird mit 56 Thlr. Verlust um 344 Thlr. verkauft; wie viel proc. werden verloren?

Aufl. Bevor ich berechnen kann, wie viel der Verlust vom Hundert macht, muß ich die Summe kennen, an welcher die 56 Thlr. verloren werden. Woran werden denn nun aber diese verloren? An der Summe, welche die Waare im Einkauf kostete. Und wie findest du diese? Da die Waare mit 56 Thlr. Verlust verkauft wird, so ist sie um 56 Thlr. höher eingekauft worden, als der Erlös dafür ist. Der Ankauf betrug daher 344 + 56 oder 400 Thlr. An diesen 400 Thlrn. also werden die 56 Thlr. verloren. Mithin beträgt der Verlust von 100 Thlrn. $^1/_4$ von 56 Thlr., nämlich 14 Thlr.

Aufg. z. Kopfr., Nr. 18—21.

II. Aus dem Einkaufspreis und dem Gewinn oder Verlust procent wird gesucht.

a. Der Gewinn oder Verlust.

Beisp. 1. Ein Landmann kauft eine Wiese um 320 fl. und verkauft sie wieder mit 15% Gewinn; wie viel beträgt sein Mehrerlös?

Aufl. Zu berechnen ist, wie viel der Mehrerlös oder Gewinn von 320 fl. beträgt. Der Ausdruck „15 proc." zeigt an, wie viel derselbe von 100 fl. macht. Von 100 fl. macht der Gewinn 15 fl.; von 320 oder $3^1/_5$ Hundert macht er $3^1/_5$ × 15 oder 48 fl.

Beisp. 2. A verkauft ein Haus, das ihn 1500 Thlr. gekostet, mit $7^1/_2$ procent Verlust; wie viel beträgt der Mindererlös?

Aufl. Gesucht soll werden, was der Mindererlös oder Verlust von 1500 Thlr. beträgt, und der Ausdruck „$7\frac{1}{2}$ proc.“ sagt uns, wie viel derselbe von 100 Thlr. macht. Von 100 Thlr. macht der Verlust $7\frac{1}{2}$ Thlr.; mithin beträgt er von 1500 Thlr. $15 \times 7\frac{1}{2}$ oder $112\frac{1}{2}$ Thlr.

b. Der Verkaufspreis.

Beisp. 1. B kauft den Scheffel Linsen um 20 fl.; wie muß er die Metz verkaufen, um 12% zu gewinnen?

Aufl. Ich suche zuerst, wie B den Scheffel verkaufen muß, um 12% zu gewinnen. Da er mit 100 fl. 12 fl. gewinnen will, so muß er mit 20 fl. $\frac{1}{5}$ von 12 d. i. $2\frac{2}{5}$ fl. gewinnen. Er muß daher den Scheffel um $20 + 2\frac{2}{5}$ oder $22\frac{2}{5}$ fl., die Metz also um $\frac{1}{6}$ von $22\frac{2}{5}$ fl. d. i. um 3 fl. 44 kr. verkaufen.

Beisp. 2. Wie theuer hat C das Pfd., das ihn selbst 3 fl. 20 kr. gekostet, wieder verkauft, da er 25% dabei verlor?

Aufl. 3 fl. 20 kr. = 200 kr.; mit 100 kr. verlor C 25 kr., mit 200 kr. also 2×25 kr. = 50 kr.; folglich hat er das Pfd. nur um 200 — 50 = 150 kr. oder 2 fl. 30 kr. wieder verkauft. — Oder: C verlor 25%, das heißt: für 100 kr., die er ausgegeben, erhält er im Verkaufe nur 75 kr., mithin bekam er für 200 kr. nur 2×75 oder 150 kr. = 2 fl. 30 kr. — Oder: Wer 25% verliert, der verliert genau $\frac{1}{4}$ seines Einkaufspreises. C verlor also $\frac{1}{4}$ von 3 fl. 20 kr., nämlich 50 kr.; mithin gab er das Pfund um 3 fl. 20 kr. — 50 kr. = 2 fl. 30 kr. Oder: Verlor er $\frac{1}{4}$, so betrug sein Erlös $\frac{3}{4}$, d. i. $\frac{3}{4}$ von 3 fl. 20 kr. = 2 fl. 30 kr.

Aufg. z. Kopfr., Nr. 22—27.

Schriftlich.

1) Ein Kaufmann bezieht 75 Ellen Tuch à 2 fl. 48 kr.; die Fracht macht 3 fl. 18 kr.; wie viel proc. gewinnt er, wenn er die Elle um 3 fl. 36 kr. verkauft?

Ausr. Zuerst suche ich die Auslage und den Erlös für eine und dieselbe Quantität, hier für die 75 Ellen; dann suche ich den Gewinn und zuletzt den Gewinn procent.

a. Auslage.	b. Erlös.
75×2 fl. = 150 fl.	75×3 fl. = 225 fl.
$75 \times \frac{4}{5}$ fl. = 60 fl.	$75 \times \frac{3}{5}$ fl. = 45 fl.
210 fl.	270 fl.
3 fl. 18 kr.	213 fl. 18 kr.
213 fl. 18 kr.	c. Gewinn = 56 fl. 42 kr.

d. Gewinn procent.

$213\frac{3}{10}$ fl.	$56\frac{7}{10}$ fl.	$213\frac{3}{10} : 100 = 56\frac{7}{10} : x$
100 „	?	$x = 26\frac{46}{79}$%.

Beisp. 2. A verkauft den Ctr. Waare um 154 fl. und verliert dabei 18 fl.; wie viel proc. also?

Ausr. Ehe ich den Verlust vom Hundert berechnen kann, muß ich erst die Summe kennen, an der die 18 fl. verloren werden. Dieselbe beträgt 18 fl. mehr als 154 fl.

Verkauf = 154 fl.
Verlust = 18 fl.
Einkauf = 172 fl.

Nun heißt die Aufgabe: An 172 fl. werden 18 fl. verloren; wie viel demnach an 100 fl.?

172 fl. 18 fl. Verl. $178 : 100 = 18 : x$
100 „ ? $x = 10^{20}/_{43}\,\%$

Beisp. 3. Fünf Aktien einer Baumwollenspinnerei werden per Stück zu 187 fl. gekauft und später mit $16^3/_4$ proc. Gewinn wieder abgegeben; wie viel wurde gewonnen?

Ausr. Ich suche zuerst, was die 5 Aktien gekostet haben.

187 fl.
5
935 fl.

Nun suche ich, wie viel damit gewonnen wird. Die Aufgabe heißt: Mit 100 fl. werden $16^3/_4$ fl. gewonnen; wie viel mit 935 fl.?

100 fl. $16^3/_4$ fl. $100 : 935 = 16^3/_4$ fl. $: x$
935 „ ? $x = 156$ fl. $36^3/_4$ kr.

Beisp. 4. Wie ist das Pfund zu verkaufen, wenn $3^3/_8$ Ctr. 175 fl. kosten und 24% gewonnen werden sollen?

Ausr. Zuerst suche ich, wie die $3^3/_8$ Ctr. zu verkaufen sind, damit 24% gewonnen werden?

100 fl. 124 fl. $100 : 124 = 175$ fl. $: x$
175 „ ? $x = 217$ fl.

Nun berechne ich den Verkaufspreis eines Pfundes.

$3^3/_8$ Ctr. 217 fl. $337^1/_2$ Pfd. : 1 Pfd. = 217 fl. : x
1 Pfd. ? $x = 38^{26}/_{45}$ kr.

Oder ich rechne es durch den Kettensatz auf einmal.

?	1 Pfd.	Die $3^3/_8$ Ctr. oder $3^3/_8 \times 100$ Pfd. kosten 175 fl.
100	1 Ctr.	1 Pfd. kostet also 175 fl, getheilt durch $3^3/_8 \times 100$
$3^3/_8$	175 fl.	Da dieß voraussichtlich keinen ganzen Gulden gibt, so
1	60 kr.	machen wir die Gulden zu Kreuzer. 1 Pfd. kostet so-
100	124	nach 175×60 kr, getheilt durch $3^3/_8 \times 100$.
45	1736 kr.	So viel kostet das Pfd. im Einkauf. Man will

aber 24 proc. gewinnen; also muß dieselbe Quantität Waare, die für 100 kr. gekauft wurde, um 100 + 24 d. i. um 124 kr. verkauft werden. So oft daher 100 kr. im Einkaufspreis enthalten sind, so vielmal 124 kr. muß der Verkaufspreis betragen.

Aufg. z. Zifferr., 24. und 25. Uebung.

Das Bisherige kann und soll in jeder Schule durchgenommen werden. Von dem Folgenden wird nur unter Umständen Gebrauch gemacht. Während bisher das Gesuchte fast ohne Weiteres aus dem Gegebenen abgeleitet werden konnte, ist in den nachstehenden Fällen das

Verhältniß des Einen zum Andern aus der Zahl der Procente erst zu bestimmen.

a. Der Gewinn oder Verlust wird gesucht.

Beisp. 1. Man verkauft eine Waare für 240 fl. und gewinnt 20% dabei; wie viel also?

Aufl. Die Waare wurde für 240 fl. und zwar mit Vortheil verkauft. Der Erlös besteht daher in dem Einkaufspreis und dem Gewinn. Die Aufgabe verlangt, daß beide ausgeschieden werden. Um dieß thun zu können, so muß man wissen, wie sie sich zu einander verhalten. Das sagt der Ausdruck 20%. Mit 100 werden 20 gewonnen. Der Gewinn beträgt daher $^1/_5$ von dem Einkaufspreise. Einkaufspreis und Gewinn bilden also $^5/_5 + {}^1/_5$ oder 6 gleiche Theile, und diese bestehen in 240 fl. Mithin beträgt der Gewinn $^1/_6$ von 240 fl. d. i. 40 fl.

Beisp. 2. Ein Faß Wein wurde für 350 Thlr. mit 30% Verlust verkauft; wie viel Thaler betrug dieser also?

Aufl. Hier wurden 30 proc. d. i. $^3/_{10}$ des Einkaufspreises verloren; also wurde der Wein um $^7/_{10}$ desselben verkauft. Diese $^7/_{10}$ = 350 Thlr. Die Aufgabe ist nun: $^7/_{10}$ vom Einkaufspreis = 350 Thlr.; was machen $^3/_{10}$? Antwort: 150 Thlr An dem Fasse Wein wurden also 150 Thlr. verloren.

b. Der Verkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. A gewinnt an der Elle 42 kr. oder 15%; wie theuer verkauft er dieselbe?

Aufl. A gewinnt 15% d. i. $^3/_{20}$ vom Einkaufspreis. Wird nämlich das Geld, das A für die Elle zahlte, in 20 gleiche Theile getheilt, so bezeichnen 3 derselben den Gewinn. Der Verkaufspreis besteht also aus 20 + 3 oder 23 solchen Theilen. 3 davon = 42 kr.; 1 Theil = 14 kr., und die 23 Theile = 23 × 14 kr. oder 5 fl. 22 kr. Die Elle wurde also um 5 fl. 22 kr. verkauft.

Beisp. 2. B verliert am Ctr. 16 fl. oder 8%; wie verkaufte er denselben?

Aufl. Verliert B 8%, so beträgt sein Verlust $^2/_{25}$ vom Einkaufspreis. Der Verkaufspreis beträgt daher $^{23}/_{25}$ desselben. Die Aufgabe ist also die: $^2/_{25}$ vom Einkaufspreis = 16 fl.; was machen $^{23}/_{25}$?

c. Der Einkaufspreis wird gesucht.

Beisp. 1. Ein Wirth gewinnt an dem Eimer Wein 8 fl. 45 kr. oder 28%; wie theuer hat er ihn eingekauft?

Aufl. Der Gewinn beträgt 28% d. i. $^7/_{25}$ vom Einkaufspreis; die $^7/_{25}$ sind = 8 fl. 45 kr. Die Aufgabe ist also: $^7/_{27}$ des Ankaufs = 8 fl. 45 kr.; wie viel beträgt der ganze Einkaufspreis? Antwort: 31 fl. 15 kr.

Beisp. 2. An einer Aktie wurden $12^1/_2$ proc. oder 45 fl. verloren; wie viel hatte sie im Ankauf gekostet?

Aufl. Der Verlust beträgt $12^1/_2$ proc. oder $^1/_8$ des Ankaufs und ist = 45 fl. Wenn aber 45 fl. $^1/_8$ vom Ankaufspreise sind, so ist dieser selbst = 8 × 45 oder 360 fl.

Beisp. 3. Ein Roßhändler verkauft ein Pferd um 385 fl. und gewinnt dabei 40%; was hat es ihn gekostet?

Aufl. Die 385 fl. sind Einkaufspreis und Gewinn. Der Einkaufspreis = 1; der Gewinn = 40% oder $^2/_5$ desselben; Einkauf und Gewinn also = 1 + $^2/_5$ oder $^7/_5$; die $^7/_5$ aber = 385 fl. Mithin ist $^1/_5$ des Einkaufspreises der 7. Theil von 385 fl. d. i. 55 fl., und der ganze Einkaufspreis = 5 × 55 oder 275 fl.

Beisp. 4. Es hatte Jemand zu einem Unternehmen, wobei $16^2/_3$ proc. Verlust erlitten wurden, eine Summe Geldes beigeschossen; nach 1 Jahre zog er sein Kapital wieder zurück und bekam 5400 fl.; wie groß war seine Einlage?

Aufl. Der Verlust betrug $16^2/_3$% oder $^1/_6$ von der Einlage; mithin betrug die zurückerhaltene Summe $^5/_6$ derselben; die Aufgabe ist also: $^5/_6$ der Einlage = 5400 fl.; wie viel macht dieselbe im Ganzen? Antwort: 6480 fl.

d. Der Gewinn procent pro anno wird gesucht.

1) Ein Geschäft, das mit 1200 fl. betrieben wurde, warf in $2^1/_2$ Jahren 800 fl. reinen Nutzen ab; wie viel proc. pr. a?

Ausr. Berechnet soll werden, welchen Nutzen 100 fl. in 1 Jahre abwerfen; gegeben ist, welchen Nutzen 1200 fl. in $2^1/_2$ Jahren abwarfen. 1200 fl. warfen in $2^1/_2$ J. 800 fl., in $^1/_2$ Jahre 160 fl. und in 1 Jahre 320 fl. ab. Auf 100 fl. kommt in dieser Zeit $^1/_{12}$ von 320 fl. d. i. $26^2/_3$ fl. Der Nutzen proc. pr. a. ist also $26^2/_3$.

2) Ein Gastwirth kauft den Eimer Wein zu 25 fl. und schenkt denselben, die Ms. zu 36 kr., in 4 Wochen aus; wie viel beträgt sein Gewinn proc. pr. a.?

Ist so zu nehmen: Der Gastwirth nimmt 25 fl. seines Geldes und kauft dafür 1 Eim. Wein. Den schenkt er in 4 Wch. aus, und da er die Maas um 36 kr. gibt, so löst er 64 × 36 kr. oder 38 fl. 24 kr. Nun nimmt er 25 fl. von diesen 38 fl. 24 kr. und kauft sich wieder 1 Eimer. Den schenkt er abermals in 4 Wch. aus, löst dafür wieder 38 fl. 24 kr. u. s. f. Da nun 52 Wch. = 13 × 4 Wch., so thut er es im Jahre 13mal. So oft er es aber thut, so oft gewinnt er 38 fl. 24 kr. — 25 fl. = 13 fl. 24 kr. Also gewinnt er und zwar mit einen und denselben 25 fl. seines Geldes im Jahre 13 × 13 fl. 24 kr. = 174 fl. 12 kr. Das ist der Gewinn pro anno von 25 fl. Von 100 fl. beträgt derselbe 4mal so viel, also 4 × 174 fl. 12 kr. = 696 fl. 48 kr. Der Gewinn proc. pr. a. ist sonach $696^4/_5$.

Oder: Der Gastwirth gewinnt mit 25 fl. in 4 Wochen 64 × 36 kr. — 25 fl. = $13^2/_5$ fl., mit 100 oder 4 × 25 fl. in dieser Zeit 4 × $13^2/_5$ oder $53^3/_5$ fl., und mit 100 fl. in 52 oder 13 × 4 Wch. 13 × $53^3/_5$ d. i. $696^4/_5$ fl.

3) Wie viel proc. pr. a. werden gewonnen, wenn man eine Waare mit 48 fl. bezahlt und nach 4 Mon. für 60 fl. verkauft? Antwort: 75 proc.

4) A und B kaufen den Eimer zu 13 fl. 30 kr. A gibt denselben wieder zu 18 fl. 12 kr., B zu 21 fl. 24 kr. Jener verkauft das Jahr hindurch 200 Eimer, dieser 75 Eimer. a. Wie viel nimmt jeder an dem Eimer Gewinn? Wie viel B mehr als A? b. Wie viel nimmt jeder Procent? Wie viel B mehr als A? c. Wie viel gewinnt jeder pro anno?

Antwort: a. A nimmt am Eimer 4 fl. 42 kr., B 7 fl. 54 kr. Gewinn,

B also 3 fl. 12 kr. mehr als A. b) A gewinnt $34^{22}/_{27}$%, B $58^{14}/_{27}$%; B gewinnt also $23^{19}/_{27}$% mehr als A. c) A gewinnt pro anno 940, B $592^{1}/_{2}$ fl.

5) Zwei Kaufleute, B und C, bekommen die Elle Tuch zu 3 fl. 30 kr. B begnügt sich mit 12% Gewinn, C nimmt 20%. Dagegen verkauft B in 5 Monat eben so viel als C in $1^{1}/_{2}$ Jahr. a. Um wie viel baares Geld gibt B die Elle billiger als C? b. Wie viel beträgt eines jeden Gewinn Procent pro anno?

Antw. a. C gibt die Elle um 4 fl. 12 kr., B um 3 fl. $55^{1}/_{5}$ kr., mithin um $16^{4}/_{5}$ kr. wohlfeiler als C. b. Der Gewinn Procent pro anno beträgt bei B $28^{4}/_{5}$, bei C $13^{1}/_{3}$.

Was folgt hieraus? Derjenige wird auf die Dauer die besten Geschäfte machen, welcher gute Waare führt und sich im Einzelverkaufe mit einem mäßigen Gewinn begnügt.

e. Noch einige andere Fälle.

1) A verkauft den Scheffel Weizen zu 24 fl. und gewinnt dabei 20%: später verkauft er denselben mit 30% Gewinn; wie theuer also?

Ausr. Einkauf und 20% Gewinn = $1^{1}/_{5}$ = 24 fl.; $^{1}/_{5}$ beträgt den 6. Theil von 24 fl. = 4 fl.; $^{5}/_{5}$ = 5 × 4 oder 20 fl. Das ist der Einkaufspreis. Einkauf und 30% Gewinn = $1^{3}/_{10}$ × 20 oder 26 fl.

Oder: $1^{1}/_{5}$ = 24 fl.; was betragen $1^{3}/_{10}$?

2) B verkaufte den Ctr. Hopfen zu 120 fl. und gewann 25% dabei. Später mußte er mit 20% Verlust abgeben; wie verkaufte er jetzt den Ctr.?

Ausr. Einkaufspreis und 25% Gewinn = $1^{1}/_{4}$ = 120 fl.; der Einkaufspreis beträgt $^{4}/_{4}$ oder 96 fl.: da später 20% oder $^{1}/_{5}$ hievon verloren wurde, so betrug dann der Erlös $^{4}/_{5}$ von 96 fl. d. i. $76^{4}/_{5}$ fl.

3) Ein Kleinhändler erhält für 1 kr. 10 Stück Nähnadel, gibt aber für 1 kr. nur 6 Stück; wie viel Proc. nimmt er Gewinn?

Aufl. Er löst aus 6 Nadeln 1 kr., aus 1 Nadel $^{1}/_{6}$ kr. und aus 10 Nadeln 10mal $^{1}/_{6}$ = $1^{2}/_{3}$ kr. Was er für 1 kr. gekauft, das verkauft er wieder für $1^{2}/_{3}$ kr.; er gewinnt daher mit 1 kr. $^{2}/_{3}$ kr., mit 100 kr. also 100mal $^{2}/_{3}$ = $66^{2}/_{3}$ kr.

4) Derselbe erhält ferner für 1 fl. 18 Ellen Band; wie viel wird man für das gleiche Geld von ihm bekommen, da er diese Waare mit $33^{1}/_{3}$% Gewinn verkauft?

Aufl. $33^{1}/_{3}$% gewinnen, heißt: den 3. Theil vom Einkaufspreis gewinnen. Unser Kaufmann gibt daher die 18 Ellen, die ihn 1 fl. gekostet haben, nur um 1 + $^{1}/_{3}$ fl. wieder ab. Erhält man aber für $1^{1}/_{3}$ (= $^{4}/_{3}$) fl. 18 Ellen, so bekommt man für $^{1}/_{3}$ fl. den 4. Theil von 18 Ellen = $4^{1}/_{2}$ Ellen; mithin für 1 fl. 3mal $4^{1}/_{2}$ Ellen = $13^{1}/_{2}$ Ellen.

Aufg. z. Kopfr. Nr. 28—30.

Zins=Rechnung.

Es besitzt Jemand, den wir A nennen, eine Summe Geldes; er ist aber nicht im Stande, dieselbe mit Nutzen zu verwenden. B da=

gegen, ein Andrer, könnte sich mit einer gleichen Summe durch den Ankauf eines Grundstücks oder gewisser Waaren einen bedeutenden Vortheil verschaffen, wenn er sie hätte. Was thun daher beide? A leiht sein Geld dem B, unter der Voraussetzung, daß es ihm seiner Zeit wieder zurück erstattet werde, und B zahlt ihm dafür alljährlich eine bestimmte Vergütung. So wird das Geld dem einen wie dem andern nützlich. — Bei derartigen Geldgeschäften sind nun aber besondere Benennungen gebräuchlich. Wer Geld ausleiht, wird Gläubiger, Kreditor genannt. Wer Geld entlehnt heißt Schuldner, Debitor. Die verliehene Geldsumme heißt Kapital. Die Vergütung, welche der Schuldner dem Gläubiger zahlt, heißt Zins. Der Betrag des Zinses wird pro cento d. i. vom oder für das Hundert festgesetzt. Der Zinsprocent, auch Zinsfuß genannt, bestimmt den Zins von 100 gewöhnlich auf 1 Jahr. Der Ausdruck „von 100" ist unbenannt; man muß sich aber immer dieselbe Geldsorte dazu denken, in welcher das Kapital angegeben ist. 4 procent kann also heißen:

von je 100 Gulden Kapital jährlich 4 Gulden Zins,
von je 100 Thaler Kapital jährlich 4 Thaler Zins,
von je 100 Groschen Kapital jährlich 4 Gr. Zins u. s. w.

Das Ausleihen von Kapitalien und die Entrichtung der Zinsen hiefür, die Höhe des Zinsfußes und die verschiedene Zeitdauer, während welcher ein Kapital ausstehen kann, gibt im bürgerlichen Leben Veranlassung zu vielen und verschiedenen Rechnungen, die man mit dem allgemeinen Namen Zinsrechnung belegt. Die Stücke, die dabei in Betracht kommen, sind: Kapital, Zins, Zinsprocent und Zeit. Jedes dieser 4 Stücke kann gesucht werden und von jedem der übrigen 3 abhängig sein. Dieß gibt 4 × 3 oder 12 verschiedene Arten von Aufgaben mit einfachen Verhältnissen. Eine Aufgabe dieser Gattung ist: 200 fl. Kapital geben bei einem gewissen Zinsfuße und in einer gewissen Zeit 24 fl. Zins; wie viel Zins geben 800 fl. Kapital bei gleichem Zinsfuße und in gleicher Zeit? Hier hängt der Zins allein vom Kapitale ab. 800 oder 4 × 200 fl. Kap. geben 4 × 24 fl. Zins. Das in Frage gestellte Stück kann aber auch von zwei der übrigen Stücke abhängig sein. Z. B. 200 fl. Kap. geben bei einem gewissen Zinsfuße in 2 Jahren 24 fl. Zins, wie viel Zins geben 800 fl. bei gleichem Zinsfuße in 5 Jahren? Hier ist der zu suchende Zins durch Kapital und Zeit zugleich bedingt. Es ist dieß also eine Aufgabe mit mehrfachen Verhältnissen. Auch von dieser Gattung sind 4 × 3 oder 12 verschiedene Arten von Aufgaben möglich. Sie haben mit den ersteren den Umstand gemein, daß Kapital und Zins getrennt vorkommen. Es kann aber auch zu berechnen sein, wie viel Kapital und Zins nach einer gewissen Zeit zusammen betragen, oder aus wie viel Kapital und wie viel Zins eine aus beiden zusammengesetzte Summe besteht, und endlich wie hoch eine ausgeliehene Summe anwächst, wenn der jährliche Zins zum Kapital geschlagen und Zins von Zins genommen wird.

Wie viel Bildendes alle die verschiedenen Fälle auch in sich schließen, so wird sich der Unterricht in den allermeisten Schulen doch

nur auf diejenigen ausdehnen können, welche gewöhnlich im Leben vorkommen und daher nothwendig behandelt werden müssen. Bei Anordnung des Stoffes ist hierauf Rücksicht genommen. Das Nähere aber wird am gehörigen Orte selbst noch bemerkt werden.

A. Kapital und Zins getrennt.

A. Zinsrechnungen mit einfachen Verhältnissen.

a. Der Zins ist zu berechnen.

Mündlich.

1) Wie viel Zins geben 200 fl. (300 Thlr) jährlich zu $3^1/_2$%?

100 fl. Kap. geben $3^1/_2$ fl. Zins; 200 fl. K. geben 2 × $3^1/_2$ od. 7 fl. Zs.

2) Welchen Zins tragen 50 (25, 20, 10) fl. Kp. zu $4^1/_2$%?

100 fl. geben $4^1/_2$ fl. Zins; 50 fl. geben die Hälfte davon = $2^1/_4$ fl.

3) Wie viel Zins werfen 65 fl. zu 5 proc. jährlich ab?

a. 65 fl. = 50 + 10 + 5 fl., macht ($^1/_2$ + $^1/_{10}$ + $^1/_{20}$) × 5 fl. Zins.

b. 5 fl. geben den 20. Theil von 5 fl. = $^1/_4$ fl.; 65 fl. 13 × $^1/_4$ fl.

c. Bei 5% beträgt der jährliche Zins $^1/_{20}$ vom Kapital; $^1/_{20}$ von 1 fl. = 1 Groschen, von 65 fl. also 65 Gr. = 3 fl. 15 kr.

Bei 5% heißt es also: So viel Gulden Kapital, so viel Groschen Zins. 25 fl. Kap. machen 25 Gr. oder 1 fl. 15 kr. Zins; 77 fl. K. machen 77 Gr. oder 3 fl. 51 kr. Zins; 248 fl. K. machen 2 × 5 oder 10 fl. + 2 fl. 24 kr. = 12 fl. 24 kr. Zins. Ist wohl zu üben.

4) Wie viel Zins tragen 495 fl. Kapital zu 4% jährlich?

a. 495 fl. = 400 fl. + 50 + 25 + 20 fl.; 400 fl. geben 4 × 4 od. 16 fl. 2c.

b. 495 fl. = 500 fl. − 5 fl. und geben daher 5 × 4 fl. − $^1/_{20}$ × 4 fl. Zs.

5) Welchen Zins geben alljährlich 234 fl., die zu $3^1/_3$ proc. in einer Sparkasse angelegt sind?

a. 234 fl. = 200 fl. + 20 + 10 + 4 fl. und geben (2 + $^1/_5$ + $^1/_{10}$ + $^1/_{25}$) × 3 fl. 20 kr.

b. Bei $3^1/_3$% beträgt der jährliche Zins $^1/_{30}$ vom Kapital. Nun rechne ich: 200 fl. Kp. geben 2 × 3 fl. 20 kr. = 6 fl. 40 kr. Zs.; 34 fl. Kp. geben $^1/_{30}$ von 34 fl. Zins; $^1/_{30}$ von 1 fl. = 2 kr., von 34 fl. 34 × 2 kr. = 1 fl. 8 kr.; 6 fl. 40 kr. + 1 fl. 8 kr. = 7 fl. 48 kr.

Bei $3^1/_3$% gibt der Gulden also 2 kr. Zins. So viel Gulden Kapital, so vielmal 2 kr. Zins. 18 fl. Kap. geben 36 kr. Zs.; 57 fl. Kap. geben 1 fl. 54 kr. Zs.; 83 fl. geben (60 × 2 + 23 × 2) = 2 fl. 46 kr. Zins u. s. w. Da dieß der Zinsfuß der meisten Sparkassen ist, so gebe der Lehrer nicht nur Aufgaben, bis sie von sämmtlichen Schülern geläufig gerechnet werden; sondern er nehme auch Anlaß, über diese Anstalten selbst und ihren wohlthätigen Zweck das Entsprechende zu bemerken.

6) Welchen Zins geben 100 fl. K. zu 4% in 5 J.? (6, 4, 1 M.)

In einem Jahre geben 100 fl. K. 4 fl. Zs.; in 5 Jahren geben sie 5 × 4 oder 20 fl. In 6 Mon. geben 100 fl $^1/_2$ × 4 oder 2 fl. u. s. w.

7) Ein Kap. gibt jährlich 18 fl. Zs.; wie viel vom 1. Jan. bis 1. Oktbr.?

Ausr. Vom 1. Jan. bis 1. Oktbr. sind 9 M. = 6 + 3 M. In 12 Mon. macht der Zins 18 fl., in 6 Mon. 9 fl. und in 3 Mon. 4 fl. 30 kr., in 9 Mon. also 9 fl. + 4 fl. 30 kr. oder 13 fl. 30 kr. Oder: Man geht von 12 Mon. auf 3 und von 3 auf 9. Oder man geht auf 1 M. und dann auf 9.

Hier lasse man nochmal die Zeiträume bestimmen und dabei jeden Monat zu 30, das Jahr also zu 360 Tg. annehmen. Z. B. vom 8. März bis 8. Aug. sind 5 Mon., vom 17. Okt. bis 17. Febr. des nächsten Jahres sind 4 Mon., vom 1. April bis 27. April sind 27 — 1 = 26 Tage. Vom 19. Dec. bis 5. März des folg. Jahrs =? (Vom 19. Dec. bis 19. Febr. sind 2 M. und vom 19. Febr. bis 5. März sind 11 + 5 oder 16 Tage, zusammen 2 Mon. 16 Tg. = 76 Tg.) u. s. w.

Aufg. z. Kopfr. S. 40, Uebung I.

Schriftlich:

Beispiel. Wie viel Zins geben 855 fl. Kapital zu $4\frac{1}{2}$ proc.? Antwort: 38 fl. 28 kr. 2 pf.

Durch Zerlegen der Kapitalsumme.

800 fl. K.	geben	$8 \times 4\frac{1}{2}$ fl. =	36 fl.
50 fl. „	„	$\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2}$ fl. =	2 fl. 15 kr.
5 fl. „	„	$\frac{1}{10} \times 2\frac{1}{4}$ fl. =	— fl. 13 kr. 2 pf.
855 fl. Kap.	geben also		38 fl. 28 kr. 2 pf. Zs.

Durch den Zweisatz.

100 fl. K.		$4\frac{1}{2}$ fl. Zs.
855 fl. K.		?
100 fl. K.		$4\frac{1}{2}$ fl.
1 fl.	100	
855 fl.		855

100 fl. K.	$4\frac{1}{2}$ fl. Zs.
855 fl. K.	?
100 fl. K.	$\frac{9 \times 855}{2 \times 100}$
1 fl.	
855 fl.	

Durch die Proportion.

Je größer das ausgeliehene Kapital ist, desto größer ist der jährliche Zins. Doppeltes Kapital, doppelter Zins; 3faches Kapital, 3facher Zins. Sowie sich also 100 fl. K. zu 855 fl. K. verhalten, eben so verhält sich der jährliche Zins aus 100 fl. zu dem jährlichen Zinse aus 855 fl. Steht:

$$100 \text{ fl. K.} : 855 \text{ fl. K.} = 4\tfrac{1}{2} \text{ fl. Zs.} : x$$

So oft 100 fl. K. in 855 fl. K. enthalten sind, so vielmal $4\frac{1}{2}$ fl. Zins geben diese.

Von allen Zinsrechnungen mit einfachen Verhältnissen sind die bisherigen, als die im Leben häufigst vorkommenden, am ausführlichsten zu behandeln.

Aufg. z. Zifferr., 26. Uebung.

b. Das Kapital ist zu berechnen.

Beispiel. Welches Kapital gibt jährlich zu 4% $18\frac{1}{2}$ fl. Zins?

Beurtheilung.

Hier ist das Kapital zu suchen, das jährlich $18\frac{1}{2}$ fl. Zins gibt. Um dies finden zu können, so muß das Kapital zu einem andern Zinse bekannt sein. Das ist der Fall. Der Ausdruck 4 Proc. zeigt an, daß zu 4 fl. Zins 100 fl. Kapital gehören. Die Aufgabe ist also: 4 fl. Zins erfordern 100 fl. Kapital; welches Kapital erfordert $18\frac{1}{2}$ fl. Zins? Ausr.

Mündlich.

a) Muß man, um 4 fl. Zins zu erhalten, 100 fl. Kapital ausstehen haben, so braucht man zu 1 fl. Zins den 4. Theil von 100 fl. = 25 fl. Kapital, zu $18\frac{1}{2}$ fl. Zs. also $18\frac{1}{2} \times 25$ fl. Kap.; 18×25 fl. = 450 fl.; $\frac{1}{2} \times 25$ fl. = $12\frac{1}{2}$ fl.; $450 + 12\frac{1}{2} = 462\frac{1}{2}$ fl.

b) So vielmal 4 fl. Zins, so vielmal 100 fl. Kap. Zu $18\frac{1}{2}$ fl. Zins sind daher so vielmal 100 fl. Kap. erforderlich, als 4 fl. Zins in $18\frac{1}{2}$ fl. Zs. enthalten sind. 4 in $18\frac{1}{2}$ = $\frac{8}{2}$ in $\frac{37}{2}$ = 8 in 37 = $4\frac{5}{8}$mal. $18\frac{1}{2}$ fl. sind also $4\frac{5}{8} \times 4$ fl.; folglich bedarf man zu $18\frac{1}{2}$ fl. Zins $4\frac{5}{8} \times 100$ fl. Kap; $4\frac{5}{8} \times 100$ fl. = $462\frac{1}{2}$ fl.

Schriftlich.

4 fl. Zs.	100 fl. K.	4 fl. Zs. : $18\frac{1}{2}$ fl. Zs. = 100 fl. K. : x
$18\frac{1}{2}$ fl. Zs.	?	x = $462\frac{1}{2}$ fl.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. II. (27).

c. Der Zins Procent ist zu berechnen.

Beispiel 1. A nimmt von 800 fl. Kapital jährlich 36 fl. Zins ein; zu wie viel Procent ist das Kapital ausgeliehen?

Aufl. Hier ist der Zins pro cent d. i. vom Hundert zu berechnen, und der Zins von 800 fl. ist bekannt. 800 fl. Kap. tragen 36 fl. Zins. Mithin kommt auf das Hundert der 8 Theil von 36 fl. Der 8. Theil von 36 fl. ist $4\frac{1}{2}$ fl. Das Kapital ist demnach zu $4\frac{1}{2}$ vom Hundert d. i. zu $4\frac{1}{2}$% ausgestellt.

Beisp. 2. Von 75 fl. Kap. erhält man 3 fl. $22\frac{1}{2}$ kr. Jahreszins; wie viel Proc. also?

Was ist hier zu suchen? Der Zinsprocent oder der Zins vom Hundert. Und was ist uns bekannt? Der Zins von 75 fl.; derselbe beträgt 3 fl. $22\frac{1}{2}$ kr. oder $3\frac{3}{8}$ fl. Wie heißt demnach die Aufgabe vollständig ausgedrückt? 75 fl. Kap. geben $3\frac{3}{8}$ fl. Zs.; wie viel Zins geben 100 fl. Kap.?

Mündlich.

Ich gehe von 75 fl. auf 25 fl. und von 25 fl. auf 100 fl. Kapital. 75 fl. geben $3\frac{3}{8}$ fl. Zins, 25 fl. geben $\frac{1}{3}$ von $3\frac{3}{8}$ = $1\frac{1}{8}$ fl. und 100 fl. K. geben $4 \times 1\frac{1}{8} = 4\frac{1}{2}$ fl. Die 75 fl. sind also $4\frac{1}{2}$ Proc. ausgeliehen.

Schriftlich.

75 fl. K.	$3\frac{3}{8}$ fl. Zs.	75 : 100 = $3\frac{3}{8}$ fl. : x
100 fl. K.	?	x = $4\frac{1}{2}$ proc.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. III. (28.)

B. Zinsrechnungen mit mehrfachen Verhältnissen.

a. Der Zins ist zu berechnen.

1) **Wie viel Zins geben 545 fl. zu 5% in 2 Jahren?**

Ausr. Ich suche zuerst den Zins auf 1 Jahr. 100 fl. geben jährlich 5 fl. Zins; 500 fl. geben 5×5 oder 25 fl. Bei 5% gibt der Gulden jährlich 1 Groschen, 45 fl. geben 45 Gr. oder 2 fl. 15 kr.; 25 fl. + 2 fl. 15 kr. = 27 fl. 15 kr. Der Zins beträgt sonach auf 1 Jahr 27 fl. 15 kr., mithin auf 2 Jahre 2×27 fl. 15 kr. = 54 fl. 30 kr.

2) **Wie viel Zins geben 272 fl. zu $3\frac{1}{3}$ Proc. in 3 Jahren?**

Ausr. Der 1jährige Zins von 200 fl. = 2×$3\frac{1}{3}$ fl. oder 6 fl. 40 kr. Bei $3\frac{1}{3}$ Proc. gibt der Gulden jährlich 2 kr.; 72 fl. geben also 72 × 2 kr. oder 2 fl. 24 kr.; 6 fl. 40 kr. + 2 fl. 24 kr. = 9 fl. 4 kr. Auf 3 Jahre macht's 3 × 9 fl. 4 kr. = 27 fl. 12 kr.

3) **Welchen Zins tragen 645 fl. zu $3\frac{1}{2}$ Proc. in 4 Jahren?**

Mündlich und schriftlich.

600 fl. geben	6 × 3 fl. 30 kr. =	21 fl.
25 fl. „	¼ × 3 fl. 30 kr. =	— „ 52 kr. 2 pf.
20 fl. „	⅕ × 3 fl. 30 kr. =	— „ 42 kr. — pf.
645 fl. geben also in 1 Jahr		22 fl. 34 kr. 2 pf. Zins.
in 4 Jahren		4 ×
		90 fl. 18 kr. — pf. Zins.

Zweisatz.

100 fl. 1 J.	$3\frac{1}{2}$ fl. Zs.		100 fl. 1 J.		$3\frac{1}{2}$ fl. Zs.
645 fl. 4 J.	?		645 fl. 4 J.		?
100 fl.	$3\frac{1}{2}$ fl.		100 fl. 1 J.		7. 645. 4
1 „ 100			1 „ 1 J.		2. 100
645 „ (1 J.)	645		645 „ 1 J.		
4 „	4		— „ 4 J.		

Proportion.

100 fl. K. :	645 fl. K. =	$3\frac{1}{2}$ fl. Zs. : x	Je mehr Kapital desto
1 J. :	4 J.		mehr Zins. Je länger
100 fl. :	2580 fl. =	$3\frac{1}{2}$ fl. Zs. : x	das Kapital aussteht, desto mehr Zins wirft es ab.

Was 645 fl. in 4 Jahren Zins tragen, das geben 4 × 645 oder 2580 fl. in 1 Jahre. Die Aufgabe ist jetzt: 100 fl. geben in 1 Jahre $3\frac{1}{2}$ fl. Zins; was geben 2580 fl. in gleicher Zeit? Die zusammengesetzte Regeldetri-Rechnung ist also in eine einfache verwandelt.

4) **Wie viel Zins geben 730 fl. Kap. zu $4\frac{1}{2}$% in 7 Monat?**

Aufl. Man sucht zuerst, wie viel Zins 730 fl. in 1 Jahre geben, und leitet hieraus den Zins für 7 Monate ab.

Mündlich und schriftlich.

700 fl. geben	7 × 4 fl. 30 kr.	=	31 fl. 30 kr.
20 fl. „	1/5 × 4 fl. 30 kr.	=	— fl. 54 kr.
10 fl. „	1/2 × — fl. 54 kr.	=	— fl. 27 kr.
730 fl. „	in 1 Jahre		32 fl. 51 kr. Zins.
	in 6 Monaten	=	16 fl. 25 kr. 2 pf.
	in 1 Monat	=	2 fl. 44 kr. 1 pf.
	in 7 Monaten	=	19 fl. 9 kr. 3 pf.

Zweisatz.

100 fl. K. 12 M. $4\frac{1}{2}$ fl. Zs.
730 fl. K. 7 M. ?

100 fl.			$4\frac{1}{2}$ fl.
1 fl.		100	
730 fl.	(12 M.)		730
	1 M.	12	
	7 M.		7

100 fl. K. 12 M. $4\frac{1}{2}$ fl. Zs.
730 fl. K. 7 M. ?

100 fl.	12 M.	9.730.7
1 fl.		2.100.12
730 fl.		
	1 M.	
	7 M.	

Proportion.

100 fl. K. : 730 fl. K. = $4\frac{1}{2}$ fl. Zs. : x
12 M. : 7 Mon.
1200 fl. : 5110 fl. K. = $4\frac{1}{2}$ fl. Zs. : x

Je mehr Kapital, desto mehr Zins; je weniger lang das Kapital aussteht, desto weniger Zins.

Was 100 fl. Kap. in 12 Mon. Zins tragen, das tragen 12 × 100 oder 1200 fl. Kap. in 1 Monat, und was 730 fl. Kapital in 7 Mon. Zins abwerfen, das werfen 7×730 oder 5110 fl. Kapital in 1 Monat ab.

5) Wie viel beträgt der Zins aus 875 fl. Kpt. zu 4% auf 3 Jahre 10 Monat und 15 Tage? Antw.: 135 fl. $37\frac{1}{2}$ kr.

Mündlich und schriftlich.

In 1 Jahre geben 875 fl. zu 4% $8\frac{3}{4}$ × 4 = 35 fl. Zins

in 3 Jahren	3 × 35 fl.	=	105 fl.
in 6 Mon.	1/2 × 35 fl.	=	17 fl. 30 kr.
in 3 Mon.	1/4 × 35 fl.	=	8 fl. 45 kr.
in 1 Mon.	1/3 × 8 fl. 45 kr.	=	2 fl. 55 kr.
in 1/2 Mon.	1/2 × 2 fl. 55 kr.	=	1 fl. $27\frac{1}{2}$ kr.
also in 3 Jahren 10 Mon. 15 Tg.		=	135 fl. $37\frac{1}{2}$ kr.

Zweisatz.

100 fl. K. 12 M. 4 fl. Zs.
875 fl. K. $46\frac{1}{2}$ M. ?

Proportion.

100 fl. K. : 875 fl. K. = 4 fl. Zs. : x
12 M. : $46\frac{1}{2}$ M.

6) A hat 550 fl. zu $2\frac{1}{2}$% auf der k. Bank stehen; wie viel betragen die Zinsen vom 26. Aug. 1860 bis 13. Mai 1862?

Antw. 23 fl. $33\frac{23}{24}$ kr.

Berechnung der Zeit.

Vom 26. Aug. 1860 — 26. Aug. 1861	=	1 Jahr	=	360 Tg.
„ 26. Aug. 1861 — 26. Apr. 1862	=	8 Mon.	=	240 Tg.
„ 26. April — 13. Mai = 4 + 13	=	. .	=	17 Tg.
				617 Tg.

Berechnung des Zinses.

a. In **zwei** Ansätzen.

100 fl. K.	$2\frac{1}{2}$ Zs.	I. 100 fl. K. : 550 fl. K. = $2\frac{1}{2}$ fl. : x
550 fl. K.	?	x = $13\frac{3}{4}$ fl.
360 Tg.	$13\frac{3}{4}$ fl.	II. 360 Tg. : 617 Tg. = $13\frac{3}{4}$ fl. : x
617 Tg.	?	x = 23 fl. $33\frac{23}{24}$ kr.

b. In **einem** Ansatze.

100 fl. 360 Tg.	$2\frac{1}{2}$ fl. Zs.	100 fl. K. : 550 fl. K. = $2\frac{1}{2}$ fl. : x
550 fl. 617 Tg.	?	360 Tg. : 617 Tg.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. IV. (29)

Unter den verschiedenen Arten von Zinsrechnungen mit mehrfachen Verhältnissen ist die bis jetzt vorgeführte die im Leben am häufigsten vorkommende; deßwegen ist sie auch in der Schule am ausführlichsten zu behandeln. Die folgenden 3 Arten, die sich noch für die Schule eignen, stehen in zweiter Linie. Wo man sich auf das Allernothwendigste beschränken muß, können diese auch übergangen werden.

b. Das Kapital ist zu berechnen.

Beispiel 1. Welches Kapital wirft zu 5% in 6 Jahren 480 fl. Zins ab?

Ausr. Wie zu einem gegebenen einfachen Jahreszins das Kapital gefunden wird, ist uns bekannt. Hier soll das Kapital zu dem gegebenen 6fachen Jahreszins berechnet werden. Wie thut man dieß? Man führt den 6fachen Jahreszins auf den einfachen zurück und sucht dann zu diesem das Kapital. — Der 6jährige Zins = 480 fl.; der 1jährige also = 80. Nun ist die Frage: Welches Kapital gibt zu 5% jährlich 80 fl. Zins? Zu 5 fl. Zins gehören 100 fl. Kapital; mithin gehört zu 80 oder 16 × 5 fl. Zs. ein Kapital von 16 × 100 = 1600 fl.

Beisp. 2. Wie groß ist das Kapital, welches zu 4% in 8 Mon. 44 fl. Zins erträgt?

Ausr. Wie vorhin den Zins für die 5 Jahre, so berechnet man auch hier den Zins für die 8 Monate zuerst auf 1 Jahr. Gibt das Kapital in 8 Monat 44 fl. Zins, so gibt es in 4 Mon. 22 fl. und in 12 Mon. 66 fl. Jetzt ist wieder die Frage: Welches Kapital erträgt bei 4% in 1 Jahre 66 fl. Zins? Da hier 4 fl. Zins 100 fl. Kapital erfordern, so gehören zu 66 oder $16\frac{1}{2}$ × 4 fl. Zins $16\frac{1}{2}$ × 100 fl. Kapital; $16\frac{1}{2}$ × 100 fl. = 1650 fl.

In beiden Fällen wird die Antwort auch gefunden, wenn man den Zins vom Hundert auf die gegebene Zeit berechnet und dann sucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Zinse enthalten ist. Der Quotient gibt das gesuchte Kapital in Hunderten.

Beispiel 3. Ein Kapital das zu $3^1/_2$% ausstand, ertrug in 4 J. und 8 Mon. 392 fl. Zins; wie groß war dasselbe?

Durch **zwei** Ansätze.

Man berechnet zuerst, wie viel der Zins auf 1 Jahr macht. Die Aufgabe ist: Auf 4 Jahre 8 Mon. oder 56 Mon. beträgt der Zins 392 fl.; wie viel auf 12 Monate?

56 Mon.	392 fl.	56 M. : 12 M. = 392 fl. Zs. : x
12 „	?	x = 84 fl.

Nun wird gesucht, welches Kapital zu $3^1/_2$% in 1 Jahre 84 fl. Zins erträgt. Der Ausdruck $3^1/_2$ proc. sagt uns, daß 100 fl. Kap. erforderlich sind, um in 1 Jahre $3^1/_2$ fl. Zins abzuwerfen. Also heißt es jetzt: Zu $3^1/_2$ fl. Zins sind 100 fl. Kap. erforderlich; welches Kapital erfordern 84 fl. Zins?

$3^1/_2$ fl. Zs.	100 fl. K.	$3^1/_2$: 84 = 100 fl. K. : x
84 fl. „	?	x = 2400 fl.

Durch **einen** Ansatz.

12 M. $3^1/_2$ fl. Zs.	100 fl. K.	12 Mon. $3^1/_2$ fl. Zs.	100 fl. K.
56 M. 392 fl. Zs.	?	56 Mon. 392 fl. Zs.	?

12 Mon.		100 fl.
		12
1 Mon.		
56 „	($3^1/_2$ fl.) 56	
	½ „ 7	
	1 „	2
	392 „	392

12 M. $3^1/_2$ fl. Zs. $\frac{100.\ 12.\ 2.\ 392}{56.\ 7}$

1 „ — „ „
56 „ — „ „
— „ ½ „ „
— „ 1 „ „
— „ 392 „ „

Sprechweise: Soll das Kapital in 12 Monat $3^1/_2$ fl. Zs. abwerfen, so muß es 100 fl. betragen; soll es schon in 1 Mon. $3^1/_2$ fl. Zins abwerfen, so muß es 12 × 100 fl. betragen; soll es aber erst in 56 Mon. $3^1/_2$ fl. Zs. abwerfen, so genügt $^1/_{56}$ davon. Soll das Kapital in dieser Zeit nur ½ fl. ertragen, so ist wieder nur $^1/_7$ desselben nöthig; soll es 1 fl. ertragen, so muß es 2mal so groß sein, und soll es 392 fl. Zins abwerfen, so muß es wieder 392mal so viel betragen.

Proportion. Zu suchen ist das Kapital, welches dem Zinse von 392 fl. entspricht; gegeben ist das Kapital zu $3^1/_2$ fl. Zins. Zu $3^1/_2$ fl. Zins gehören 100 fl. Kpt.; zu 392 fl. Zs. ist ein größeres Kapital erforderlich. Das erste Verhältniß ist daher zunehmend zu setzen.

$3^1/_2$ fl. Zins : 392 fl. Zs. = 100 fl. K. : x

$3^1/_2$ fl. sind der 1jährige Zins aus 100 fl. Wären auch die 392 fl. einjähriger Zins, so würde das zu suchende Kapital so vielmal 100 fl. betragen, als $3^1/_2$ fl. in 392 fl. enthalten sind. Die 392 fl. sind aber der Zins auf 4 J. 8 M. Soll ein Kapital bei demselben Zinsfuße in 2 Jahren nur eben so viel Zins ertragen, als ein anderes in 1 Jahre; so braucht es in 1 Jahre nur halb so viel Zins zu geben, als dieses, und braucht daher auch nur halb so groß zu sein.

Und soll ein Kapital in 4 Jahren nur eben so viel Zins abwerfen, als ein anderes in 1 Jahr; so braucht es in 1 Jahre nur $\frac{1}{4}$ mal so viel Zins zu tragen als dieses und braucht daher auch nur $\frac{1}{4}$ mal so groß zu sein. Je länger ein Kapital Zeit hat, einen gewissen Zins abzuwerfen, desto kleiner kann es sein, und umgekehrt. Daß die 392 fl. Zs. nicht in 1 Jahre, sondern erst in 4 J. 8 Mon. abgeworfen werden, wirkt daher nicht zunehmend auf das gesuchte Kapital, sondern abnehmend. Wie werden wir demnach setzen müssen? 56 M. : 12 M. Steht:

$3\frac{1}{2}$ fl. Zs. : 392 fl. Zs. = 100 fl. K. : x
56 Mon. : 12 Mon.

Aufg. z. Kopf- u. Zifferr. V. (30.)

c. Der Zinsprocent ist zu berechnen.

Beispiel 1. Das Kapital von 480 fl. wirft in 4 Jahren 96 fl. Zinsen ab; zu wie viel proc. ist dasselbe ausgeliehen? Antw.: Zu 5%.

Ausr. Wie viel pro cent = wie viel Zins jährlich vom Hundert? Es ist hier also der jährliche Zins von 100 fl. Kapital zu suchen. Gegeben ist, was 480 fl. Kapital in 4 Jahren Zins ertragen. Werfen 480 fl. Kpt. in 4 Jahren 96 fl. Zins ab, so macht das auf 1 Jahr den 4. Theil von 96 fl. = 24 fl.; 480 fl. Kpt. geben also in 1 Jahre 24 fl. Zins; was geben 100 fl.? 480 = 48 × 10 = 24 × 20. Kommen daher auf 480 fl. Kpt. 24 fl. Zs., so kommt auf 20 fl. Kpt. nur der 24. Theil von 24 fl. = 1 fl.; auf 100 oder 5 × 20 fl. treffen also 5 × 1 fl. = 5 fl. Das Kapital ist demnach zu 5 pro cent ausgeliehen.

In den meisten Fällen werden diese Aufgaben am besten schriftlich wie mündlich gerechnet, nämlich so, daß man zuerst den Zins für 1 Jahr und dann den Zins vom Hundert sucht.

Beispiel 2. Ein Kapital von 680 fl. wirft in 2 J. 6 M. 76 fl. 30 kr. Zins ab; zu wie viel proc. ist es ausgeliehen?

Berechnung des 1jährigen Zinses.

30 Mon.	$76\frac{1}{2}$ fl.	30 M. : 12 M. = $76\frac{1}{2}$ fl. : x
12 „	?	x = $30\frac{3}{5}$ fl.

Berechnung des Zinsprocentes.

680 fl. K.	$30\frac{3}{5}$ fl. Zs.	680 fl. K. : 100 fl. K. = $30\frac{3}{5}$ fl. Z. : x
100 fl. „	?	x = $4\frac{1}{2}$%

In **einem** Ansatze.

680 fl. K.	30 M.	$76\frac{1}{2}$ fl. Zs.	680 fl. : 100 fl. = $76\frac{1}{2}$: x
100 fl. „	12 M.	?	30 M. : 12 M.

Aufg. z. Zifferr. VI. (31).

d. Die Zeit ist zu berechnen.

Beispiel 1. 625 Thlr. Kapital haben zu 4% in einer gewissen Zeit 180 Thlr. Zs. ertragen. Wie lange sind sie ausgestanden?

Ausr. 625 Thlr. Kpt. ertragen zu 4% in 1 Jahre $6^1/_4 \times 4$ oder 25 Thlr. Zins. In 2 Jahren ertragen sie 2×25 Thlr., in 3 Jahren 3×25 Thlr. u. s. f. Die 625 Thlr. Kpt. werden daher, um 180 Thlr. Zinsen abzuwerfen, so vielmal 1 Jahr ausstehen müssen, als 25 Thlr. in 180 Thlr. enthalten sind. 25 Thlr. sind in 180 Thlr. (= 175 + 5 Thlr.) $7^1/_5$ mal enthalten. Mithin müssen 625 Thlr. Kpt., um 180 Thlr. Zinsen zu tragen, $7^1/_5$ mal $\times$ 1 Jahr = $7^1/_5$ Jahr lang ausgestanden sein.

Auch hier ist die Weise für das mündliche Rechnen zugleich die zweckmäßigste für das schriftliche. Man sucht den Zins von dem Kapitale auf 1 Jahr. So oft derselbe in der gegebenen Zinssumme enthalten ist, so vielmal 1 Jahr beträgt die zu suchende Zeit.

Beisp. 2 Wie lange müssen 960 fl. Kap. zu 5% ausgeliehen werden, bis sie 616 fl. Zins ertragen?

Im Allgemeinen so viele Jahre, als der Jahreszins aus 960 fl. K. in 616 fl. Zins enthalten ist. Der Jahreszins aus 960 fl. —

$$9^3/_5 \times 5 \text{ fl.} = 48 \text{ fl.}$$

$$48 \mid 616 \mid 12^5/_6$$

Mithin müssen 960 fl., um bei 5% 616 fl. Zins abzuwerfen, $12^5/_6$ Jahre oder 12 J. 10 Mon. ausstehen.

Andere Ausrechnung.

Zweisatz.

100 fl. K.	5 fl. Zs.		1 J.
960 fl. K.	616 fl. Zs.		?
100 fl. K.	5 fl. Zs.		1 J.
1	5		100
960	5	960	
—	1	5	
—	616		616

100 fl. K.	5 fl. Zs.	1 J.
960 fl. K.	616 fl. Zs.	?
100 fl. K.	5 fl. Zs.	
1	5	1.100.616
960	5	960.5
—	1	
—	616	

Sprechweise: 100 fl. K. müssen, um 5 fl. Zs. abzuwerfen, 1 Jahr ausstehen; 1 fl. Kap. 100 mal so lang; 960 fl. Kap. den 960. Theil dieser Zeit. Die Ausrechnung würde jetzt ergeben, wie lange 960 fl. ausstehen müssen, um 5 fl. Zins zu bringen. Um 1 fl. zu geben, brauchen sie nur $^1/_5$ dieser Zeit, und um 616 fl. Zs. abzuwerfen, dieß 616 mal.

Proportion.

$$960 \text{ fl. K.} : 100 \text{ fl. K.} = 1 \text{ Jahr} : x$$
$$5 \text{ fl. Zs.} : 616 \text{ fl. Zs.}$$

100 fl. müssen, um einen gewissen Zins abzuwerfen, 1 Jahr ausstehen; 960 fl. brauchen, um denselben Zins zu ertragen, nicht so lange. Das Verhältniß der beiden Kapitale muß also abnehmend sein. Um 5 fl. Zs. zu erhalten, muß ich ein gewisses Kapital 1 Jahr ausstellen; um 616 fl. Zins zu bekommen, muß ich dasselbe Kapital länger ausleihen. Das Verhältniß, welches die Zinse bilden, ist daher zunehmend zu setzen.

Aufgaben: In welcher Zeit ertragen

350 fl. Kpt. zu 4 proc. 70 fl. Zins? Antw.: In 5 Jahren.

800 Thlr. Kap. bei 6 proc. 336 Thlr. Zs.? Antw.: In 7 J.
3600 fl. Kap. zu 5 proc. 855 fl. Zs.? Antw.: In $4^3/_4$ J.
730 fl. Kap. bei $4^1/_2$ proc. 219 fl. Zs.? Antw.: In $6^2/_3$ J.

6. Kapital und Zins vereinigt.

A. Kapital und einfacher Zins.

a. Die Summe von Kapital und Zins wird gesucht.

Beispiel 1. 650 fl. werden zu 5 % ausgeliehen; wie viel betragen Kapital und Zins zusammen in 3 Jahren?

Erste Weise. Man sucht zuerst, was 650 fl. in 3 Jahren Zins tragen; dann zählt man Kapital und Zins zusammen. 650 fl. geben in 1 Jahre $6^1/_2 \times 5$ oder $32^1/_2$ fl. und in 3 Jahren $3 \times 32^1/_2$ oder $97^1/_2$ fl. Zins. Kapital und Zins machen also $650 + 97^1/_2$ oder $747^1/_2$ fl.

Zweite Weise. Man sucht zuerst, was 100 fl. sammt Zins in 3 Jahren betragen; dann leitet man davon ab, wie hoch 650 fl. in derselben Zeit anwachsen. 100 fl. geben zu 5% in 3 Jahren 3×5 oder 15 fl. Zins und betragen daher nach dieser Zeit mit dem Zinse $100 + 15$ oder 115 fl.; 200 fl. machen mit dem 3jährigen Zins 2×115 fl.; 300 fl. machen 3×115 fl.; 650 fl. machen also $6^1/_2 \times 115$ fl. $= 747^1/_2$ fl.

Schriftlich.

100 fl. K.	115 fl. K. + Zs.	100 fl. K. : 650 fl. K. = 115 fl. K. + Z. : x
650 fl. K.	?	$x = 747^1/_2$ fl.

Beispiel 2. Ich kaufe am 29. April eine $3^1/_2$ procentige bayr. Staatsobligation von 1000 fl. im Kurse zu $87^1/_2$ mit dem Zinse vom 1. Januar. Wie viel habe ich dafür zu zahlen?

Berechnung der Obligation.

Für je 100 fl., auf welche die Obligation lautet, zahle ich nur $87^1/_2$ fl. baar. Die Aufgabe ist also: 100 fl. machen $87^1/_2$ fl. baar; was machen 1000 fl.? Antw.: $10 \times 87^1/_2 = 875$ fl. Oder:

100 fl.	$87^1/_2$ fl.	$100 : 1000 = 87^1/_2$ fl. : x
1000 fl.	?	$x = 875$ fl.

Berechnung der Zinsen.

Der jährliche Zins macht $10 \times 3^1/_2$ oder 35 fl. Vom 1. Jan. bis 29. April sind 3 Mon. 28 Tg. d. i. $3 \times 30 + 28$ od. 118 Tg. Die Aufgabe heißt also: Auf 360 Tg. macht der Zins 35 fl.; wie viel auf 118 Tg.?

360 Tg.	35 fl.	360 Tg. : 118 Tg. = 35 fl. : x
118 Tg.	?	$x = 11$ fl. $28^1/_3$ kr.

Oblig. = 875 fl.
Zins = 11 fl. 28 kr.
886 fl. 28 kr.

b. Die Summe wird in Kapital und Zins zerlegt.

Beisp. 1. Ein zu 4% ausgestelltes Kapital betrug nach $2^1/_2$ Jahren mit den Zinsen 825 fl.; wie groß war dasselbe?

Mündlich:

Hier sind die 825 fl. in Kapital und Zins zu zerlegen. Das Erste ist, daß wir das Verhältniß beider zu einander bestimmen. Da das Kapital zu 4% ausstand, so betrug der jährliche Zins $^1/_{25}$ desselben; der $2^1/_2$jährige also $2^1/_2 \times {}^1/_{25} = {}^5/_{50}$ oder $^1/_{10}$. Das Kapital = 1, der $2^1/_2$jährige Zins = $^1/_{10}$, Kapital und Zins zusammen = $1^1/_{10}$ oder $^{11}/_{10}$. Diese sind = 825 fl. Jetzt heißt die Aufgabe: $^{11}/_{10}$ = 825 fl.; was machen $^{10}/_{10}$? $^1/_{10}$ beträgt den 11. Theil von 825 fl.; 825 fl. = 770 + 55 fl.; der 11. Theil davon = 70 + 5 oder 75 fl.; $^1/_{10}$ beträgt also 75 fl.; mithin betragen $^{10}/_{10}$ das 10fache von 75 fl., nämlich 750 fl.

Schriftlich.

Man nimmt für das ausgeliehene Kapital 100 fl. an und sucht, zu welcher Summe diese bei 4% in $2^1/_2$ Jahren anwachsen. Der Zins auf 1 Jahr ist 4 fl., auf $2^1/_2$ Jahren $2^1/_2 \times 4$ oder 10 fl.; 100 fl. machen also mit dem Zinse 110 fl. So oft 100 fl. zu 4% ausgeliehen wurden, so vielmal 110 fl. betrugen Kapital und Zins nach $2^1/_2$ Jahren. Da nun das ausgeliehene Kapital mit dem Zinse 825 fl. betrug, so sind so vielmal 100 fl. ausgeliehen worden, als 110 fl. in 825 fl. enthalten sind. In Form einer Regeldetri-Aufgabe ausgedrückt, heißt es: Unter 110 fl. befinden sich 100 fl. Kapital; wie viel unter 825 fl.?

110 fl. K. + Zs.	100 fl. K.	110 : 825 = 100 fl. : x
825 fl. „	?	x = 750 fl. Kp.

Beispiel 2. Ein Kapital, das zu 5% ausgeliehen ist, beträgt mit dem Zinse in 3 Jahren 4 Mon. $1458^1/_3$ fl.; wie heißt dasselbe?

a. Bei 5% beträgt der jährliche Zins $^1/_{20}$ des Kapitals, der $3^1/_3$jährige $3^1/_3 \times {}^1/_{20}$ oder $^1/_6$ desselben. Kapital und Zins sind also $1 + {}^1/_6 = {}^7/_6 = 1458^1/_3$ fl.; $^1/_6 = 208^1/_3$ fl., $^6/_6 =$ 1250 fl.

b. 100 fl. machen $100 + 3^1/_3 \times 5 = 116^2/_3$ fl. Unter $116^2/_3$ fl. Kap. und Zins sind also 100 fl. Kap.; wie viel unter $1458^1/_3$ fl.?

Aufg. z. Zifferr. VII. (32.)

B. Kapital und Zins aus Zins.

Zins aus Zins zu nehmen, ist zwar nicht erlaubt; doch kann der erhaltene Zins sogleich wieder anderswo verzinslich ausgeliehen werden. Dieß geschieht besonders von Wittwenkassen, Sparkassen und Lebensversicherungs-Anstalten, bei welchen die nutzbare Verwendung der verfügbaren Gelder eine Grundbedingung ihres Fortbestehens ist.

a. Die Summe von Kapital und Zinseszins wird gesucht.

Beispiel. Wie viel betragen 1000 fl. bei 5% mit Zinseszins in 3 Jahren?

Erste Berechnung.

Da das Kapital zu 5% aussteht, so machen 100 fl. desselben mit dem einjährigen Zinse 100 + 5 = 105 fl. In gleichem Maße wächst das ganze Kapital. Es bildet sich daher die Aufgabe:

1) 100 fl. Kpt. machen 105 fl. Kpt. u. Zs.; was 1000 fl. Kpt.?

Antwort: 1050 fl. Im zweiten Jahre sind daher 1050 fl. zu verzinsen.

2) 100 fl. Kpt. machen 105 fl. Kpt. u. Zs.; was thun 1050 fl.?

Antwort: $1102\frac{1}{2}$ fl. Dieß ist die Summe, welche im dritten Jahre zu verzinsen ist.

3) 100 fl. Kpt. machen 105 fl. Kpt. u. Zs.; was thun $1102\frac{1}{2}$ fl. Kpt.?

Antwort: $1157\frac{5}{8}$ fl. Wird also der fällige Zins alljährlich wieder zum Kapital geschlagen und mit demselben verzinst; so machen 1000 fl. Kpt. zu 5% nach Ablauf dreier Jahre $1157\frac{5}{8}$ fl.

Würde der fällige Zins nicht zum Kapital geschrieben und damit verzinset, so würden Kapital und Zins nach 3 Jahren 1000 fl. + 3 × 50 fl. = 1000 + 150 = 1150 fl. betragen. $1157\frac{5}{8}$ fl. — 1150 fl. = $7\frac{5}{8}$ fl. Diese $7\frac{5}{8}$ fl. sind der eigentliche Zins aus Zins. Sie berechnen sich aus den 50 fl. Zins des ersten Jahres, welche im zweiten und dritten Jahre, und aus den 50 + $2\frac{1}{2}$ fl. Zins des zweiten Jahres, welche im dritten Jahre mit dem ursprünglichen Kapitale zur Verzinsung kommen.

Zweite Berechnung.

Da der Zinsprocent = 5, so beträgt der jährl. Zins $\frac{1}{20}$ des Kapitals. Kapital und Zins zusammen genommen betragen daher nach jedem Jahre $1 + \frac{1}{20}$ oder $\frac{21}{20}$ mal so viel als die zinstragende Summe. Mithin machen 1000 fl., wenn der Zins alljährlich wieder zum Kapitale geschlagen und mit diesem verzinset wird,

nach 1 Jahre . . . . $\frac{21}{20} \times 1000$ fl.

nach 2 Jahren . . . $\frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 1000$ fl.

nach 3 Jahren . . $\frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 1000$ fl.

$$= \frac{9261}{8000} \times 1000 = \frac{9261000}{8000} = \frac{9261}{8} = 1157\frac{5}{8} \text{ fl.}$$

Obgleich abgekürzt, so ist doch auch diese Berechnung, wenn die Ausführung nicht mittelst der Logarithmen geschieht, immerhin noch sehr mühsam. Wir geben daher zum Gebrauche für den Lehrer und zur etwaigen Mittheilung an die Schüler nachfolgende Tabelle, worin der Zinseszins vom Hunderttausend zu 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$ und 5% auf 35 Jahre berechnet ist.

100000 fl. machen in

Jahren.	zu 3%.	zu $3\frac{1}{2}$%.	zu 4%.	zu $4\frac{1}{2}$%.	zu 5%.
1	103000	103500	104000	104500	105000
2	106090	107123	108160	109203	110250
3	109273	110872	112486	114117	115763
4	112551	114752	116986	119252	121551
5	115927	118769	121665	124619	127628
6	119405	122926	126532	130226	134010
7	122987	127228	131593	136086	140710
8	126677	131681	136857	142210	147746
9	130477	136290	142331	148610	155133
10	134392	141060	148024	155297	162889
11	138423	145997	153945	162285	171034
12	142576	151107	160103	169588	179586
13	146853	156396	160507	177220	188565
14	151259	161869	173168	185194	197993
15	155797	167535	180094	193528	207893
16	160471	173399	187298	202237	218287
17	165285	179468	194790	211338	229202
18	170243	185749	202582	220848	240662
19	175351	192250	210685	230786	252659
20	180611	198979	219112	241171	265330
21	186029	205943	227877	252024	278596
22	191610	213151	236992	263365	292526
23	197359	220611	246472	275217	307152
24	203279	228333	256330	287601	322510
25	209378	236324	266584	300543	338635
26	215659	244596	277247	314068	355576
27	222129	253157	288337	328201	373346
28	228793	262017	299870	342970	392013
29	235657	271188	311865	358404	411614
30	242726	280679	324340	374532	432194
31	250008	290503	337313	391384	453804
32	257508	300671	350806	408998	476494
33	265234	311194	364838	427403	500319
34	273191	322086	379432	446636	525335
35	281386	333359	394609	466735	551602

Anwendung.

Wird gefragt: Wie viel machen 500 fl. zu $3\frac{1}{2}$% mit Zinseszins in 10 Jahren? so heißt es: 100000 fl. machen in 10 Jahren 141060 fl.; wie viel thun 500 fl.?

100000 fl. 141060 fl. $\quad$ 100000 : 500 = 141060 fl. : x

500 fl. ? $\quad$ $x = 705\frac{3}{10}$ fl.

b. Die Summe von Kapital und Zinseszins wird zerlegt.

Beispiel 1. Ein Kapital wuchs bei 5 Proc. mit Zinseszins in 24 Jahren auf $3870^3/_{25}$ fl. an; wie viel betrug es ursprünglich?

Nach der Tabelle betragen 100000 fl. bei gleichem Zinsfuße und in gleicher Zeit mit Zinseszins 322510 fl. Die Aufgabe heißt demnach: 322510 fl. Kapital und Zinseszins machen 100000 fl. Kapital; was thun $3870^3/_{25}$ fl ?

322510 fl.	100000 fl.	$322510 : 3870^3/_{25} = 100000 : x$
$3870^3/_{25}$ fl.	?	$x = 1200$ fl.

Beispiel 2. Ein Vater möchte für sein neugebornes Söhnlein eine Geldsumme zu 4% anlegen, die mit Zinseszins in 20 Jahren 1000 fl. macht; welche Summe ist dazu erforderlich?

Nach der Tabelle machen 100000 fl. zu 4% mit Zinseszins in 20 Jahren 219112 fl. Die Aufgabe ist also: Zu 219112 fl. gehören 100000 fl.; wie viel zu 1000 fl. Antw. $456^{1866}/_{27389}$ fl.

Termin-Rechnung.

Je länger man eine Summe Geldes in Händen hat und vortheilhaft gebraucht, desto größer ist der Nutzen, den sie bringt. Die Leistung einer unverzinslichen Zahlung vor dem Termin ist daher für den Zahlungspflichtigen von Nachtheil, für den Empfänger von Vortheil. Wird eine Zahlung nach dem Termin geleistet, so ist's umgekehrt. Nun kommt es im Leben nicht selten vor, daß eine Zahlung, die an einem bestimmten Termin auf einmal zu leisten ist, in verschiedenen Terminen gemacht werden will, oder daß eine solche, die in verschiedenen Terminen zu leisten ist, auf einmal entrichtet werden soll. Wie wird nun in diesem Falle verfahren, damit solches weder dem einen, noch dem andern Theile zum Schaden gereicht? Der Schuldner, welcher einen Theil der Summe vor dem Zahlungstermin entrichtet, darf dafür den andern Theil so lange über den Termin hinaus behalten, bis Schaden und Nutzen sich gegenseitig decken. Das Mittel der Ausgleichung also ist die Zeit, und die Bestimmung des Zeitpunktes, an dem die Zahlung ohne Nachtheil für beide Seiten stattzufinden hat, ist der Gegenstand der Terminrechnung. Dabei wird angenommen, daß eine Summe in einer gewissen Zeit denselben Nutzen bringe, als die Hälfte der Summe in der doppelten Zeit, als $^1/_3$ der Summe in der dreifachen Zeit, oder als die doppelte Summe in der Hälfte der Zeit, als die 3fache Summe in $^1/_3$ der Zeit u. s. w. Und so ist es auch in der That. 5 fl. werfen bei 5 Proc. in 4 Jahren eben so viel ab, als 4×5 oder 20 fl. in 1 Jahre, und eben so viel als 1 fl. in 5×4 oder 20 Jahren, nämlich 1 fl.

Wir behandeln übrigens nur die gewöhnlichsten Fälle.

a. Für einen Termin mehrere Termine.

Beisp. 1. A hat nach 2 Jahren 600 fl. ohne Zins zu zahlen;

er zahlt aber 300 fl. sogleich; wie lange darf er nun die übrigen 300 fl. behalten?

Hier springt sogleich in die Augen, daß A, da er die eine Hälfte der Schuld um 2 Jahre vor dem Termin zahlt, die andere Hälfte um eben so viel nach demselben, mithin erst in 4 Jahren zu zahlen hat. Die Art und Weise, es zu berechnen, ist aber die: A hat das Recht, die 600 fl. 2 Jahre lang zu benutzen. Nun bringen 600 fl. in 2 Jahren denselben Vortheil als 100 fl. in 6 × 2 oder 12 Jahren. Darf er aber 100 fl. 12 Jahre benutzen, so beträgt es für die 300 fl., die er noch behält, $1/3$ von 12 oder 4 Jahre. (300 fl. geben in 4 Jahren denselben Zins als 600 fl. in 2 J.)

Beisp. 2. B kauft ein Haus und bezahlt die Kaufsumme sogleich bis auf 500 fl., welche er in 6 Monat zu erlegen hat. Er bezahlt aber schon nach 3 Mon. 250 fl.; wie lange darf er dafür die übrigen 250 fl. noch benutzen?

Auch dieser Fall ist sehr einfach. Da B die einen 250 fl. 3 Mon. vor dem Termine zahlt, so darf er dafür die andern 250 fl. 3 Mon. über denselben hinaus behalten. Er hat diese also, anstatt nach 3 Mon., erst nach 6 zu entrichten. Die Berechnung ist folgende: B hat das Recht, die 500 fl. 6 Mon. lang zu benutzen. Der Nutzen von 500 fl. auf 6 Mon. ist aber = dem von 100 fl. auf 5 × 6 oder 30 Mon. Da er nun die vollen 500 fl. nur 3 Mon. in Händen hatte und dies so viel ist als 100 auf 5 × 3 oder 15 Mon.; so hat er nach der ersten Zahlung noch den Nutzen von 100 fl. auf 30 — 15 = 15 Mon. anzusprechen. Nun ist die Frage: Auf welche Zeit beträgt der Nutzen von 250 fl. eben so viel, als von 100 fl. in 15 Mon.? 100 fl. auf 15 Mon. = 50 fl. auf 2 × 15 oder 30 Mon. = 250 fl. auf $1/5$ × 30 oder 6 M.

Beisp. 3. C hat nach 9 Mon. 1200 fl. zu zahlen. Nun zahlt er aber schon nach 3 Mon. 350 fl. und nach weiteren 2 Mon. 450 fl.; wie lange darf er den Rest dann noch benützen?

Ausr.

a. 1200 fl. 9 Mon. = 10800 fl. 1 Mon.		e. 10800
b. 1200 fl. 3 Mon. = 3600 fl. 1 Mon.		5300
c. 850 fl. 2 „ = 1700 fl. 1 „		f. 400 | 5500 | $13^3/_4$ Mon.
d. 5300 fl. 1 Mon.		

Erklärung. a. C darf die 1200 fl. auf 9 Mon. benutzen. 1200 fl. auf 9 Mon. = 9 × 1200 oder 10800 fl. auf 1 Monat. b. Die vollen 1200 fl. benutzte C nur 3 Mon. lang, thut 3 × 1200 oder 3600 fl. auf 1 Monat. c. Die gezahlten 350 fl. von 1200 fl. ab, bleiben 850 fl. Diese verwendete er 2 Mon. lang, thut 2 × 850 oder 1700 fl. auf 1 Mon. d. Mithin hat C bis zu diesem Zeitpunkt 3600 + 1700 fl = 5300 fl. 1 Mon. lang benutzt. e. Von 10800 fl. durfte er den Nutzen auf 1 M. ansprechen, von 5300 fl. hat er denselben auf diese Zeit bereits gehabt; also steht ihm noch die Benutzung von 5500 fl. auf 1 Mon. zu. f. Die Summe, welche er noch in Händen hat, ist 1200 — (350 + 450) = 400 fl. Nun heißts: Auf welche Zeit beträgt der Nutzen von 400 fl. so viel als von 5500 fl. auf 1 Mon.? 5500 fl. auf Mon. = 1 fl. auf 5500 Mon.; bei 400 fl. macht's $1/_{400}$ dieser Zeit; 5500 Mon. durch 400 getheilt = $13^3/_4$ Mon. Also hat C das Recht, die restigen 400 fl. noch 1 Jahr $1^3/_4$ Mon. lang zu benutzen.

b. Für mehrere Termine einen Termin.

Beisp. 1. 800 fl. sind in 2 Terminen zu zahlen und zwar 400 fl. nach 3 Jahren und 400 fl. nach 5 Jahren; wann ist die Summe auf einmal zu erlegen? Antwort: in 4 Jahren.

Da die 2 Posten von gleicher Größe sind, so fällt der zu bestimmende Termin in die Mitte der beiden gegebenen. Die 800 fl. sind daher nach 4 J. zahlbar. Hiernach werden die einen 400 fl. 1 Jahr später, die andern 1 Jahr früher gezahlt; Vor- und Nachtheil heben sich so gegenseitig auf. Die umständlichere Berechnung ist die:

400 fl. 3 J. = 100 fl. 12 J.		8 | 32 J. | 4 J.
400 fl. 5 J. = 100 fl. 20 J.		32
800 fl.	100 fl. 32 J.	

Der Zahlungspflichtige ist berechtigt, 100 fl. 32 J. lang zu benutzen. Der Vortheil, den 100 fl. in 32 J. bringen, ist gleich dem, den 800 fl. in dem 8. Theil dieser Zeit geben. $\frac{1}{8}$ von 32 J. = 4 Jahre.

Beisp. 2. A kauft für 3600 fl. ein Haus, unter der Bedingung, daß ihm gestattet werde, 600 fl. nach 1 Mon., 800 fl. nach 3 Mon., 1000 fl. nach 6 Mon. und 1200 nach 8 Mon. zu zahlen. Wann kann er seine Schuld auf einmal abtragen? Antwort: In $5\frac{1}{6}$ Mon.

Berechnung.

600 fl. 1 Mon. = 100 fl. 6 Mon.		36 | 186 M. | $5\frac{1}{6}$ Mon.
800 fl. 3 „ = 100 fl. 24 „		180
1000 fl. 6 „ = 100 fl. 60 „		$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
1200 fl. 8 „ = 100 fl. 96 „		
3600 fl.	100 fl. 186 Mon.	

A hat das Recht, 100 fl. 186 Mon. lang zu benutzen. Der Gewinn, den 100 fl. in 186 Monat bringen, ist gleich dem, den 3600 fl. in dem 36. Theil dieser Zeit geben. $\frac{1}{36}$ von 186 Mon. = $5\frac{1}{6}$ Mon.

Beisp. 3. Ich leihe dem B zu 5% am 1. März 400 fl., am 24. Juli 300 fl. und am 10. Okt. 600 fl. und wünsche, daß der Zinstermin von sämmtlichen Posten einer und derselbe sei. Auf welchen Tag wird dieser fallen müssen?

a. Berechnung der jährlichen Zinsen à 5%.

400 fl. K. = 20 fl. Zs., fällig d. 1. März.
300 fl. „ = 15 fl. „ „ „ 24. Juli, $4\frac{4}{5}$ M. nach d. 1. März.
600 fl. „ = 30 fl. „ „ „ 10. Okt., $7\frac{1}{3}$ „ „ „ 1. „

b. Berechnung des mittleren Zinstermins.

Der erste Zins ist am 1. März des folgenden Jahres fällig. An diesem Tage stellt sich die Aufgabe: B hat heute 20 fl., nach $4\frac{4}{5}$ Mon. 15 fl. und nach $7\frac{1}{3}$ Mon. 30 fl. zu zahlen; wann hat er diese 3 Posten zugleich abzutragen? Da B die 20 fl. heute zu zahlen hat, so hat er kein Recht darauf, sie noch länger zu benutzen. Dagegen steht ihm zu, die 15 fl. noch $4\frac{4}{5}$ Mon. und die 30 fl. noch $7\frac{1}{3}$ Mon. für sich zu verwenden.

20 fl. 0 Mon.		65 | 292 | 4 Mon.	
15 fl. $4\frac{4}{5}$ „	= 1 fl. 72 Mon.	260	
30 fl. $7\frac{1}{3}$ „	= 1 fl. 220 „	32	
65 fl.	1 fl. 292 „	30	
		65 | 960 | $14\frac{10}{13}$ Tg.	

Für $14\frac{10}{13}$ Tg. werden 15 Tg. genommen. Der Zinstermin fällt also 4 Mon. 15 Tg. nach dem 1. März d. i. auf den 16. Juli.

Abzugs-Rechnungen.

A. Rabattrechnung.

A kauft von B Waaren. Der Betrag dafür ist nach einem Jahre zahlbar, d. h. derselbe darf ein Jahr lang unverzinslich stehen bleiben. Mithin kann A die hierzu nöthige Summe noch 1 Jahr zu seinem Nutzen verwenden. Zahlt er aber aus irgend einem Grunde sogleich, so geht dieser Vortheil auf B über. Dafür gewährt dann B dem A einen verhältnißmäßigen Abzug. Dieser Abzug heißt Rabatt.

Wie der Zins, so wird auch der Rabatt pro cento d. i. vom Hundert festgesetzt. Man sagt z. B.: es werden 4% Interessen, und: es werden 4% Rabatt gegeben. Der letztere Ausdruck läßt sich aber in einem doppelten Sinne nehmen. A erhält 4% Rabatt, kann heißen:

a) A zahlt anstatt 100 nur 100 — 4 = 96 (Rabatt in 100);
b) A zahlt anstatt 100 + 4 oder 104 nur 100 (Rabatt auf 100).

Durch die Rabattberechnung soll sich weder für den einen Theil, noch für den andern ein Gewinn oder Verlust ergeben. Die Summe, welche nach Abzug des Rabattes zu bezahlen ist, soll daher immer genau so viel betragen, daß sie bei den gegebenen Procenten bis zur Verfallzeit so viel Interessen gibt, als der Rabatt ausmacht.

Gewährt B dem A 4% Rabatt in 100, so erhält er anstatt 100 fl. nur 100 — 4 = 96 fl. 96 fl. machen zu 4% in 1 Jahre $3\frac{21}{25}$ fl. Zins. 4 fl. Rabatt hat B gegeben, $3\frac{21}{25}$ fl. Zins nimmt er dagegen ein; folglich hat er $\frac{4}{25}$ fl. Verlust.

Gestattet B dem A 4% Procent Rabatt auf 100, so erhält er für je 104 fl. nur 100 fl. baar. 100 fl. tragen zu 4% in 1 Jahre gerade 4 fl. Zins. Der von ihm gegebene Rabatt und der dafür erhaltene Zins heben sich also in diesem Falle gegenseitig auf.

Die Berechnung des Rabattes auf 100 ist demnach nur allein die richtige. Gleichwohl geschieht es, daß die Kaufleute, Wechsler und Buchhändler den Rabatt in 100 berechnen.

Die ursprüngliche Summe, welche nach einer gewissen Zeit zu zahlen ist, nennt man das Kapital, die Schuld oder den künftigen Werth, und die vor dem Zahlungstermine gezahlte und um den

Rabatt verkürzte Summme die **Baarzahlung**, den **baaren** oder **gegenwärtigen Werth**.

Betrifft der Rabatt einen Wechsel, der vor der Verfallzeit bezahlt wird, so heißt er **Disconto**; betrifft er eine Zahlung für Waaren, welche öfter auch erst berechnet werden muß, so pflegt man ihn **Decort** zu nennen.

A. Rabatt in 100.

Mündlich.

1) Ich kaufe für 125 fl. Waaren, und da ich sogleich zahle, so erhalte ich 10% Rabatt. Wie viel beträgt die Baarzahlung?

a) Man berechnet zuerst den Rabatt und zieht ihn dann von der Summe ab. Von 100 fl. gehen 10 fl. ab, von 25 fl. der 4te Theil von 10 fl. = $2\frac{1}{2}$ fl., und von 125 oder 5 × 25 fl. 5 × $2\frac{1}{2}$ oder $12\frac{1}{2}$ fl. Ich zahle daher 125 fl. — $12\frac{1}{2}$ fl. = $112\frac{1}{2}$ fl. Oder: 125 fl. = $1\frac{1}{4}$ × 100 fl.; also beträgt der Rabatt auch $1\frac{1}{4}$ × 10 oder $12\frac{1}{2}$ fl. ꝛc. Oder: Bei 10% in Hundert beträgt der Rabatt $\frac{1}{10}$ der Schuld; $\frac{1}{10}$ von 125 fl. = $12\frac{1}{2}$ fl.

b. Man berechnet sogleich die Baarzahlung. Für 100 fl. zahle ich 90 fl., für 25 fl. $\frac{1}{4}$ × 90 = $22\frac{1}{2}$, und für 125 fl. 5 × $22\frac{1}{2}$ = $112\frac{1}{2}$ fl. Oder: Zahle ich für 100 fl. nur 90, so habe ich für 125 fl. $1\frac{1}{4}$ × 90 = 90 + $22\frac{1}{2}$ = $112\frac{1}{2}$ fl. zu entrichten.

2) Ein Geschäftsmann bezieht aus einer Fabrik $3\frac{3}{4}$ Ctr. Waaren à 36 fl., zahlbar in 6 Mon. oder baar mit 8% Rabatt.*) Wie viel beträgt die Baarzahlung?

a. Preisberechnung. 3 Ctr. machen 3 × 36 oder 108 fl.; $\frac{3}{4}$ Ctr. machen $\frac{3}{4}$ × 36 oder, was eben so viel ist, $\frac{1}{4}$ × 108 = 27 fl.; 108 + 27 fl. = 135 fl.

b. Rabattberechnung. 135 = 100 + 25 + 10; 100 fl. machen 8, 25 fl. machen 2, 125 fl. also 8 + 2 oder 10 fl.; 10 fl. machen $\frac{1}{10}$ von 8 oder $\frac{4}{5}$ fl. Der Rabatt ist also 10 fl. 48 kr. Mithin beträgt die Baarzahlung 135 fl. — 10 fl. 48 kr. = 124 fl. 12 kr.

3) A kauft einen Wechsel im Betrage von 600 fl., welcher nach 4 Mon. zahlbar ist, mit $\frac{3}{4}$ proc. monatlichen Rabatt; wie viel muß er dafür zahlen?

Ausr. Auf 1 Mon. ist der Rabatt = $\frac{3}{4}$ proc., auf 4 Mon. also 4 × $\frac{3}{4}$ oder 3 proc.; von 600 fl. beträgt derselbe 6 × 3 oder 18 fl.; 600 — 18 fl. = 582 fl.**)

Aufg. z. Kopfr., S. 42.

---

*) Der bemerkte Rabatt gilt bei den Kaufleuten nicht pro anno, sondern immer von der Zielzeit, hier also 8 proc. für 6 Monate.

**) Was ist ein Wechsel oder Wechselbrief? Angenommen, ich habe an Anton Fichtner in Wien 1000 fl. zu zahlen. Anstatt diese Summe baar zu übersenden, zahle ich sie an Ludwig Gutmann in Ansbach, der mit Christian Edel in Wien in Handelsverbindung steht. Ludwig Gutmann schreibt nun folgenden Brief.

1000 fl. im $52\frac{1}{2}$ fl.-Fuß.

Ansbach, den 2. März 1862.

Acht Tage nach Sicht zahlen Sie gegen diesen meinen Primawechsel an Herrn

Schriftlich.

Beisp. 1. Wie viel beträgt die Baarzahlung für 2750 fl., wenn $5^1/_2$ proc. Rabatt in 100 gegeben werden?

Erste Weise:

100 fl. Kap.	$5^1/_2$ fl. Rab.	100 : 2750 = $5^1/_2$ fl. : x
2750 fl. „	?	x = $151^1/_4$ fl.

2750 fl. Kapital
$151^1/_4$ fl. Rabatt
$2598^3/_4$ fl. Baarzahlung.

Zweite Weise:

100 fl. K.	$94^1/_2$ fl. baar	100 : 2750 = $94^1/_2$ fl. : x
2750 fl.	?	x = $2598^3/_4$ fl.

Beisp. 2. Es bezieht Jemand 185 Ellen à 2 fl. 48 kr., zahlbar in 8 Mon. oder baar mit $7^1/_2$ proc. Rabatt; wie viel beträgt die Baarzahlung? Antwort: 479 fl. 9 kr.

Waarenber. 185 × 2 fl. = 370 fl.
185 × $^4/_5$ fl. = 148 fl.
518 fl.

Rabattber.: Wie oben.

Auf einmal:	
?	185 Ell.
1	$2^4/_5$ fl.
100	$92^1/_2$ fl.

185 Ell. kosten 185 × $2^4/_5$ fl. Statt 100 fl. werden $92^1/_2$ fl. gezahlt. So oft also 100 fl. in 185 × $2^4/_5$ fl. enthalten sind, so vielmal $92^1/_2$ fl. sind zu zahlen.

Aufg. z. Zifferr., 33. Uebung.

B. Rabatt auf 100.

Beisp. 1. Ein Vater hat an seinen Stiefsohn einen Pflichttheil von 6400 fl. nach Abfluß von 5 Jahren hinauszuzahlen. Der Sohn hat aber das Geld zur Begründung eines Geschäfts jetzt nöthig und will seinem Vater bei sofortiger Bezahlung 4 proc. jährlichen Rabatt gestatten. Wie viel wird dieser nun zu zahlen haben?

Ausr. Der Vater hat eine Summe zu zahlen, die bei 4% mit dem einfachen Zinse in 5 Jahren auf 6400 fl. anwächst. Um dieselbe zu finden, so suchen wir zunächst, wie hoch 100 fl. bei gleichem Zins-

---

Anton Fichtner in Wien oder dessen Ordre die Summe von Eintausend Gulden im $52^1/_2$ fl.-Fuß. Werth empfangen. Stellen Sie denselben auf Rechnung laut Bericht.

Ludwig Gutmann.

An Herrn Christian Edel in Wien.

Das ist ein Wechsel oder Wechselbrief. Ich nehme denselben in Empfang und sende ihn an Anton Fichtner in Wien. Dieser zeigt oder präsentirt ihn dem Christian Edel, welcher, wenn er nicht protestirt, d. h. die Zahlung nicht ablehnt, darunter schreibt: „acceptirt" d. h. angenommen, worauf er nach acht Tagen das Geld an Fichtner zahlt. So erhält dieser das Geld auf eine eben so billige als sichere Weise. Sollte der Wechsel verloren gehen, so wird er durch einen zweiten leicht wieder ersetzt. Uebrigens kann Fichtner den Wechsel auch an einen Andern verkaufen, in welchem Falle dann der Käufer das Geld erhebt.

fuße und in gleicher Zeit anwachsen. Bei 4 proc. bringen 100 fl. in 5 Jahren 5 $\times$ 4 oder 20 fl. Zins. 100 fl. betragen daher nach dieser Zeit mit dem Zinse 120 fl. Hätte der Sohn nach 5 J. nur 120 fl. zu erhalten, so würde ihm der Vater jetzt 100 fl. zu zahlen haben. Also muß ihm der Vater so vielmal 100 fl. zahlen, als 120 fl. in 6400 fl. enthalten sind.

$$120 \mid 6400 \mid 53\,^1/_3 \times 100 = 5333\,^1/_3 \text{ fl.}$$

In Form einer Regeldetri-Aufgabe ausgedrückt, heißt es: 120 fl. künftiger Werth machen 100 fl. Baarzahlung; was thun 6400 fl.?

120 fl. K.	100 fl. br.	120 : 6400 = 100 fl. : x
6400 fl.	?	x = 5333 $^1/_3$ fl.

Beisp. 2. A hat an B über 1 Jahr 200 fl., über 2 Jahre 300 fl. und über 3 Jahre 400 fl. zu zahlen. B wünscht, diese drei Posten sogleich auf einmal zu erhalten. Wie viel macht's bei 5% Rabatt?

Dieß gibt drei Rechnungen, mit der Addition vier.

a.

105 fl. K.	100 fl. Bz.	105 : 200 = 100 fl. : x
200 „ „	?	x = 190 $^{10}/_{21}$ fl.

b.

110 fl. K.	100 fl. Bz.	110 : 300 = 100 fl. : x
300 fl. „	?	x = 272 $^8/_{11}$ fl.

c.

115 fl. K.	100 fl. Bz.	115 : 400 = 100 fl. : x
400 fl. „	?	x = 347 $^{19}/_{23}$ fl.

d.

	5313		
a. 190 $^{10}/_{21}$ fl.	253	2530	
b. 272 $^8/_{11}$ „	483	3864	
c. 347 $^{19}/_{23}$ „	231	4389	
Summa 811 $^{157}/_{5313}$ fl.	5313	10783	= 2 $^{157}/_{5313}$.

Aufg. z. Zifferr., 34 Uebung.

---

6. Tararechnung.

Werden Waaren, die nach dem Gewichte zu berechnen sind, versendet; so wird ihre Quantität gewöhnlich dadurch ermittelt, daß man sie mit den Gegenständen, worein sie verpackt sind, zusammen wiegt, dann das Gewicht der letzteren d. i. der Fässer, Kisten, Säcke u. s. w. bestimmt, und hieraus das Gewicht der reinen Waare ableitet. Es kommt also dreierlei Gewicht in Betracht: das Gesammt- oder Bruttogewicht, kurzweg Brutto genannt, das Gewicht der Dinge, in denen die Versendung geschieht, die Tara, und das Gewicht der reinen

Waare, das **Nettogewicht**. Die Tara wird entweder einfach nach dem Gewichte d. i. in Pfund, oder nach Procenten bestimmt.

In gewissen Fällen findet auch noch als Entschädigung für Abgang, Einwägen und Eintrocknen ein Abzug von der reinen Waare statt. Dieser Abzug heißt **Gutgewicht**.

A. Mündlich.

a. Die Tara nach dem Gewichte.

1) Eine Kiste Waare wiegt Brutto 350 Pfd.; Tara (Gewicht der Kiste) 36 Pfd.; wie viel Netto? (350—36=314 Pfd.) 2) Ein Faß Tabak wiegt Brutto 400 Pfd.; Netto 364 Pfd.; wie viel Tara? (400—364=36 Pfd.) 3) Bei einer Sendung Waare beträgt das Nettogewicht 187 Pfd. und die Tara 18 Pfd.; wie viel macht das Bruttogewicht? (187 + 18 = 205 Pfd.)

b. Die Tara nach Procenten.

1) Ein Faß Oel hat 340 Pfd. Brutto; Tara 12 proc.; wie viel Netto? (Die Tara beträgt $3\frac{2}{5} \times 12 = 36 + 4\frac{4}{5}$ oder $40\frac{4}{5}$ Pfd.; das Netto also $340 - 40\frac{4}{5} = 299\frac{1}{5}$ Pfd.) 2) Das Brutto einer Waare ist 575 Pfd.; Tara 10 proc.; wie viel Netto? (Die Tara ist $\frac{1}{10} \times 575 = 57\frac{1}{2}$ Pfd., das Netto also $575 - 57\frac{1}{2} = 517\frac{1}{2}$ Pfd.) 3) Das Bruttogewicht beträgt 430 Pfd.; die Tara 5 proc.; wie viel Netto? (Die Tara beträgt $\frac{1}{20}$ von 430 Pfd. = $21\frac{1}{2}$ Pfd.; 430 Pfd. — $21\frac{1}{2}$ Pfd. = $408\frac{1}{2}$ Pfd.) 4) Eine Waare wiegt Brutto 500 Pfd.; Tara $52\frac{1}{2}$ Pfd.; wie viel proc. beträgt diese? ($\frac{1}{5}$ von $52\frac{1}{2}$ Pfd. = $10\frac{1}{2}$ Pfd., also $10\frac{1}{2}$ %.)

c. Tara mit Gutgewicht.

Beispiel. A erhält ein Faß Waare von 500 Pfd. Brutto. Tara 10%, Gutgewicht 2%; wie viel beträgt das Netto? (441 Pfd.)

Hier entsteht die Frage, ob nicht die 10% Tara und 2% Gutgewicht zu addiren, im Ganzen zu berechnen und dann in Abzug zu bringen seien. Antwort: Nein; denn die 2% Gutgewicht gehen nicht vom Brutto, also nicht von der Waare **und** der Tara, sondern vom Waarengewicht **allein** ab. Es sind also zuerst die 10% Tara in Abzug zu bringen und dann die 2% Gutgewicht. Die 10% Tara betragen 5 × 10 oder 50 Pfd.; 500 Pfd. — 50 Pfd. = 450 Pfd.; davon 2%, nämlich $4\frac{1}{2} \times 2$ oder 9 Pfd. Gutgewicht ab, gibt 441 Pfd. Netto.

B. Schriftlich.

a. Tara und Gutgewicht an sich.

Beisp. 1. 3 Körbe Feigen wiegen Brutto 148 Pfd., 166 Pfd., 195 Pfd.; die Tara beträgt von jedem Korbe 18 Pfd.; wie viel Netto?

Ausr.

148 Pfd.	
166 „	
195 „	
509 Pfd.	Brutto
54 „	Tara
455 Pfd.	Netto.

Beisp. 2. Das Bruttogewicht einer Waarensendung ist 785 Pfd.; Tara 8 Proc.; wie viel Netto?

Ausr.

100 Pfd. Br.	92 Pfd. N.	100 : 785 = 92 Pfd. : x
785 „ „	?	$x = 722^1/_5$ Pfd.

Anm. In der Proportion setzen wir gewöhnlich das erste Verhältniß in reinen Zahlen. Bei Fertigung des Ansatzes sind jedoch die Benennungen ausdrücklich anzugeben. Hier ist also zu sprechen: 100 Pfd. Brutto verhalten sich zu 785 Pfd. Brutto wie 92 Pfd. Netto zu x Pfd. Netto. So oft 100 Pfd. Brutto in 785 Pfd. Brutto enthalten sind, so vielmal 92 Pfd. Netto.

Beisp. 3. Fünf Ballen Waare wiegen Brutto 780 Pfd.; Tara 5%; Gutgewicht 2%. Wie viel Netto?

Zweisatz.		Proportion.
100 Pfd. Br.	95 Pfd. N.	100 : 780 = 95 Pfd. : x
780 „ „	?	x = 741 Pfd.
100 Pfd.	98 Pfd. N.	100 : 741 = 98 Pfd. : x
741 „	?	$x = 726^9/_{50}$ Pfd.

Kettensatz.

? ℔ Netto	780 ℔ Brutto
100 ℔ Br.	95 ℔ ohne Gutgew.
100 ℔ ohne Gutgw.	98 ℔ Netto
50	$36309 = 726^9/_{50}$ ℔ Netto.

Aufg. z. Zifferr., 35. Uebung.

b. Mit Preisberechnung.

Beisp. 1. Wie berechnet sich eine Kiste mit Gewürz von $45^1/_4$ Pfd. Brutto, wenn die Tara $8^3/_4$ Pfd. beträgt und das Pfd. Netto 18 fl. kostet?

Ausr. $45^1/_4$ Pfd. Brutto
$8^3/_4$ Pfd. Tara
$36^1/_2$ Pfd. Netto à 18 fl. $= 36^1/_2 \times 18 = 657$ fl.

Beisp. 2. A erhält 3 Fässer Waare von 314, 282 und 304 Pfd. Brutto. Wie viel hat er dafür zu zahlen, wenn 10% Tara, $2^1/_2$% Gutgewicht und 32 fl. für den Ctr. Netto gerechnet werden?

a.

314	? fl.	
282	100 Pfd. Br.	
304	100 Pfd. ohne Gutgew.	
900 Pfd. Br.	100 Pfd. Netto	
	25	

b.

? fl.	900 Pfd. Brutto
100 Pfd. Br.	90 Pfd. ohne Gutgew.
100 Pfd. ohne Gutgew.	$97^1/_2$ Pfd. Netto
100 Pfd. Netto	32 fl.
25	$6318 = 252$ fl. $43^1/_5$ kr.

Aufg. z. Zifferr., 36. Uebung.

Gesellschafts- oder Theilungs-Rechnung.

Wenn Zwei oder Mehrere zusammentreten, um gemeinschaftlich Etwas zu unternehmen, so bilden sie eine Gesellschaft. Beabsichtigen sie, einen Einkauf zu machen, ein Geschäft zu begründen rc., so haben sie hiezu eine gewisse Summe Geldes nöthig. Was jeder dazu beiträgt oder einlegt, wird seine Einlage genannt. Entweder sind die Einlagen von gleicher oder von verschiedener Größe. Sind sie von gleicher Größe, so wird auch der Gewinn oder der Verlust in gleiche Theile getheilt. Mit Aufgaben dieser Art haben wir es hier nicht zu thun. Vielmehr werden jetzt blos solche Fälle in Betracht gezogen, wobei die Einlagen und dadurch auch die Antheile an dem Gewinn oder Verlust von verschiedener Größe sind. Das ist Gegenstand der eigentlichen Gesellschaftsrechnung. Es wird dieselbe aber auch bei Vertheilung der Steuern, Umlagen, Brandschatzungen und Einquartierungen, dann bei Concursen, Erbtheilungen, sowie überhaupt da in Anwendung gebracht, wo etwas nach bestimmten Verhältnissen zu vertheilen ist. Diese Verhältnisse werden sehr verschieden bezeichnet. In der Art und Weise, wie es geschieht, liegt die größere oder geringere Schwierigkeit der Berechnung. Daher ist es gut, die Schüler durch mündliches Berechnen von Aufgaben mit kleineren Zahlengrößen auf die schriftliche Ausführung gehörig vorzubereiten.

A. Mündlich.

1) Ich kaufe 2 Pfd. und dann wieder 3 Pfd. Kaffee von gleicher Sorte und zahle im Ganzen 3 fl. 15 kr.; wie viel kostet jeder Posten?

Aufl. Im Ganzen kaufe ich 2 Pfd. + 3 Pfd. oder 5 Pfd. Kaffee und zahle dafür 3 fl. 15 kr. Die Aufgabe ist also: 5 Pfd. Kaffee kosten 3 fl. 15 kr.; wie viel kosten a) 2 Pfd.? b) 3 Pfd.? — Ausr.: 5 Pfd. kosten 3 fl. 15 kr., 1 Pfd. kostet $\frac{1}{5}$ von 3 fl. 15 kr. = 39 kr. Kostet 1 Pfd. 39 kr., so kosten 2 Pfd. 2 × 39 kr. = 1 fl. 18 kr., und 3 Pfd. kosten 3 × 39 kr. = 1 fl. 57 kr.

2) A und B haben 384 fl. so unter sich zu theilen, daß A 1 Theil und B 2 Theile von gleicher Größe erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Aufl. Da A 1 Theil und B zwei Theile erhalten soll, so ist die zu theilende Summe in 1 + 2 oder 3 gleiche Theile zu zerlegen. 384 fl. = 3 × 128 fl. A bekommt also 1 × 128 fl., und B, dem 2 Theile gebühren, erhält 2 × 128 = 256 fl.

3) Franz und Wilhelm bekommen 75 Kirschen. So oft Franz 2 derselben nimmt, nimmt Wilhelm 3. Wie viel wird jeder bekommen?

Aufl. Franz nimmt 2 Kirschen und Wilhelm 3; zusammen haben sie dann 5; 5 Kirschen sind in 75 Kirschen 15mal enthalten; also erhält Franz 15 × 2 oder 30, und Wilhelm 15 × 3 oder 45 Kirschen. Oder wir betrachten die 2 + 3 oder 5 Kirschen, die auf einmal weggenommen werden, als Ganzes und jede Kirsche als einen seiner Theile. Demnach erhält Franz 2 Theile wie Wilhelm 3. Wie die 5

Kirschen, so werden auch die 75 getheilt. 1 Theil hievon beträgt $^1/_5$ von 75 oder 15. Franz erhält 2 Theile, also 2 × 15 oder 30, und Wilhelm erhält 3 Theile, also 3 × 15 oder 45.

4) 1200 fl. sind so zu theilen, daß A 3mal so viel als B bekommt.

Aufl. A soll 3mal so viel als B erhalten. Bekommt B also 1 Th., so muß A 3mal 1 Theil = 3 Theile erhalten. Die 1200 fl. sind daher in 1 + 3 oder 4 gleiche Theile zu theilen. — Das Weitere wie oben.

5) 245 Thlr. sind so zu theilen, daß B $2^1/_2$mal so viel als C bek.

Aufl. B soll $2^1/_2$mal so viel als C bekommen. Gibt man dem C also 1 Th., so muß B $2^1/_2$ × 1 Theil = $2^1/_2$ Theil erhalten; gibt man dem C 2 Theile, so muß B $2^1/_2$ × 2 = 5 Theile bekommen ꝛc. Am einfachsten wird die Theilung, wenn man dem C 2 Theile gibt; denn in diesem Falle erhält B gerade 5. Die 245 Thlr. sind daher in 2 + 5 oder 7 gleiche Theile zu theilen.

6) A und B sollen 423 Krthlr. so unter sich theilen, daß sich der Antheil des A zu dem Antheile des B verhalte, wie $^4/_7$ zu $^5/_7$; wie viel muß jeder bekommen?

Aufl. Der Bruch $^4/_7$ enthält 4 Theile, wie der Bruch $^5/_7$ 5 Theile hat; A soll also 4 Theile erhalten, wie B 5; die 423 Krthlr. sind daher in 4 + 5 oder 9 gleiche Theile zu theilen. $^1/_9$ von 423 Krthlr. = 47 Krthlr.; also erhält A 4 × 47 und B 5 × 47 Krthlr.

7) Zwei Dörfer, A und B, haben 75 Morgen Weideplatz unter sich zu theilen, daß sich ihre Antheile wie 5 zu 3 verhalten. Wie viel wird jedem Dorfe zufallen?

Aufl. Wie verhält sich 5 zu 3? Antwort: 5 = 5 × 1, und 3 = 3 × 1; die Zahl 5 enthält also 5 Theile, wie die Zahl 3 deren 3 hat. Also ist der Ausdruck: die Antheile von A und B sollen sich wie 5 zu 3 verhalten = A soll 5 gleiche Theile erhalten, wie B 3. Die ganze Fläche ist daher in 5 + 3 oder 8 gleiche Theile zu theilen.

8) Fritz und Karl bekommen 105 Haselnüsse mit dem Auftrage, sie so unter sich zu theilen, daß ihre Antheile wie $^1/_3$ zu $^1/_4$ sich verhalten.

Aufl. $^1/_3$ und $^1/_4$ verhalten sich zu einander, wie $^4/_{12}$ und $^3/_{12}$. Fritz soll also 4 solche Theile bekommen, wie Karl 3. Folglich sind die 105 Haselnüsse in 4 + 3 oder 7 gleiche zu zerfällen.

9) A und B unternehmen einen Handel. A gibt 500 Thlr. dazu, B 700 Thlr. Sie gewinnen 360 Thlr. Wie viel hat jeder davon anzusprechen?

Aufl. Gibt A 500 Thlr. und B 700 Thlr., so ist die ganze Einlage 1200 Thlr. Mit diesen 1200 Thlrn. werden 360 Thlr. gewonnen. Hievon erhält jeder gerade so viel, als mit seiner Einlage gewonnen wird. Die erste Frage ist daher: Mit 1200 Thlr. werden 360 Thlr. gewonnen, wie viel mit den 500 Thlrn. des A? Die andere Frage heißt: Mit 1200 Thlr. werden 360 Thlr. gewonnen, wie viel mit den 700 Thlrn. des B? Beide Fragen sind leicht zu beantworten, wenn wir wissen, wie viel mit 100 Thlrn. gewonnen wird. Da mit 1200 Thlrn. 360 Thlr. ge-

wonnen werden, so kommt auf 100 Thlr. $^1/_{12}$ von 360 Thlr. = 30 Thlr. Also erhält A mit 500 Thlr. Einlage 5 × 30 oder 150 Thlr., und B mit 700 Thlrn. Einlage 7 × 30 oder 210 Thlr. Dadurch ist der ganze Gewinn erschöpft. Denn 150 + 210 Thlr. = 360 Thlr.

10) Die Zahl 70 ist in 2 Theile zu theilen, welche sich um 14 von einander unterscheiden.

a) Ich theile 70 zuerst in 2 gleiche Theile. 70 = 2 × 35. Wie bilde ich nun aus 35 + 35 zwei Zahlen, die sich um 14 von einander unterscheiden? Welche Zahlen entstehen, wenn ich von der einen Hälfte 1 nehme und der andern zulege? (34 + 36.) Und um wie viel unterscheiden sie sich von einander? Wie aber, wenn ich von der einen Hälfte 2 nehme und der andern zulege? — Um also aus 35 + 35 2 Zahlen zu erhalten, die sich um 14 von einander unterscheiden, so muß ich von der einen 35 7 nehmen und der andern 35 7 zulegen. Die eine Zahl beträgt dann 35 — 7 oder 28, und die andere 35 + 7 oder 42.

b) Ich suche zuerst die Zahl, deren Hälfte gleich ist dem kleineren der beiden Theile. Dieselbe ist 70 — 14 = 56. Die Hälfte von 56 = 28. Das ist der kleinere Theil; der größere Theil ist 28 + 14 oder 42.

c) Ich suche zuerst die Zahl, deren Hälfte gleich ist dem größeren der beiden Theile. Dieselbe beträgt 70 + 14 oder 84. Die Hälfte von 84 = 42. Das ist der größere Theil; der kleinere ist 42 — 14 oder 28.

11) Theile nun eben so 250 fl. in zwei Theile, deren einer 70 fl. mehr beträgt, als der andere! (250 fl. = 160 + 90 fl.)

Aufg. z. Kopfr. S. 43.

B. Schriftlich.

a. Der Theilungsfuß ist geradezu gegeben.

Beisp. 1. Die 3 Besitzer eines Waldes schlagen in diesem einmal 116 Klafter Scheitholz; davon kommen auf A 3 Theile, auf B 4 und auf C 5; wie viel also?

	a.		c.			b.	
Ausr.	A 3 Theile	=	$3 \times 9^2/_3$ Klftr.	=	29 Klftr.	12 | 116	$9^2/_3$
	B 4 „	=	$4 \times 9^2/_3$ „	=	$38^2/_3$ „	108	
	C 5 „	=	$5 \times 9^2/_3$ „	=	$48^1/_3$ „	8	
	12 Theile			=	116 Klftr.		

Beisp. 2. Zwei Webergesellen A und B fertigen in einer gewissen Zeit 375 Ellen, wie viel jeder, wenn B 8 Ellen wirkt bis A 7?

Ausr.	A 7 Ellen;	25 × 7 Ell.	= 175 Ell.	15 | 375	25
	B 8 „	25 × 8 „	= 200 „	30	
	15 Ellen		375 Ellen	75	

So oft 15 Ellen in 375 Ellen enthalten sind, so viel mal 7 Ellen macht A, so viel mal 8 Ellen macht B.

Beisp. 3. 3 Dampfmaschinen verbrauchen miteinander 847 Ctr. Steinkohlen; wie viel jede, wenn sie sich hinsichtlich ihres Kohlenverbrauchs verhalten wie 5, 7, 9?

Ausr. A	5 Theile	$= 5 \times 40\frac{1}{3}$	$= 201\frac{2}{3}$ Ctr.
B	7 „	$= 7 \times 40\frac{1}{3}$	$= 282\frac{1}{3}$ „
C	9 „	$= 9 \times 40\frac{1}{3}$	$= 363$ „
	21 Theile		$= 847$ Ctr.

21|847|$40\frac{1}{3}$
84
7

Die Maschinen verhalten sich hinsichtlich des Kohlenverbrauchs wie 5, 7, 9, d. h. von 5 + 7 + 9 oder 21 Theilen Kohle verbraucht die Maschine A in derselben Zeit 5, in der B 7 und C 9 verbrauchen. Da nun 1 Theil, nämlich $\frac{1}{21}$ von 847 Ctr. = $40\frac{1}{3}$ Ctr., so kommt auf A 5 × $40\frac{1}{3}$ Ctr. 2c.

Beisp. 4. Von 1280 fl. erhält A $\frac{1}{3}$, B $\frac{2}{5}$, C den Rest; wie viel also jeder? (A $426\frac{2}{3}$ fl., B 512 fl., C $341\frac{1}{3}$ fl.)

Ausr. 3|1280 fl. — A $426\frac{2}{3}$ fl.

5|1280 fl. — 256 — 2 — B 512 fl.

A $426\frac{2}{3}$ fl.
B 512 fl.
$938\frac{2}{3}$ fl.

1280 fl.
$938\frac{2}{3}$ fl.
C $341\frac{1}{3}$ fl.

Die Theile $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$ beziehen sich auf's Ganze, d. i. auf 1280 fl. A erhält also von dieser Summe den 3. Theil, B 2 mal den 5. Theil, C erhält das, was nach Abzug der Antheile des A und B im Reste bleibt.

Beisp. 5. A und B liefern in Akkord eine Partie Holz zum Eisenbahnbau. A gibt zum Ankaufe desselben 3500 fl., B 4000 fl. Ihr Gewinn beträgt 875 fl.; wie viel kommt davon auf jeden?

Ausr. 3500 fl Einlage des A.
4000 „ „ „ B.
7500 fl. ganze Einlage.

A. 7500 fl. Einl. 875 fl Gew.
3500 fl. „ ?

$7500 : 3500 = 875$ fl. : x
A $408\frac{1}{3}$ fl.

B. 7500 fl. Einl. 875 fl. Gew.
4000 fl. „ ?

$7500 : 4000 = 875$ fl. : x
B $466\frac{2}{3}$ fl.

Mit den zusammengelegten 3500 + 4000 oder 7500 fl. werden 875 fl. gewonnen. Die Hälfte der ganzen Einlage gibt Anspruch auf die Hälfte des Gewinnes, $\frac{1}{3}$ der Einlage auf $\frac{1}{3}$ des Gewinnes, $\frac{1}{4}$ auf $\frac{1}{4}$; auf 1 fl. der Einlage kommt $\frac{1}{7500}$ des Gewinnes. Sowie sich also die ganze Einlage zur Einlage des Einzelnen verhält, eben so verhält sich der ganze Gewinn zu dem Gewinn des Einzelnen.

Aufg. z. Zifferr., 37. Uebung.

b. Der Theilungsfuß ist nicht geradezu gegeben.

Beisp. 1. A, B und C haben sich in 2400 fl. so zu theilen, daß sich ihre Antheile zu einander verhalten, wie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$. Wie viel macht's für den Einzelnen?

Antwort: Für A $982\frac{36}{37}$ fl., B $778\frac{14}{37}$ fl., C $778\frac{24}{37}$ fl.

	60
A $\frac{1}{4}$	15 Theile.
B $\frac{1}{5}$	12 „
C $\frac{1}{6}$	10 „
	37 Theile.

Man vergleiche diese Aufgabe mit der unter a. Nr. 4. Dort bezeichnen die Bruchzahlen das Verhältniß der Antheile zum **Ganzen**, hier das Verhältniß des **einen Antheils** zum **andern**.

Dort konnten die Antheile aus dem Ganzen sogleich herausgezogen werden; hier muß man die Bruchzahlen, um das Verhältniß der Antheile zu einander zu erkennen, erst gleichnamig machen, und dann, um zu wissen, in wie viele gleiche Theile die Summe zu theilen ist, zusammenzählen. Nachdem dieß geschehen ist, heißt es: 37 Theile = 2400 fl.; wie viel betragen die 15 Theile für A, die 12 Theile für B und die 10 Theile für C? Die Ausrechnung ist bekannt.

Beisp. 2. 3600 fl. sind so zu theilen, daß die Theile A, B und C im Verhältniß zu einander stehen, wie die Zahlen $^2/_3$, $1^1/_2$ und 2; wie viel machts für jeden?

Antwort: Für A 576 fl., B 1296 fl., C 1728 fl.

	6	
A $^2/_3$	4 Theile	25 Th. = 3600 fl.; was thun 4 Theile?
B $1^1/_2$	9 „	25 Th. = 3600 fl.; „ „ 9 „
C 2	12 „	25 Th. = 3600 fl.; „ „ 12 „
	25 Theile.	

Beisp. 3. 464 Pfd. Waare werden von A, B und C unter sich in der Art getheilt, daß B $1^1/_2$ mal so viel als A, und C $^3/_4$ mal so viel als B erhält; wie viel kommt auf jeden?

Antwort: Auf A 128 Pfd., B 192 Pfd., C 144 Pfd.

	8
A 1 Th.	8 Theile
B $1^1/_2$ „	12 „
C $1^1/_8$ „	9 „
	29 Theile

Den Antheil des A bezeichnen wir mit 1. Der Anth. des B ist $1^1/_2$mal so groß; er beträgt also $1^1/_2 \times 1 = 1^1/_2$. Der Antheil des C ist $^3/_4$ mal so groß als der des B; er beträgt daher $^3/_4 \times 1^1/_2 = 1^1/_8$.

Beisp. 4. A, B und C haben 2100 fl. so unter sich zu theilen, daß 75 fl. mehr als A, und C wieder 75 fl. mehr als B erhält; wie viel bekommt jeder von ihnen?

Antwort: A 625 fl., B 700 fl., C 775 fl.

Ausrechnung.

A 1 Theil
B 1 „ + 75 fl.
C 1 „ + 150 fl. (= 75 + 75 fl.)
Die 3 Theile + 225 fl. = 2100 fl.

Was B und C über 1 Theil, also mehr denn A bekommen, nehmen sie sich im voraus weg. Das Uebrige theilen sie mit dem A gleichheitlich.

2100 fl.		Also erhält A . . . . . 625 fl.
—225 fl. Voraus		B 625 + 75 = 700 fl.
3 | 1875 fl.	625 fl.	C 625 + 150 = 775 fl.

Beisp. 5. Von 4800 fl. soll B 240 fl. weniger als A, und C 120 fl. weniger als B erhalten; wie viel kommt auf jeden? Antwort: Auf A 1800 fl., B 1560 fl., C 1440 fl.

A 1 Theil
B 1 „ — 240 fl.
C 1 „ — 360; näml. 1 Th. — (240 + 120 fl.)

Die 3 Th. — 600 fl. = 4800 fl.

4800 fl.
+600 fl.
3 | 5400 fl. | 1800 fl.

Also erhält A . . . . . . 1800 fl.
B 1800 — 240 = 1560 fl.
C 1800 — 360 = 1440 fl.

Wollen B und C zwei volle Theile erhalten, mit A also gleichheitlich theilen; so müssen sie zuvor 240 + 360 oder 600 fl. von ihrem eigenen Gelde zulegen. Die zu vertheilende Summe beträgt dann 4800 + 600 oder 5400 fl. Davon bekommt jeder $^1/_3$ = 1800 fl. So viel erhält in der That aber nur A. Unter den 1800 fl., die auf B fallen, sind 240 fl. seines eigenen Geldes; sein Antheil beträgt also nur 1800—240 oder 1560 fl. Und unter den 1800 fl., die auf C fallen, sind 360 fl., die er zuvor zulegte; mithin beträgt sein Antheil nur 1800 fl. — 360 fl. = 1440 fl.

Beisp. 6. Wie vertheilen sich 1800 fl., wenn B 150 fl. mehr als A, C 240 fl. weniger als A, und D 60 fl. mehr als B erhalten soll?

Ausrechnung.

A 1 Theil
B 1 „ + 150 fl.
C 1 „ — 240 fl.
D 1 „ + 210 fl. (= 150 + 60 fl.)

4 Theile + 120 fl. = 1800 fl.

B + 150 fl.
D + 210 fl.
+ 360 fl.
C — 240 fl.
+ 120 fl.

1800 fl.
—120 „
4 | 1680 fl. | 420 fl.

Also erhält A . . . . . . 420 fl.
B 420 + 150 = 570 fl.
C 420 — 240 = 180 fl.
D 420 + 210 = 630 fl.

B und D sollen 150+210 oder 360 fl. mehr erhalten als 2 Theile, C dagegen 240 fl. weniger als 1 Theil. Das gleicht sich gegenseitig theilweise aus. Die 360 fl. mehr werden durch die 240 fl. weniger bis auf 120 fl. aufgehoben. Die 1800 fl. sind also in 4 Theile und 120 fl. zu zerlegen. Oder: B und D dürfen miteinander 360 fl. voraus wegnehmen und dann noch mit A gleichheitlich theilen. C aber muß, um mit den andern gleichheitlich theilen zu dürfen, 240 fl. zulegen. Was geschieht nun einfach? C gibt seine 240 fl. an B und D, und diese nehmen dafür von der Summe nur noch 360—240 d. i. 120 fl. Den Rest theilen sie dann in 4 gleiche Theile.

Beisp. 7. 3 Geschwister sollen 175 Nüsse unter sich theilen. So oft A 2 nimmt, darf B 3 nehmen, und so oft B 4 nimmt, darf C 5 nehmen. Wie viel kommt auf jedes von ihnen?

Antwort: Auf A 40, auf B 60, auf C 75.

A	B	C
2	3	
	4	5
8	12	15

So oft A 2 Nüsse nimmt, so oft darf B 3 nehmen; nimmt A 4 × 2 oder 8 Nüsse, so darf B auf 4 × 3 oder 12 nehmen. So oft B 4 Nüsse nimmt, so oft darf C 5 nehmen; nimmt B 12 oder 3 × 4 Nüsse, so darf C auch 3 × 5 oder 15 nehmen. Wenn also A 8 Nüsse nimmt, so darf B 12 nehmen, und wenn B 12 nimmt, so darf C 15 nehmen. So oft demnach 8 + 12 + 15 oder 35 Nüsse in 175 enthalten sind, so vielmal 8 Nüsse erhält A, so vielmal 12 erhält B, und so vielmal 15 erhält C.

Beisp. 8. Drei Gemeinden haben zusammen 1420 fl. aufzubringen. Die Steuern der Gemeinden A und B verhalten sich wie $^1/_2$ zu $^3/_5$, und die von B und C wie $^2/_3$ zu $^3/_4$. Wie viel trifft auf jede Gemeinde? (Auf A 400 fl., B 480 fl., C 540 fl.)

$$\begin{array}{ccccc} ^1/_2 & : & ^3/_5 & & \\ & & ^2/_3 & : & ^3/_4 \\ \hline ^1/_3 & : & ^2/_5 & : & ^9/_{20} \\ \hline 20 & : & 24 & : & 27 \end{array}$$

Das Verfahren ist das nämliche wie bei ganzen Zahlen. Es soll hier nur noch die Richtigkeit desselben nachgewiesen werden.

$$^1/_2 : {^3/_5} = {^5/_{10}} : {^6/_{10}} = 5 : 6 = 20 : 24.$$
$$^2/_3 : {^3/_4} = {^8/_{12}} : {^9/_{12}} = 8 : 9 = 24 : 27.$$

Sowie sich also $^1/_2$ zu $^3/_5$ verhält, so verhält sich 20 zu 24, und so wie sich $^2/_3$ zu $^3/_4$ verhält, so verhält sich 24 zu 27.

Aufg. z. ZiffERR., 38. Uebung.

c. Zusammengesetzte Theilungsrechnungen.

Beisp. 1. A gibt 200 fl. auf 4 Mon., B 240 fl. auf 3 Mon. und C 400 fl. auf $1^1/_2$ Mon. in den Handel. Gewinn 360 fl. Wie viel gebührt jedem? (A $135^{45}/_{53}$ fl., B $122^{14}/_{53}$ fl., C $101^{47}/_{53}$ fl.)

A 200 fl. auf 4 Mon. = 4 × 200 = 800 fl. auf 1 Mon.
B 240 fl. „ 3 „ = 3 × 240 = 720 fl. „ 1 „
C 400 fl. „ $1^1/_2$ „ = $1^1/_2$ × 400 = 600 fl. „ 1 „

A, B und C legen also 2120 fl. auf 1 Mon. zus.

Dabei denken wir uns die Sache so: A legt 200 fl. ein. Nach 1 Mon. nimmt er diese zurück und ersetzt sie durch 200 andere. Nach Abfluß des 2. Mon. zieht er auch diese wieder ein und zahlt 200 andere dafür. Eben so nach Verfluß des 3ten Monats. Nach dem 4ten Monat nimmt er die zuletzt gezahlten 200 fl. zurück, ohne sich weiter zu betheiligen. Man kann nun sagen: A hat 200 fl. auf 4 Monate, sowie: A hat 4 × 200 oder 800 fl. auf 1 Monat eingelegt. Eben so bei B und C.

Hierdurch wird die zusammengesetzte Aufgabe in eine einfache verwandelt. Diese heißt: Mit 2120 fl. werden 360 fl. gewonnen; wie viel gewinnt A mit 800, B mit 720, C mit 600?

Beisp. 2. A und B machen 6 Mrg. Land urbar. A stellt dazu 4 Arbeiter auf 20 Tage, B 5 Arb. auf 18 Tage. Wie viel hat jeder von den 6 Mrg. zu beanspruchen? (A $2^{14}/_{17}$, B $3^3/_{17}$ Mrg.)

A 4 Arb. 20 Tg. = 20 × 4 = 80 Arb. 1 Tg.
B 5 „ 18 „ = 18 × 5 = 90 „ 1 Tg.
A u. B stellten zusammen 170 Arb. 1 Tg.

Die Aufgabe heißt jetzt: Auf 170 Arb. kommen 6 Mrg.; wie viel a. auf 80 Arb.? b. auf 90 Arb.?

Beisp. 3. A beginnt ein Geschäft mit 3000 fl. Nach 4 Mon. tritt B mit 2000 fl. dazu, und nach weiteren 3 Mon. C mit 4000 fl. Am Schlusse des Jahrs beträgt ihr Gewinn 2400 fl.; wie viel gebührt jedem? (A 1200 fl., B $533\frac{1}{3}$ fl., C $666\frac{2}{3}$ fl.)

Aufl. A hat 3000 fl. 12 Mon., B 2000 fl. 12—4=8 Mon., C 4000 fl. 8—3=5 Mon. in dem Geschäfte. Das Uebrige ist bekannt.

Beisp. 4. 1420 fl. sind so zu vertheilen, daß A $\frac{1}{2}$ + 100 fl., B $\frac{1}{3}$ + 150 fl., C $\frac{1}{4}$ + 130 fl. erhält. Wie viel kommt auf den Einzelnen? (A 580 fl., B 470 fl., C 370 fl.)

A $\frac{1}{2}$ + 100 fl. = 6 Theile + 100 fl.
B $\frac{1}{3}$ + 150 fl. = 4 „ + 150 fl.
C $\frac{1}{4}$ + 130 fl. = 3 „ + 130 fl.
13 Theile + 380 fl. = 1420 fl.

Beisp. 5. A, B und C legen 850 fl. in der Weise zusammen, daß B 2mal so viel gibt als A und 50 fl., C $1\frac{1}{2}$mal so viel als B weniger 150 fl. Wie viel legt jeder ein? (A $145\frac{5}{6}$ fl., B $341\frac{2}{3}$ fl., C $362\frac{1}{2}$ fl.)

A 1 Theil
B 2 „ +50 fl.
C 3 „ —75 fl.; denn $1\frac{1}{2}$×(2 Theile+50 fl.)—150 fl. =
6 Th. —25 fl. 3 Theile+75 fl. —150 fl.=3 Th.—75 fl.

Aufg. z. Zifferr., 39. Uebung.

Mischungs-Rechnung.

Ein Gastwirth hat zweierlei Sorten Wein, den Schoppen zu 4 Kreuzer und zu 9. Ergeben sich einmal von beiden Sorten Reste, so gießt er diese zusammen. Dabei entsteht für ihn die Frage: Wie muß ich den Schoppen schenken, damit ich aus dem Mischling eben so viel löse, als ich aus den unvermischten Sorten gelöst haben würde? Es ist also aus dem Werthe der vermischten Sorten der Werth von einem Theile der Mischung zu bestimmen. Oder es ist der Fall, daß manchem der Gäste der Wein zu 4 kr. zu gering, der zu 9 zu theuer ist. Man wünscht eine Mittelsorte, den Schoppen zu 6 kr. Diesem Wunsche kann der Wirth entsprechen, indem er aus beiden Sorten eine Mittelsorte zu diesem Preise bildet. Nur fragt es sich, wie viel er von jeder Sorte nehmen müsse, damit weder er selbst zu kurz komme, noch der Gast. Es ist also das Verhältniß der Quantitäten zu bestimmen, in welchem die zu mischenden Sorten zu einander stehen sollen. Dieß sind die

beiden Hauptarten von Mischungsrechnungen. Die Gegenstände, bei welchen eine Mischung stattfindet, sind theils trockene, als: Kaffee, Tabak, Getreide, Mehl u. s. w.; theils flüssige, als: Wein, Weingeist oder Spiritus, Branntwein, Milch ꝛc.; theils Metalle, welche, wenn sie gemischt oder legirt werden sollen, flüssig gemacht werden müssen.

A. Aus dem Werthe (oder der Qualität) der vermischten Sorten ist der Werth von einem Theile der Mischung zu finden.

a. Trockene und flüssige Dinge.

Mündlich.

Beisp. 1. A mischt 2 Sorten Wein und nimmt von der einen Sorte so viel, als von der andern. Wie viel ist 1 Ms. des Mischlings werth, wenn von der einen Sorte eine Maas 1 fl. 24 kr. und von der andern 42 kr. kostet?

Aufl. Der Wein ist bereits gemischt. Die Mischung enthält gleichviel von jeder Sorte. In 1 Ms. derselben befindet sich daher $^1/_2$ Ms. der besseren und $^1/_2$ Ms. der geringeren Sorte; in 2 Maas Mischung befindet sich 1 Ms. von jeder Sorte. 2 Ms. der Mischung kosten daher so viel, als 1 Ms. der besseren und 1 Ms. der geringern Sorte zusammen, nämlich 1 fl. 24 kr. + 42 kr. = 2 fl. 6 kr. Kosten aber 2 Ms. Mischling 2 fl. 6 kr., so kostet 1 Ms. die Hälfte davon, nämlich 1 fl. 3 kr.

Beisp. 2. A mischt 3 Sorten Kaffee, das Pfd. zu 32 kr., zu 40 kr. und zu 48 kr.; wie viel ist 1 Pfd. der Mischung werth, wenn er von jeder Sorte gleichviel nimmt?

Ausr. 32 + 40 + 48 = 120; die 3 Pfd. Mischung kosten zusammen 120 kr.; 1 Pfd. kostet also $^1/_3$ von 120 kr. = 40 kr.

Beisp. 3. Jemand mischt unter 5 Ms. Wein à 18 kr. 1 Ms. Wasser; welchen Werth hat 1 Ms. von der Mischung?

Aufl. 5 Ms. Wein und 1 Ms. Wasser zusammengemischt geben 6 Ms. Die 5 Ms. Wein machen 5 × 18 oder 90 kr. Denselben Werth haben auch die 6 Ms. Mischung. Mithin kommt 1 Ms. auf $^1/_6$ von 90 kr. d. i. auf 15 kr.

Beisp. 4. Ein Kaufmann mengt zusammen 2 Pfd. Tabak à 30 kr. und 3 Pfd. à 45 kr.; wie hoch kommt das Pfund?

Ausr. 2 + 3 Pfd. Tabak zusammengemengt, gibt 5 Pfd. Die 2 Pfd. à 30 kr. machen 1 fl., und die 3 Pfd. à 45 kr. machen 2 fl. 15 kr.; die 5 Pfd. haben also einen Werth von 1 fl. + 2 fl. 15 kr. oder 3 fl. 15 kr. Das Pfund kommt sonach auf $^1/_5$ von 3 fl. 15 kr. = 36 + 3 oder 39 kr.

Beisp. 5. A mischt 2 Sorten Spiritus untereinander, nämlich 20 Quart zu 75 Grad und 30 Quart zu 60 Grad; welchen Gehalt hat die Mischung?

Aufl. Der Spiritus hat 75 Grad, wenn unter 100 Raumtheilen 75 Theile reiner Weingeist (Alkohol) und 25 Theile Wasser sind. 20 + 30 Quart = 50 Quart. 1 Qrt. zu 75 Grad enthält 75 Theile Weingeist, 20 Qrt. enthalten also 20 × 75 oder 1500 Theile. 30 Qrt. zu 60 Grad enthalten 30 × 60 oder 1800 Theile. Die

50 Qrt. enthalten also 1500 + 1800 oder 3300 Theile Weingeist. Auf 1 Quart kommt $^1/_{50}$ davon; $^1/_{50}$ von 3300 = 66. Die Mischung hat also einen Gehalt von 66 Grad.

Beisp. 6. Man mengt $^1/_2$ Ctr. Mehl, den Ctr. zu 12 fl. und $^3/_4$ Ctr. zu 10 fl. untereinander; wie berechnet sich 1 Ctr. der Mischung?

Ausr. $^1/_2$+$^3/_4$ Ctr. = $1^1/_4$ Ctr. Nun suche ich, was diese werth sind. Der Ctr. zu 12 fl. macht für den halben Ctr. 6 fl.; und der Ctr. zu 10 fl. beträgt für $^3/_4$ Ctr. 7 fl. 30 kr. Die $1^1/_4$ Ctr. kosten also 6 fl. + 7 fl. 30 kr. = 13 fl. 30 kr. Mithin kommt $^1/_4$ Ctr. auf den 5ten Theil von 13 fl. 30 kr. = 2 fl. 42 kr., und der Ctr. auf 4 × 2 fl. 42 kr. = 10 fl. 48 kr.

Aufg. z. Kopfr., S. 44, Nr. 1—8.

Schriftlich.

Beisp. 1. Wie hoch kommt 1 Pfd., wenn 7 Pfd. Tabak à 36 kr. unter 9 ℔ à 48 kr. gemengt werden?

Ausr.
7 Pfd. à 36 kr. = 252 kr.
9 Pfd. à 48 kr. = 432 kr.
16 Pfd. Mischung = 684 kr.
1 Pfd. Mischung = $42^3/_4$ kr.

16 | 684 | 42
64
44
32
12

Beisp. 2. Wie berechnen sich 24 Pfd., wenn man untereinander mischt $2^1/_2$ Ctr. à 72 fl. und $3^1/_4$ Ctr. à 88 fl.?

Ausr.
$2^1/_2$ Ctr. à 72 fl. = $2^1/_2$ × 72 fl. = 180 fl.
$3^1/_4$ Ctr. à 88 fl. = $3^1/_4$ × 88 fl. = 286 fl.
$5^3/_4$ Ctr. Mischung = 466 fl.

575 Pfd. 466 fl. 575 Pfd. : 24 Pfd. = 466 fl. : x
24 Pfd. ? x = 19 fl. $27^3/_{115}$ kr.

Beisp. 3. A kauft $4^1/_2$ Eimer Wein à 18 fl. und $7^3/_8$ Eim. à 20 fl. und mischt dies zusammen; wie muß er die Maas schenken, um 40% zu gewinnen? ($25^{97}/_{380}$ kr., nahe $25^1/_4$ kr.)

Ausr.
$4^1/_2$ Eimer à 18 fl. = $4^1/_2$ × 18 fl. = 81 fl.
$7^3/_8$ Eimer à 20 fl. = $7^3/_8$ × 20 fl. = $147^1/_2$ fl.
$11^7/_8$ Eimer = $228^1/_2$ fl.

? kr.	1 Ms.
64	1 Eim.
$11^7/_8$	$228^1/_2$ fl.
1	60 kr.
100	140 kr.
380	9597 = $25^{97}/_{380}$ kr.

Aufg. z. Zifferr., 40. Uebung.

b. Gold und Silber.

Bei den Gold- und Silberarbeitern ist die Gewichtseinheit für die edlen Metalle noch die alte kölnische Mark. Sie wird verschieden eingetheilt, je nachdem sie als Silber- oder als Goldgewicht dient.

1 Mark Silber = 16 Loth = 288 Gran.
1 „ = 18 Gran.
1 Mark Gold = 24 Karat = 288 Gran.
1 „ = 12 Gran.

16 Loth = 1 Mark.	24 Kar. = 1 Mark.
1 „ = $^1/_{16}$ „	1 „ = $^1/_{24}$ „
2 „ = $^1/_8$ „	2 „ = $^1/_{12}$ „
3 „ = $^3/_{16}$ „	3 „ = $^1/_8$ „
u. s. w.	u. s. w.

Eine Mark reines Silber oder Gold, ohne Zusatz, heißt eine feine Mark; eine Mark gemischtes Silber oder Gold heißt eine rauhe Mark. Enthält eine rauhe Mark Silber 12 Loth reines Silber und 4 Loth Zusatz, so sagt man, das Silber sei 12löthig. Und enthält eine rauhe Mark Gold 16 Karat reines Gold und 8 Karat Zusatz, so sagt man, das Gold sei 16karatig. Was versteht man also unter 14 (10, 8, 13) löthigem Silber? Was versteht man unter 14 (16, 10, 18) karatigem Golde?

Aufgaben mit Ausrechnung.

1) Wie viel feines Silber ist enthalten a) in 2 Mark 12löthigem Silber? (1 Mark enthält 12 Loth f. S., 2 Mark enthalten also 2 × 12 oder 24 Loth desselben.) b) in 3 Mark 14löthigem S.? c. in 8 Mark 10löth. S.? d) in $5^1/_2$ Mark 8löth. S.?

2) Wie viel feines Gold ist enthalten a) in 2 Mark 14karat. Golde? (1 Mark enthält 14 Karat f. Gold, 2 Mark enthalten also 2 × 14 oder 28 Karat f. G.) b) in 4 Mark 12kar. Gold? c. in 3 Mark 16kar. Golde? d) in $5^2/_3$ Mark 18kar. Gold?

3) Wie viellöthig wird die Mischung, wenn 2 Mark 10löthiges S. und 3 Mark 13löthiges S. legirt werden?

Ausr. 2 Mark 10 löth. S. = 2 × 10 = 20 Loth f. S.
3 „ 13 „ „ = 3 × 13 = 39 „ „ „
5 Mark Mischung enthalten 59 Loth f. S.
1 Mark Mischung enth. $^1/_5$ von 59 Lth. = $11^4/_5$ Lth. f. S.
Die Mischung ist also $11^4/_5$löthig.

4) Ein Goldarbeiter schmelzt 3 Mark 12karatiges und $^3/_4$ Mark feines Gold zusammen; von welchem Gehalt wird die Mischung?

Ausr. 3 Mark 12kar. G. = 3 × 12 = 36 Karat f. G.
$^3/_4$ „ 24 „ „ = $^3/_4$ × 24 = 18 „ „ „
$3^3/_4$ Mark enthalten 54 Karat f. G.
$^1/_4$ Mark enthält $^1/_{15}$ von 54 Karat = $3^3/_5$ Kar.
1 „ „ 4 × $3^3/_5$ „ = $14^2/_5$ Kar.
Die Mischung ist also $14^2/_5$ karatig.

5) Man schmelzt 8 Mark feines Silber und 3 Mark Kupfer zusammen; wie viellöthig wird die Mischung? ($11^7/_{11}$ löthig.)

Ausr.	8 Mark f. S.	$= 8 \times 16 =$	128 Loth f. S.
	3 „ Kupfer	$= 3 \times 0 =$	0 „ „ „
Die 11 Mark Mischung enthalten			129 Loth f. S.
1 Mark Mischung enthält			$11^7/_{11}$ Loth f. S.

6) 4 Mark 22karatiges Gold, $^1/_4$ Mark Silber und $1^3/_4$ Mark Kupfer geben wie viel karatiges Gold? ($14^2/_3$ kar.)

Ausr.	4 Mark 22kar. G.	$= 4 \times 22 =$	88 Kar. f. G.
	$^1/_4$ „ Silber	$=$	— „ „ „
	$1^3/_4$ „ Kupfer	$=$	— „ „ „
Die 6 Mark Mischung enthalten			88 Kar. f. G.
1 Mark Mischung enthält			$14^2/_3$ Kar. f. G.

Aufg. z. Kopfr. Nr. 9—15.

Aufg. z. Ziffert. 41. Uebung.

B. Aus dem Werthe der Sorten und der Mischung ist das Mischungsverhältniß zu bestimmen.

Hier sind entweder nur zwei, oder mehr als zwei Sorten zur Mischung gegeben. Im ersteren Falle läßt die Aufgabe nur ein richtiges Resultat zu; im anderen Falle sind mehrere möglich. Es ist daher diese Abtheilung nach der Anzahl der Sorten in zwei Unterabtheilungen zu zerlegen.

I. Mit zwei Sorten.

1. Die Menge der Mischung ist nicht bekannt.

Mündlich.

1) A hat 2 Sorten Kaffee, das Pfd. zu 30 und zu 40 kr. Er will aus beiden eine Sorte mischen, von welcher das Pfd. 35 kr. kosten soll. In welchem Verhältnisse wird er von beiden Sorten nehmen müssen?

Nimmt A 1 Pfd. der besseren Sorte (à 40 kr.), so ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 5 kr. Nimmt er 1 Pfd. der geringeren Sorte (à 30 kr.), so ergibt sich ein Mangel von 5 kr. Ueberschuß und Mangel heben sich gegenseitig auf. Unvermischt kosten die 2 Pfd. 40 + 30 kr. und vermischt 2 × 35 kr., in beiden Fällen 1 fl. 10 kr. A wird daher, um 2 Pfd. Mischung zu erhalten, von jeder Sorte 1 Pfd., um 4 Pfd. Mischung zu erhalten, von jeder Sorte 2 Pfd., mithin immer von jeder Sorte gleichviel nehmen.

2) In welchem Verhältnisse wird A von den beiden Sorten (à 30 kr. und 40 kr.) nehmen müssen, wenn 1 Pfd. der Mischung 32 kr. werth sein soll?

An dem Pfunde der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 8 kr., an dem Pfunde der geringeren Sorte ein Mangel von 2 kr. Um den Ueberschuß von

8 kr. auszugleichen, sind 4 × 2 kr. Mangel, also 4 × 1 Pfd. der geringeren Sorte erforderlich. A muß daher zu 1 Pfd. der besseren Sorte 4 Pfd. von der geringeren nehmen.

3) Wie aber, wenn die Mischung einen Werth von 36 kr. haben soll?

a. Von der besseren Sorte ausgehend. An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 kr. Wie viel muß ich nun von der geringeren Sorte nehmen, um diesen Ueberschuß auszugleichen? An 1 Pfunde der geringeren Sorte ergibt sich ein Mangel von 6 kr. Man wird daher von der geringeren Sorte so viel mal 1 Pfund zu nehmen haben, als 6 kr. in 4 kr. enthalten sind, nämlich $^2/_3$ Pfund. Zu 1 Pfund der besseren Sorte nimmt man also $^2/_3$ Pfund von der geringeren. Die Mischung besteht mithin aus $^3/_3 + {}^2/_3$ Pfund oder aus 5 gleichen Theilen, wovon 3 Theile auf die bessere Sorte und 2 Theile auf die geringere kommen.

b. Von der geringeren Sorte ausgehend. An dem Pfunde der geringeren Sorte ergibt sich im Preise ein Mangel von 6 kr. Wie viel muß ich nun von der besseren Sorte nehmen, um diesen Mangel zu decken? An dem Pfunde der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 4 kr. Um den Mangel von 6 kr. auszugleichen, ist daher so viel mal 1 Pfund von der besseren Sorte erforderlich, als 4 kr. in 6 kr. enthalten sind, nämlich $1^1/_2$. Die Mischung besteht sonach aus 1 Pfd. der geringeren Sorte und aus $1^1/_2$ Pfd. der besseren, mithin aus $^2/_2 + {}^3/_2$ Pfd. oder aus 5 gleichen Theilen, wovon wieder 2 Theile auf die geringere Sorte kommen und 3 Theile auf die bessere.

c. Wir suchen, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, damit sich 1 Kreuzer Ueberschuß und 1 Kreuzer Mangel ergibt. An 1 Pfd. der besseren Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 kr.; zu 1 kr. Ueberschuß gehört also $^1/_4$ Pfd. dieser Sorte. An 1 Pfd. der geringern Sorte ergibt sich ein Mangel von 6 kr.; zu 1 kr. Mangel gehört daher $^1/_6$ Pfd. dieser Sorte. Die Mischung besteht hiernach aus $^1/_4$ Pfd. der besseren Sorte und aus $^1/_6$ Pfd. der geringeren, im Ganzen also aus $^1/_4 + {}^1/_6$ oder $^3/_{12} + {}^2/_{12}$ Pfd., d. i. aus 3 Theilen der besseren Sorte und aus 2 Theilen der geringeren.

d. Wir suchen, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, damit sich ein Vielfaches von Ueberschuß und Mangel ergibt. Der Ueberschuß = 4 kr., der Mangel = 6 kr.; 4 × 6 = 24. Ein Pfund der besseren Sorte gibt 4 kr. Ueberschuß; um einen Ueberschuß von 24 kr. zu enthalten, sind so viele Pfund dieser Sorte erforderlich, als 4 kr. in 24 kr. enthalten sind, nämlich 6. — Ein Pfund der geringeren Sorte gibt einen Mangel von 3 kr.; soll sich ein Mangel von 24 kr. ergeben, so muß man so viele Pfund von dieser Sorte nehmen, als 6 kr. in 24 kr. enthalten sind, nämlich 4. Man nimmt also von der bessern Sorte 6 Pfd. und von der geringern 4, oder was dasselbe ist, von jener 3 und von dieser 2.

4) Jemand hat 2erlei Sorten Wein, die Ms. zu 12 kr. und zu 24 kr.; in welchem Verhältniß muß er beide Sorten mischen, um einen Wein zu 16 kr. zu erhalten?

Aufl. An der bessern S. ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 8 kr., an der geringern S. ein Mangel von 4 kr.; um den Ueberschuß von 8 kr. aufzuheben, sind 2 × 4 kr., also 2 × 1 Ms. von der geringern S. erforderlich. Mithin muß man zu 1 Ms. von der bessern S. 2 Ms. von der geringern nehmen.

5) Ein Melber hat das Pfd. Mehl zu 6 kr. und zu 9 kr.; wie muß er mischen, um das Pfund zu 8 kr. zu erhalten?

Aufl. Die Mischung soll 8 kr. kosten. An 1 Pfd. zu 6 kr. ergibt sich im Preise ein Mangel von 2 kr., an dem Pfd. zu 9 kr. ein Ueberschuß von 1 kr. Um den Mangel von 2 kr. zu decken, sind 2 × 1 kr., also 2 × 1 Pfd. von der bessern Sorte erforderlich. Der Melber muß also zu 1 Pfd. der geringern Sorte 2 Pfd. von der bessern nehmen.

6) Aus 11 und 15löthigem Silber soll 12löthiges legirt werden; wie heißt das Mischungsverhältniß?

Aufl. Die Mischung soll 12löthig werden, die Mark soll 12 Loth f. S. enthalten. Die Mark 15löthiges Silber enthält 15 Loth f. S., also 3 Loth zu viel. Die Mark 10löthiges Silber enthält 10 Loth f. S., also 2 Loth zu wenig. Ich nehme $^1/_3$ Mark von jener Sorte und $^1/_2$ Mark von dieser, so heben sich Ueberschuß und Mangel auf. $^1/_3 + ^1/_2 = ^2/_3 + ^3/_6$. Die Mischung verlangt also 2 Theile von dem 15löth. S. und 3 Theile von dem 10löth. Silber.

7) Aus 11 und 18karatigem Golde ist 14karatiges zu legiren. Wie heißt das Mischungsverhältniß?

Aufl. Die Mischung soll 14karatig werden. Die Mark 18karatiges G. enthält 4 Karat f. G. zu viel, die Mark 11karatiges G. 3 Karat f. G. zu wenig. Ich nehme daher $^1/_4$ Mark von jener und $^1/_3$ Mark von dieser Sorte. $^1/_4 + ^1/_3 = ^3/_{12} + ^4/_{12}$. Die Mischung verlangt also 3 Theile von dem 18kar. und 4 Theile von dem 11kar. Golde.

Aufg. z. Kopfr., S. 45, Nr. 13.

Schriftlich.

Beisp. Aus 2 Sorten Tabak, zu 30 und 40 kr., soll eine Mittelsorte zu 36 kr. gemischt werden. Wie ist das Mischungsverhältniß?

Erste Weise.

Bessere Sorte 40	36	+ 4	$^1/_4$	$^3/_{12}$	3
Geringere Sorte 30	36	— 6	$^1/_6$	$^2/_{12}$	2

An dem Pfunde der bessern Sorte ergibt sich im Preise ein Ueberschuß von 4 kr., an dem Pfunde der geringern Sorte ein Mangel von 6 kr. Ich nehme daher $^1/_4$ Pfd. von jener und $^1/_6$ Pfd. von dieser. So macht's 1 kr. Ueberschuß und 1 kr. Mangel, welche sich gegenseitig decken. $^1/_4 + ^1/_6 = ^3/_{12} + ^2/_{12}$. Die Mischung verlangt also 3 Theile von der bessern Sorte und 2 Theile von der geringeren.

Zweite Weise.

			2	
Bessere Sorte	40	+ 4	6	3 Theile.
Mischung	(36)			
Geringere Sorte	30	— 6	4	2 „

An der besseren Sorte ergibt sich ein Ueberschuß von 4 kr., an der geringeren Sorte ein Mangel von 6 kr. Ueberschuß und Mangel decken sich, wenn man den Ueberschuß von 4 kr. 6mal und den Mangel von 6 kr. 4mal setzt, mithin 6 × 1 Pfd. oder 6 Theile von der besseren und 4 × 1 Pfd. oder 4 Theile von der geringeren

Sorte nimmt. — Daß sich das Mischungsverhältniß nicht ändert, wenn man 6 und 4 durch 2 hebt, ist leicht einzusehen.

Aufg. z. Zifferr., 42. Uebung.

2. Die Menge der Mischung ist bestimmt.

Mündlich und schriftlich.

Beispiel: A. will aus 2 Sorten Wein, die Maas zu 32 kr. und zu 18 kr, eine Mittelsorte zu 24 kr. mischen. Wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen, um 36 Eimer Mischung zu erhalten?

Das Erste ist, daß wir das Mischungsverhältniß suchen.

32	+ 8	6	3 Eimer od. Theile.
(24)			
18	— 6	8	4 „ „ „
			7 Eimer od. Theile.

Eine Maas der besseren Sorte gibt 8 kr. Ueberschuß, 1 Maas der geringeren Sorte 6 kr. Mangel. Ich setze den Ueberschuß 6mal, den Mangel 8mal (6 × 1 Ms. der besseren Sorte geben 6 × 8 oder 48 kr. Ueberschuß, und 8 × 1 Ms. der geringeren Sorte geben 8 × 6 oder 48 kr. Mangel.) So gleicht sichs aus. Von der besseren Sorte werden also 6 Theile genommen, wie von der geringeren 8, oder von jener 3, wie von dieser 4. Die ganze Mischung besteht also aus 3 + 4 oder 7 gleichen Theilen.

Nun gehen wir an die Beantwortung der Frage: Wie viel ist von jeder Sorte zur Mischung zu verwenden, um 36 Eimer zu erhalten? Die Aufgabe stellt sich jetzt so: 7 Theile Mischling = 36 Eim.; wie viel kommt a. auf die 3 Theile der bessern Sorte? b. auf die 4 Theile der geringern?

a. 7 Theile 36 Eim.
3 „ ?

a. 7 : 3 = 36 Eim. : x
x = $15^3/_7$ Eim.

b. 7 Theile 36 Eim.
4 „ ?

b. 7 : 4 = 36 Eim. : x
x = $20^4/_7$ Eim.

Aufg. z. Kopfr., Nr. 14, z. Zifferr. 43. Uebung.

3. Die Menge der einen Sorte ist bestimmt.

Beisp. 1. Es hat Jemand 12 Ms. Branntwein à 24 kr.; wie viel Wasser muß er hinzusetzen, um eine Mischung zu erhalten, wovon die Maas 15 kr. werth ist?

Berechnung.

a. Mündlich. Die 12 Ms. Branntwein à 24 kr. haben einen Werth von 12 × 24 kr. oder 4 fl. 48 kr. Denselben Werth muß auch die Mischung haben. Es fragt sich daher: Wie viel Maas à 15 kr. thun 4 fl. 48 kr.? Antwort: So vielmal 1 Ms., als 15 kr. in 4 fl. 48 kr. enthalten sind. 15 kr. = 5 Gr.; 4 fl. 48 kr. = 96 Gr.

5 Gr. sind in 96 Gr. $19\frac{1}{5}$ mal enthalten. Die ganze Mischung muß daher $19\frac{1}{5}$ Ms. betragen. Man muß also zu den 12 Ms. Branntwein $19\frac{1}{5} - 12 = 7\frac{1}{5}$ Ms. Wasser mischen.

b. Schriftlich.

Branntw.	24	+ 9	15	5
	(15)			
Wasser	0	− 15	9	3

9 kr. Ueberschuß 15 mal genommen, und 15 kr. Mangel 9 mal genommen, heben sich gegenseitig auf. Also sind zu 15 Ms. Branntwein 9 Ms. Wasser, oder, was dasselbe ist, zu 5 Theilen Branntwein 3 Theile Wasser zu nehmen.

Zweisatz: 5 Ms. Branntw. 3 Ms. W.
12 „ „ ?

Proportion: 5 : 3 = 12 Ms. : x
x = $7\frac{1}{5}$ Ms. Wasser.

Beisp. 2. A hat Weingeist von 80 Grad und von 50 Grad; wie viel von der geringern Sorte muß er unter 96 Quart der bessern mischen, um eine Sorte von 72 Grad zu erhalten?

Ausr.	80	+ 8	22	11
	(72)			
	50	− 22	8	4

Zweisatz. Zu 11 Qrt. à 80° 4 Qt. à 50°
96 „ ?

Proportion. 11 : 4 = 96 Qrt. : x
x = $34\frac{10}{11}$ Qrt.

Aufg. z. Zifferr., 44. Uebung.

II. Mit mehr als zwei Sorten.

Beisp. 1. Aus 3 Sorten Wein, A zu 25 fl., B zu 18 fl. und C zu 12 fl., will man eine Sorte zu 16 fl. mischen; wie kann dieß geschehen?

Berechnung.

A 25	+ 9 } 11		4 Theile.
B 18	+ 2 }		4
(16)			
C 12	− 4		11
			19

Ein Eimer von A gibt 9 fl. Ueberschuß, 1 E. von B gibt 2 fl. Ueberschuß, 1 E. von C gibt 4 fl. Mangel. Somit ergeben sich 9 + 2 od. 11 fl. Ueberschuß und 4 fl. Mangel. Um Ueberschuß und Mangel auszugleichen, so setzen wir den Ueberschuß 4mal und den Mangel 11mal. Wir nehmen also 4 Eimer von A, 4 Eimer von B und 11 Eimer von C, ($4 \times 9 + 4 \times 2 = 11 \times 4$.)

Anm. Das ist die gewöhnliche Weise. Man könnte aber auch erst aus A und B eine Mischung zu 19 fl. machen und dann aus der neuen Sorte mit C die verlangte Mischung bilden. Eben so könnte man zuerst aus A und B eine Mischung zu 20, oder zu 21, zu 22, zu 23, zu 24 fl. machen und die neue Sorte mit C zusammensetzen. Ferner könnte man zuerst aus A und C oder aus B und C Mittelsorten von 13, 14 oder 15 fl. bilden und diese dann mit der dritten Sorte vermischen. Nimmt man hierzu noch, daß sich bei der einen oder der andern Sorte für 1 Eimer eine andere Eimerzahl setzen und dem entsprechend Ueberschuß gegen Mangel ausgleichen läßt; so ergibt sich, daß die Lösung einer einzigen Aufgabe dieser Art ins Unendliche geht, ohne daß je zwei Resultate nothwendig zusammenfallen.

Beisp. 2. Man will aus 4 Sorten Tabak, A zu 1 fl. 12 kr., B zu 1 fl., C zu 45 kr. und D zu 30 kr., eine Mischung zu 48 kr. machen; wie kann es geschehen?

Berechnung.

				3
A 72	+ 24	36	21	7
B 60	+ 12		21	7
(48)				
C 45	— 3	21	36	12
D 30	— 18		36	12
				38

1 Pfd. von A gibt 24 kr. Ueberschuß, 1. Pfd. von B 12 kr. Ueberschuß, 1 Pfd. von C 3 kr. Mangel, 1 Pfd. von D 18 kr. Mangel. Somit ergibt sich ein Ueberschuß von 24 + 12 = 36, und ein Mangel von 3 + 18 = 21. Wir nehmen den Ueberschuß 21 mal, den Mangel 36 mal. So gleicht sich's aus. Wird durch 3 gehoben, so haben wir dann 7 Pfd. von A, 7 Pfd. von B, 12 Pfd. von C und 12 Pfd. von D (7 × 24 + 7 × 12 = 12 × 3 + 12 × 18.)

Beisp. 3. Aus 5 Sorten einer Waare zu 24, 21, 18, 16 und 14 fl. soll eine Mittelsorte zu 20 fl. gemischt werden; wie kann es geschehen?

Mehrfache Lösung.

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
A 24	+ 4	2+4	4+6	2+6	6	2	4	15	12
B 21	+ 1	6	2	4	2+4	4+6	2+6		12
(20)									
C 18	— 2	4	1	4	1	4	1		5
D 16	— 4	4	4	1	1	1	4	12	5
E 14	— 6	1	4	4	4	1	1		5
		21	21	21	18	18	18		

Es wird gemischt

I. A mit C + D, und B mit E.
II. A mit D + E, und B mit C.
III. A mit C + E, und B mit D; dann
IV. B mit C + D, und A mit E.
V. B mit D + E, und A mit C.
VI. B mit C + E, und A mit D; zuletzt
VII. A + B mit C + D + E, wie in den vorigen Beispielen.

Siebenter Cursus.

I. Decimalbrüche.

1. Begriff.

1 1 1 1

Die Ziffer 1 in der ersten Stelle rechts bedeutet 1 Einer. Die 1 in der zweiten Stelle gilt das 10fache davon, nämlich 1 Zehner. Die 1 in der dritten Stelle gilt wieder das 10fache von der 1 in der zweiten Stelle, nämlich 1 Hunderter u. s. f. — So oft also die Ziffer 1 um eine Stelle weiter gegen die Linke kommt, so oft **verzehnfacht** sich ihr Werth.

Anders verhält sichs, wenn wir rückwärts gehen. Die 1 in der vierten Stelle bedeutet 1 Tausender. Die 1 in der dritten Stelle gilt den 10. Theil davon, d. i. 1 Hunderter. Die 1 in der zweiten Stelle gilt wieder nur $^1/_{10}$ von der 1 in der dritten Stelle, d. i. 1 Zehner. Und die 1 in der ersten Stelle gilt den 10. Theil von 1 Zehner, nämlich 1 Einer. — Jede 1 um eine Stelle weiter rechts gilt also immer nur $^1/_{10}$mal so viel als ihre Nachbarin zur Linken.

Mithin wird die 1, welche wir nun (in etwas kleinerer Form) um eine Stelle nach dem Einer setzen,

1 1 1 1 1

wieder nur den 10. Theil von einem Einer, d. i. 1 Zehntel gelten. Eben so wird die 1, die wir um eine Stelle nach dem Zehntel setzen,

1 1 1 1 1 1

wieder nur den 10. Theil von 1 Zehntel, nämlich 1 Hundertel bedeuten. Und die 1, welche um eine Stelle nach dem Hnndertel zu stehen kommt, wie hier:

1 1 1 1 1 1 1

wird wieder $^1/_{10}$ von $^1/_{100}$, d. i. $^1/_{1000}$ bezeichnen.

So fort bis zu Milliontel.

Damit die Theile nicht leicht für Ganze angesehen werden, so setzen wir zwischen beide als Grenze einen Strich, wie hier:

1 1 1 1 , 1 1 1 1

Das Komma trennt daher die Ganzen und die Theile von einander. Links stehen die Ganzen, rechts die Brüche.

In gleicher Weise werde auch mit den Ziffern 2, 3, 4 ꝛc. verfahren. Man lasse dieß jedoch von einzelnen Schülern möglichst allein durchführen.

a) Sowie man (also) die Zahlenreihe von den Einern an aufwärts (gegen die Linke) bis ins Unendliche fortführen kann; so läßt sich dieselbe von den Einern an auch abwärts (gegen die Rechte) bis ins Unendliche fortbilden.

b. Gleichwie man den Werth der Ziffern auf der linken Seite des Komma, wo sie Ganze bedeuten, aus ihrer Stelle erkennt; so läßt sich auch der Werth der Ziffern auf der rechten Seite desselben, wo sie Theile bezeichnen, aus ihrer Stelle entnehmen. Eine besondere Bezeichnung ihrer Geltung ist nicht nöthig. Die Ziffern in der ersten Stelle **vor** dem Komma gelten Einer, in der 2. Stelle Zehner u. s. f.; in der ersten Stelle **nach** dem Komma gelten sie 10tel, in der zweiten Stelle 100tel, in der dritten Stelle 1000tel ꝛc.

c) Zehntel entstehen, wenn man ein Ganzes in 10 gleiche Theile theilt; 100tel, wenn man $^1/_{10}$ wieder in 10 gleiche Theile zerlegt; 1000tel, wenn man aus $^1/_{100}$ wieder 10 gleiche Theile macht ꝛc. Deßhalb nennt man Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 u. s. f. zehntheilige oder Decimalbrüche, kurz: Decimale.

Fragen: Was gelten die Ziffern in der ersten Decimalstelle? in der 3ten? in der 2ten? ꝛc. — Wo stehen die 100tel? die 10tel? die 1000tel? ꝛc.

2. Uebung im Lesen und Schreiben der Decimalbrüche.

a. Nach den einzelnen Stellen.

Lesen: 1,4 = 1 Ganzes und 4 Zehntel
0,8 = 0 Ganze und 8 Zehntel
29,45 = 29 Ganze, $^4/_{10}$ und $^5/_{100}$
0,07 = 0 Ganze, 0 Zehntel, $^7/_{100}$
6,543 = 6 Ganze, $^5/_{10}$, $^4/_{100}$, $^3/_{1000}$
u. s. w.

Schreiben:

$^3/_{10}$ . . .	= 0,3	$^5/_{1000}$	= 0,005
$^7/_{100}$ . . .	= 0,07	$^3/_{10}$ und $^8/_{1000}$ . .	= 0,308
$^8/_{10}$ und $^4/_{100}$	= 0,84	$^2/_{10}$, $^4/_{100}$ und $^6/_{1000}$	= 0,246

u. s. w.

b. Im Zusammenhange.

(Lesen.)

0,43 = 4 Zehntel und 3 Hundertel. Die 4 Zehntel lassen sich auch in Hundertel verwandeln. $^4/_{10} = {}^{40}/_{100}$; $^{40}/_{100} + {}^3/_{100} = {}^{43}/_{100}$. Mithin sind 0,43 = 43 Hundertel.

$0{,}783 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000}$
$= \frac{700}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{3}{1000} = 783$ Tausendtel.

$0{,}25 = \frac{25}{100}$. $18{,}5761 = 18\frac{5761}{10000}$.
$0{,}234 = \frac{234}{1000}$. $1{,}0094 = 1\frac{94}{10000}$.
$8{,}076 = 8\frac{76}{1000}$. $3{,}05897 = 3\frac{5897}{100000}$.

Man kann demnach, um einen Decimalbruch auszusprechen, die Stellen desselben einzeln, wie auch zusammen lesen. In diesem Falle fügt man einen Nenner mit der Ziffer 1 und so viel Nullen bei, als der Zähler im Ganzen Stellen hat.

(Schreiben.)

$4\frac{4}{10} = 4{,}4$. $\frac{9}{10000} = 0{,}0009$.
$37\frac{45}{100} = 37{,}45$. $\frac{83}{10000} = 0{,}0083$.
$\frac{38}{100} = 0{,}38$. $\frac{245}{10000} = 0{,}0245$.
$\frac{175}{1000} = 0{,}175$. $\frac{4781}{10000} = 0{,}4781$.
$14\frac{36}{1000} = 14{,}036$. $15\frac{23457}{100000} = 15{,}23457$.

Bis zur Fertigkeit!

3. Versetzung der Decimalkomma.

a. $4{,}3752 = 4$ Einer, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{2}{10000}$.

Rücken wir das Komma um eine Stelle weiter rechts, so steht:

43,752. Die 4 gilt jetzt 10×4 Einer oder 4 Z., die 3 gilt $10 \times \frac{3}{10}$ oder 3 E., die 7 gilt $10 \times \frac{7}{100}$ oder $\frac{7}{10}$ rc. Die Zahl ist also zehnmal so groß als zuvor.

437,52. Die 4 gilt jetzt 10×4 Z. oder 4 H. u. s. f. Die Zahl ist also wieder 10mal so groß als zuvor.

4375,2. Eben so.

Mit jeder Stelle, um welche das Decimalkomma von der linken Hand gegen die rechte rückt, wird die Zahl 10mal so groß.

b. $3981{,}6 = 3$ Tausender, 9 H., 8 Z., 1 E und $\frac{6}{10}$.

Rücken wir das Komma um 1 Stelle weiter links, so steht:

398,16. Die 3 gilt jetzt nicht mehr 3 T., sondern 3 H., also nur $\frac{1}{10}$mal so viel; die 9 gilt nicht mehr 9 H., sondern 9 Z., also nur $\frac{1}{10}$mal so viel u. s. w. Die Zahl ist jetzt nur $\frac{1}{10}$ von der vorigen.

39,816. Anstatt 3 H. stehn jetzt 3 Z.; anstatt 9 Z. nur 9 E., anstatt 8 E. nur $\frac{8}{10}$ u. s. w.

3,9816. Für 3 Z stehn 3 E., für 9 E. stehn $\frac{9}{10}$ rc.

Mit jeder Stelle, um welche das Decimalkomma von der rechten Hand gegen die linke rückt, beträgt die Zahl nur $\frac{1}{10}$mal so viel.

Soll also ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 rc. multiplicirt werden, so setzt man das Komma ein, zwei oder drei Stellen weiter rechts. Ist ein Decimalbruch aber durch 10, 100, 1000 zu dividiren, so setzt man das Komma um ein, zwei oder drei Stellen weiter links.

4. Gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, heißt: ihn in 10teln, in 100teln, in 1000teln u. s. w. ausdrücken. $^1/_2 = 0{,}5$; $^1/_5 = 0{,}2$; $^4/_5 = 0{,}8$; $^1/_4 = 0{,}25$; $^3/_4 = 0{,}75$; $^1/_{20} = 0{,}05$; $^1/_{25} = 0{,}04$.

Um den Bruch $^7/_8$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, so betrachtet man ihn als 7, getheilt durch 8, und verfährt, wie folgt:

```
8 | 7,0 | 0,875
  |  64 |
  ----
     60
     56
     ---
      40
      40
      ---
```

Der 8te Theil von 7 *Ganzen* = 0 Ganze. Decimalkomma! 7 Ganze = 70 *Zehntel*; der 8te Theil von 70 Zehnteln = 8 Zehntel, Rest 6 Zehntel; 6 Z. = 60 *Hundertel*; der 8te Theil von 60 H. = 7 H., Rest 4 H.; 4 Hundertel = 40 *Tausendtel*; der 8te Theil von 40 T. = 5 Tausendtel. $^7/_8$ oder der 8te Theil von 7 = 0,875.

$^5/_9 = ?$

```
9 | 5,0 | 0,555...
  |  45 |
  ----
     50
     45
     ---
      50
      45
      ---
       5
```

Der 9te Th. von 5 G. = 0 G.; Komma! 5 G = 50 Zehntel; der 9te Th. von 50 Zehntel = 5 Z, Rest 5 Z.; 5 Zehntel = 50 Hundertel; der 9te Th. von 50 H. = 5 H. u. s. w. Bei fortgesetzter Theilung würde sich immer 5 als Rest, im Quotienten also auch immer die Ziffer 5 ergeben. Der Bruch $^5/_9$ läßt sich daher *nicht vollständig* als Decimalbruch ausdrücken. Darum setzt man $^5/_9 = 0{,}555\ldots$ Man zeigt die unvollendete Division durch Punkte an.

0,875 ist ein *endlicher* Decimalbruch, 0,555 . . . ein *unendlicher*.

Aufg. z. Zifferr., 49. Uebung.

5. Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

a. Endliche Decimalbrüche.

Man gibt dem Decimalbruch den ihm zukommenden Nenner und bringt ihn dann durch Kürzung auf den kleinsten Ausdruck. Z. B.:

$0{,}25 = {}^{25}/_{100} = {}^1/_4$; $0{,}875 = {}^{875}/_{1000} = {}^7/_8$.

Aufg. z. Zifferr., 50. Uebung.

b. Unendliche Decimalbrüche.*)

Um das Verfahren, unendliche Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln, kennen zu lernen, sehen wir zu, wie jene aus diesen entstehen. Wir lassen zu dem Zwecke die gemeinen Brüche $^1/_9$, $^2/_9$, $^3/_9$ 2c. in Decimalbrüchen ausdrücken.

$^1/_9 = 0{,}111\ldots$
$^2/_9 = 0{,}222\ldots$
$^3/_9 = 0{,}333\ldots$
u. s. w.

Hier wiederholt sich bei jedem Decimalbruche eine und dieselbe Ziffer. Es sind dieß Decimalbrüche mit *einstelligen Perioden* (1), (2), (3). Die Ziffer der Periode und

*) Nach der in Fein's praktischem Rechenbuche gegebenen Weise bearbeitet.

der Zähler des entsprechenden gemeinen Bruches sind gleich. Ein derartiger Decimalbruch muß daher einem gemeinen Bruche gleich sein, der die Ziffer der Periode zum Zähler und 9 zum Nenner hat Der Decimalbruch 0,3333 ... = $^3/_9$ = $^1/_3$; 0,666 ... = $^6/_9$ = $^2/_3$; 0,888 ... = $^8/_9$.

Hierauf lassen wir die Brüche $^1/_{99}$, $^2/_{99}$, $^3/_{99}$, $^{27}/_{99}$ in Decimalbrüche verwandeln.

$^1/_{99}$ = 0,(01)0101 ...
$^2/_{99}$ = 0,(02)0202 ...
$^3/_{99}$ = 0,(03)0303 ...
$^{27}/_{99}$ = 0,(27)2727 ...

Hier wiederholen sich bei jedem Decimalbruche zwei Ziffern. Es sind also Decimalbrüche mit zweistelligen Perioden. Die geltenden Ziffern der Periode und der Zähler des gemeinen Bruches sind auch hier wieder gleich. Ein Decimalbruch mit einer zweistelligen Periode muß daher einem gemeinen Bruche gleich sein, der die Ziffern der Periode zum Zähler und 99 zum Nenner hat. 0,(01)01 = $^1/_{99}$; 0,(03)03 = $^3/_{99}$ = $^1/_{33}$; 0,(27)27 = $^{27}/_{99}$ = $^3/_{11}$; 0,6363 = $^{63}/_{99}$ = $^7/_{11}$; 0,2323 = $^{23}/_{99}$.

$^1/_{999}$ = 0,(001)001 ...
$^2/_{999}$ = 0,002002 ...
$^3/_{999}$ = 0,003003 ...
$^{27}/_{999}$ = 0,027027 ...
$^{756}/_{999}$ = 0,756756 ...

Hier bilden sich Decimalbrüche mit dreistelligen Perioden. So viel 999stel der gemeine Bruch enthält, eben so viele 1000tel enthält die erste Periode des Decimalbruches. Soll daher ein Decimalbruch mit einer 3stelligen Periode auf einen gemeinen Bruch zurückgeführt werden, so ist für die 1000tel eine gleiche Anzahl 999stel zu setzen. 0,001001 = $^1/_{999}$; 0,003003 = $^3/_{999}$ = $^1/_{333}$; 0,756756 $^{756}/_{999}$ = $^{28}/_{37}$.

Um also überhaupt einen periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so setzt man die Periode selbst als Zähler, und als Nenner so viele 9, als die Periode Stellen hat. 0,33443344 ... = $^{3344}/_{9999}$ = $^{304}/_{909}$.

Decimalbrüche, die nicht gleich mit den ersten Stellen periodisch werden, nennt man unreinperiodisch. Geht der Periode eine Null vorher, wie bei 0,0555 ...; so rückt man das Komma um eine Stelle weiter rechts, wodurch der Bruch 10mal so groß und rein periodisch wird, verwandelt ihn dann in einen gemeinen Bruch und theilt diesen wieder durch 10. Statt 0,0555 ... setzt man also 0,555 ...; 0,555 ... = $^5/_9$; $^1/_{10}$ × $^5/_9$ = $^5/_{90}$ = $^1/_{18}$. Bei 0,008181 ..., wo zwei Nullen vorhergehen, setzt man 0,8181 ... = $^{81}/_{99}$; $^1/_{100}$ × $^{81}/_{99}$ = $^{81}/_{9900}$ = $^9/_{1100}$.

Gehen statt der Nullen Ziffern voraus, so wird der Decimalbruch zerlegt. 0,3111 ... = 0,3 + 0,0111; 0,3 = $^3/_{10}$; 0,0111 = $^1/_{90}$; $^3/_{10}$ + $^1/_{90}$ = $^{14}/_{45}$. Noch ein Beispiel: 0,91666 ... = 0,91 + 0,00666; 0,91 = $^{91}/_{100}$; 0,00666 ... = $^6/_{900}$ = $^2/_{300}$; $^{91}/_{100}$ + $^2/_{300}$ = $^{11}/_{12}$.

Aufgaben.

1) 0,333 ...	5) 0,2424 ...	9) 0,9333 ...	13) 0,77272 ...
2) 0,666 ...	6) 0,549549 ...	10) 0,0954954 ...	14) 0,40909 ...
3) 0,3636 ...	7) 0,711711 ...	11) 0,91666 ...	15) 0,851851 ...
4) 0,9393 ...	8) 0,296296 ...	12) 0,564545 ...	16) 9,0909 ..

6. Decimalbrüche zu addiren.

Aufgabe 1. Wie viel betragen folgende Zahlen zusammen: 3,84 + 68,075 + 0, 4 + 24,6987?

Ausrechnung.

Man setzt die Zahlen so unter einander, daß auf der linken Seite des Decimalkomma Einer unter Einer, Zehner unter Zehner ꝛc. und auf der rechten Seite desselben Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. f. zu stehen kommen.

```
 3,84
68,075
 0,4
24,6987
-------
97,0137
```

Die 7 steht allein. Da ist nichts weiter zu addiren. Ich setze also 7 unter den Strich und zwar in die Stelle der Zehntausendtel, d. i. gerade unter die 7.

8 + 5 = 13, nämlich 13 Tausendtel; 13 Tausendtel = 10 Tausendtel oder 1 Hundertel + 3 Tausendtel. Die 3 Tausendtel unter den Strich, genau unter die Tausendtel; das 1 Hundertel hinüber zu den Hunderteln.

1 + 9 ist 10, und 7 ist 17, und 4 ist 21. Das sind 21 Hundertel oder 2 Zehntel und 1 Hundertel. Das 1 Hundertel unter den Strich, gerade unter die Hundertel; die 2 Zehntel hinüber zu den andern Zehnteln.

2 und 6 ist 8, und 4 ist 12, und 8 ist 20, nämlich 20 Zehntel. 20 Zehntel sind 2 Ganze und 0 Zehntel. 0 Zehntel unter den Strich in die Reihe der Zehntel; die 2 Ganzen hinüber zu den Ganzen.

Bevor ich weiter rechne, setze ich ein Komma, damit die Theile von den Ganzen sogleich geschieden werden.

2 + 4 + 8 + 3 = 17; 17 Einer = 1 Zehner + 7 Einer ꝛc.

Summa: 9 Zehner, 7 Einer, 0 Zehntel, 1 Hundertel, 3 Tausendtel und 7 Zehntausendtel, zusammen: 97 Ganze und 137 Zehntausendtel.

Aufg. z. Zifferr., 51. Uebung.

7. Decimalbrüche zu subtrahiren.

Aufgabe 1. Um wie viel ist die Zahl 91,2831 kleiner als 173,4284?

Ausrechnung.

```
173,4284
 91,2831
--------
 82,1453
```

1 Zehntausendtel von 4 Zehntaus. bleiben 3 Zehntausendtel.

3 Tausendtel von 8 Tausendteln bleiben 5 Tausendtel.

8 Hundertel von 2 H. wegzunehmen, geht nicht. Ich borge 1 Zehntel; 1 Zehntel und 2 Hundertel = 12 Hundertel; 8 Hundertel von 12 Hunderteln bleiben 4 Hundertel.

2 Zehntel von 3 Zehnteln bleibt 1 Zehntel. Und so fort.

Rest: 8 Zehner, 2 Einer, 1 Zehntel, 4 Hundertel, 5 Tausendtel und 3 Zehntausendtel; zusammen: 82 Ganze und 1453 Zehntausendtel.

Aufgabe 2. Von 25,37854 soll die Zahl 9,482 abgezogen werden.

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 25{,}37854 \\ 9{,}482 \\ \hline 15{,}89654 \end{array} = \begin{array}{r} 25{,}37854 \\ 9{,}48200 \\ \hline 15{,}89654. \end{array}$$

Zehntausendtel sind nicht abzuziehen, daher setzt man unter die 5 Zehntausendtel eine Null. Ebenso unter 4.

Frage: Wurden die Ziffern 9,482 durch die angehängten Nullen aus ihren Stellen gerückt? (Nein, sondern die 9 steht nach wie vor in der Einerstelle, die 4 gilt nach wie vor 4 Zehntel, die 8 8 Hundertel, die 2 2 Tausendtel.) Mithin kann man hinter die Decimalstellen jede beliebige Anzahl Nullen setzen, ohne daß sich der Werth der gegebenen Zahl vergrößert oder verkleinert.

Nun subtrahirt man wie vorhin. Rest: 15 Ganze und 89654 Hunderttausendtel.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Unterschied zwischen 42,007 und 17,653?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 4\;2,\;0\;0\;7 \\ 1\;7,\;6\;5\;3 \\ \hline 2\;4,\;3\;5\;4 \end{array}$$

3 Tausendtel von 7 Tausendteln bleiben 4 Tausendtel.

5 Hundertel von 0 Hunderteln geht nicht. 1 Zehntel kann ich nicht entlehnen, denn dergleichen sind nicht da. Ich gehe daher über das Komma weg und borge 1 Einer. Diesen Einer trage ich auf die nächste, d. h. auf die Zehntelstelle über. Allda macht er 10 Zehntel. Von den 10 Zehnteln nehme ich 1 Zehntel und führe dieses auf die Hundertelstelle. 1 Zehntel = 10 Hundertel. Das geborgte Ganze ist jetzt in 9 Zehntel und 10 Hundertel verwandelt. Nun ziehe ich ab. 5 Hundertel von 10 Hunderteln bleiben 5 Hundertel.

6 Zehntel von 9 Zehnteln bleiben 3 Zehntel.

7 Einer von 11 Einern bleiben 4 Einer. Und 1 Zehner von 3 Zehnern bleiben 2 Zehner. Rest: 24 G. 354 Tausendtel.

Aufgabe 4. Um wie viel ist die Zahl 543 größer als die Zahl 123,527?

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 543 \\ 123{,}527 \\ \hline 419{,}473 \end{array} = \begin{array}{r} 5\;4\;3{,}0\;0\;0 \\ 1\;2\;3{,}5\;2\;7 \\ \hline 4\;1\;9{,}4\;7\;3 \end{array}$$

Man setzt hinter die Vollzahl 543 ein Komma und ergänzt die

fehlenden Decimalstellen durch Nullen. Im Uebrigen ist die Ausrechnung der im vorigen Beispiele gleich.

Aufg. z. Zifferr., 52. Uebung.

8. Decimalbrüche zu multipliciren.

Beispiel 1. Wie viel beträgt das 6fache von 5,7?

Ausrechnung.

5,7
6
―――
34,2

a) 6 × 7 Zehntel = 42 Zehntel; 42 Zehntel = 4 Ganze und 2 Zehntel. Die 2 Zehntel unter die 7 Zehntel; die 4 Ganzen hinüber zu den Ganzen — Decimalzeichen! 6 × 5 ist 30; 30 + 4 = 34. Also ist 6 × 5,7 = 34,2.

b) 5,7 = 57 Zehntel; 6 × 57 = 342; 6 × 57 Zehntel = 342 Zehntel. Zehntel werden zu Ganzen, wenn man mit 10 in ihre Anzahl dividirt. Durch 10 wird dividirt, indem man rechts eine Stelle abtrennt. 342 Zehntel = 34,2.

Beispiel 2. Wie viel ist 36 × 0,075?

Ausrechnung.

0,075
36
―――
450
225
―――
2,700 = 2,7.

36 × 75 = 2700; 36 × 75 Tausendtel also = 2700 Tausendtel. Um sie in Ganze zu verwandeln, so muß man mit 1000 in 2700 theilen. Dieß geschieht dadurch, daß rechts 3 Stellen abgeschnitten werden.

Beispiel 3 Wie viel ist 26, multiplicirt durch 0,18?

Ausrechnung.

26
0,18
―――
208
26
―――
4,68

Ich rechne 18 × 26; 18 × 26 = 468; $^{18}/_{100}$ mal 26 = 468 Hundertel. Um Ganze zu erhalten, so muß ich 468 durch 100 dividiren. 468 durch 100 dividirt = 4,68.

Beispiel 4. Wie viel ist 0,7 mal 0,8?

Ausrechnung.

0,8
0,7
―――
0,56

7 × 8 = 56; $^{7}/_{10} \times {}^{8}/_{10} = {}^{56}/_{100}$. Mithin ist vor 56 das Komma und vor dasselbe, weil keine Ganzen vorhanden sind, eine Null zu setzen.

Beispiel 5. Wie viel ist 4,8 mal 0,72?

Ausrechnung.

0,72
4,8
―――
576
288
―――
3,456

48 × 72 = 3456.

$$48 \times \frac{72}{100} = \frac{3456}{100} = 34,56$$

$$\frac{48}{10} \times \frac{72}{100} = \frac{3456}{1000} = 3,456.$$

Der Multiplikand besteht, da er 2 Decimalstellen enthält, aus 100teln. 100tel durch eine ganze Zahl multiplicirt, gibt wieder 100tel. Darum sind von dem Produkte zunächst 2 Stellen abzuschneiden. Hier aber besteht der Multiplikator nicht aus einer ganzen Zahl, sondern aus 10teln. Mithin ist das Produkt auch nur $\frac{1}{10}$ mal so groß. 100tel durch 10tel multiplicirt, gibt 1000tel. Darum müssen im Ganzen 2 + 1 oder 3 Stellen abgeschnitten werden.

Beispiel 6. Die Zahl 6,348 durch 0,35 multiplicirt, wie viel?

Ausrechnung.

6,348
0,35
———
31740
19044
———
2,22180

$35 \times 6348 = 222180.$

$$35 \times \frac{6348}{1000} = \frac{222180}{1000} = 222{,}180.$$

$$\frac{35}{100} \times \frac{6348}{1000} = \frac{222180}{100000} = 2{,}22180 = 2{,}2218.$$

Hier sind von dem Produkte 3 Stellen wegen der 100tel des Multiplikanden und 2 Stellen wegen der 100tel des Multiplikators abzuschneiden. Also müssen im Ganzen 3 + 2 oder 5 Stellen abgeschnitten werden.

Man multiplicirt demnach die Decimalbrüche als ganze Zahlen, dann aber streicht man von dem Produkt so viele Stellen ab, als die beiden Faktoren Decimalstellen zusammen haben.

Aufg. z. Zifferr., 53. Uebung.

9. Decimalbrüche zu dividiren.

Beispiel 1. Wie viel beträgt der 4. Theil von 31,8?

Ausrechnung.

4 | 31,8 | 7,95
28
——
38
36
——
20
20

Der 4te Theil von 31 = 7, nämlich 7 Ganze; Dezimalzeichen! Rest 3; 3 G. + 8 Zehntel = 38 Zehntel; der 4te Theil von 38 Z. = 9 Z.; Rest 2 Zehntel; 2 Z. = 20 Hundertel; der 4te Theil von 20 H. = 5 H. Also ist $\frac{1}{4}$ von 31,8=7,95.

Beispiel 2. Wie viel ist 0,648 dividirt durch 17?

Ausrechnung.

17 | 0,648 | 0,0381 . .
51
——
138
136
——
20
17
——

Daß sich Ganze nicht ergeben, ist leicht zu erkennen. Ich setze daher an deren Stelle eine Null und daneben gleich das Komma. 6 Zehntel durch 17 getheilt = 0 Zehntel. 6 Zehntel + 4 Hundertel = 64 Hundertel. 64 Hundertel, durch 17 getheilt = 3 Hundertel, Rest 13 Hunder-

tel. 13 Hundertel + 8 Tausendtel = 138 Tausendtel. 138 Tausendtel, durch 17 dividirt = 8 Tausendtel, Rest 2 Tausendtel.

2 Tausendtel = 20 Zehntausendtel; 20 Zehntausendtel, durch 17 getheilt = 1 Zehntausendtel, Rest 3 Zehntausendtel.

Beispiel 3. Wie oft ist der Bruch 0,75 in 0,87 enthalten?

Ausrechnung.

```
0,75 | 0,87
  75 |  87 | 1,16
        75
       120
        75
       450
       450
```

75 Hundertel sind in 87 Hunderteln so oft enthalten, als 75 Ganze in 87 Ganzen. 75 ist in 87 1,16mal. Also sind auch 75 Hundertel in 87 Hunderteln 1,16mal enthalten.

Beispiel 4. 7 Ganze dividirt durch 0,8, wie viel?

Ausrechnung.

```
0,8 | 7,0 |
  8 |  70 | 8,75
       64
       60
       56
       40
       40
```

Um zu finden, wie oft 8 Zehntel in 7 Ganzen enthalten sind; so verwandeln wir diese auch in Zehntel. 7 Ganze = 70 Zehntel. Nun ist die Frage: Wie oft sind 8 Zehntel in 70 Zehnteln? Antwort: So oft, als 8 in 70; 8 liegt in 70 8,75mal.

Beispiel 5. Wie viel ist 3,672, dividirt durch 0,48?

Ausrechnung.

```
0,480 | 3,672 |
  480 |  3672 | 7,65
         3360
          3120
          2880
           2400
           2400
```

Der Divisor 0,48 enthält 2 Decimalstellen; er besteht also in Hunderteln. Der Dividend hat deren 3; er besteht aus 3 Ganzen 672 Tausendteln = 3672 Tausendteln. Um den Divisor auf dieselbe Anzahl Decimalstellen zu bringen, welche der Dividend enthält, d. h. um seine 48 Hundertel auch in Tausendtel zu verwandeln, so darf man ihm nur eine Null beifügen. Dann heißt's: 480 Tausendtel sind in 3672 Tausendtel so oft enthalten, als 480 Ganze in 3672 Ganzen. 480 in 3672 = 7,65.

Man bringt also überhaupt Divisor und Dividend, wenn sie nicht schon gleiche Nenner haben, auf eine gleiche Anzahl Decimalstellen und dividirt dann, wie mit ganzen Zahlen.

Andere Weise.

0,48	3,672	7,6
	336	
	312	
	288	
	24	

48 in 3672 = 76 mal, Rest 24. Eben so oft würden auch 48 Hundertel in 36,72 oder 3672 Hunderteln enthalten sein. Der Dividend besteht aber nicht aus 3672 Hunderteln, sondern aus 3672 Tausendteln; er ist also nur $\frac{1}{10}$ mal so groß; folglich beträgt auch der Quotient nicht 76, sondern nur $\frac{1}{10}$ von 76, nämlich 7, 6. — Nun hängt man dem Reste eine Null an und dividirt in der bekannten Weise weiter.

Für den Fall, daß der Dividend mehr Decimalstellen hat, als der Divisor, heißt hiernach die Regel: Dividire wie mit ganzen Zahlen und schneide von dem Quotienten so viele Stellen ab, als der Dividend mehr Decimalen hat, denn der Divisor. Dann hänge dem etwaigen Reste Nullen an und dividire in der gewöhnlichen Weise fort.

Aufg. z. Zifferr. 54. Uebung.

10. Benannte Decimalbrüche zu resolviren.

Beispiel: 0,745 Gulden, wie viel Kreuzer und Pfennige?

Wir denken uns den Bruch $\frac{745}{1000}$ Gulden als 745 Gulden, getheilt durch 1000. Es ist daher zu suchen, wie viel der 1000. Theil von 745 Gulden in Kreuzern und Pfennigen beträgt.

0,745 fl. = 44 kr. 2,8 pf., nahe 44 kr. 3 pf.

	60
44	700 kr.
	4
2	800 pf.

Der 1000. Theil von 745 fl. ist kein ganzer Gulden. Ich verwandle sie daher in Kreuzer. 745 fl. = 44700 kr. Der 1000. Theil von 44700 kr. = 44 kr, Rest 700 kr.; 700 kr. = 2800 pf.; der 1000. Theil von 2800 pf. = 2,800 oder 2,8 pf. Brüche unter $\frac{1}{2}$ werden weggeworfen; Brüche an Werth $\frac{1}{2}$ oder darüber werden für ein Ganzes gerechnet. Die 800 Tausendtel oder 8 Zehntelpfennige sind daher als 1 ganzer Pfennig anzusehen.

Aufg. z. Zifferr., 55. Uebung.

11. Die Rechnungsarten mit der angewandten Zahl.

Beispiel 1. Denkt man sich die Erdoberfläche in 1000 gleiche Theile getheilt, so kommen auf die heiße Zone 398,7491 und auf die beiden gemäßigten 518,311 Theile. Wie viel solcher Theile enthalten die beiden kalten Zonen?

Ausr.

Heiße Zone =	398,7491 Th.		1000,0000
Gem. Zonen =	518,311 „		917,0601
Zusammen	917,0601 Th.	Kalte Zonen =	82,9399

Beisp. 2. Ein Acker von 4,13 Tgw. wird bis auf 1,48 Tgw. zum Bau einer Eisenbahn abgetreten. Für das Tagw. werden 675 fl. gezahlt. Wie viel beträgt die Entschädigung?

Ausr.

a.		b.
4,13 Tgw.		675 fl.
1,48 „		2,65
2,65 Tgw.		3375
		4050
		1350
		1788,75 fl. = 1788 fl. 45 kr.

Beisp. 3. Eine Schraube rückt bei einer einmaligen Umdrehung in ihrer Mutter mit ihrer Spitze 7,75 Linien vor; wie viel Umdrehungen sind erforderlich, bis sie um 52,7 Linien vorrückt?

Ausr. 7,75 | 52,70 | 6,8 Umdrehungen.
4650
6200
6200

Aufg. z. Ziffer., 56. Uebung.

12. Decimalbrüche in Regeldetri-Aufgaben.

Beisp. 1. Für 45 fl. erhält man 2 Ctr. 12,3 Pfd.; wie viel für 13 fl.?

Zweisatz.

45 fl.		212,3 Pfd.
13 fl.		?
45 fl.		212,3 Pfd.
1 fl.	45	
13 fl.		13
		6369
		2123
	45,0	2759,9 | 61,3311 . . . Pfd.

45 fl.	212,3 Pfd.
13 fl.	?
45 fl.	
1 fl.	$\frac{212,3 \times 13}{45}$
13 fl.	

Proportion.

45 fl. : 13 fl. = 212,3 Pfd. : x

x = 13 × 212,3 Pfd., getheilt durch 45.

Beisp. 2. 12,8 Ellen zu 25 fl.; was kosten 7,64 Ellen?

Zweisatz.

a.

12,8 Ell.		25 fl.
7,64 „		?
12,8 Ell.		25 fl.
1,0 „	12,8	
7,64 „		7,64
	12,8	191,0

b.

12,8 Ell.	25 fl.
7,64 „	?
12,8 fl.	
1,0 „	$\frac{25 \times 7,64}{12,8}$
7,64 „	

Proportion.

$12{,}8$ Ell. : $7{,}64$ Ell. = 25 fl. : x

```
                 7,64
                   25
                 3820
                1528
   12,80 | 191,00 | 14 fl.
           1280
            6300
            5120
            1180
              60
    1280 | 70800 | 55 kr.
           6400
            6800
            6400
             400
               4
    1280 | 1600 | 1,25 pf.
           1280
            3200
            2560
             6400
             6400
```

Aufg. z. Zifferr., 57. Uebung.

II. Raumrechnung.

Da sich nur aus der klaren Anschauung der äußeren Dinge klare Begriffe in uns erzeugen, und nur klare Begriffe ein klares Denken möglich machen, die Raumlehre aber ganz besonders geeignet ist, das Anschauungsvermögen auszubilden; so springt die Wichtigkeit derselben in die Augen. Auch für das praktische Leben ist sie von großem Werthe. Der Unterricht in der Raumrechnung wird jedoch nur dann recht fruchtbar sein, wenn er *wirklich anschaulich* betrieben wird, d. h. wenn der Lehrer die verschiedenen Längen-, Flächen- und Körpermaße in ihrer *wahren* Größe und nach ihrer doppelten Eintheilung zur Betrachtung und Vergleichung vorführt; wenn er die Dinge in der nächsten Umgebung, als: Tische, Bänke, Wand- und Schiefertafeln, Schulzimmer, Schulhaus, Gärten &c. messen und berechnen läßt, andere Gegenstände aber theils an die Wandtafel zeichnet, theils in der Vorstellung veranschaulicht und dabei gerade so behandelt, als ob sie in Wirklichkeit gegenwärtig seien. — Die bisher stattgefundenen Vorausnahmen hatten den Zweck, das nun Folgende vorzubereiten und anzubahnen.

A. Längenberechnung.

a. Die Längenmaße und ihre Eintheilung.

Um die Länge eines Weges, die Höhe eines Baumes, die Länge

und Breite eines Brettes, die Länge, Breite und Höhe eines Zimmers ꝛc. zu bestimmen; so müssen besagte Gegenstände nach diesen Richtungen hin gemessen werden. Dieß geschieht in gerader Linie und durch Maße von bestimmter und bekannter Länge.

Die gebräuchlichen Längenmaße sind: Die Ruthe ($=^0$), der Fuß ($='$), der Zoll ($=''$) und die Linie ($='''$).

Die Grundeinheit dieser Maße ist, in Bayern wenigstens, der Fuß. Derselbe wird zweifach eingetheilt: in 10 und in 12 Zoll; der Zoll wieder zweifach: in 10 und in 12 Linien.

Wird der Fuß in 10 Zoll und der Zoll in 10 Linien eingetheilt, so werden auch 10 Fuß auf 1 Ruthe gerechnet. Im andern Falle kommen 12 Fuß auf die Ruthe. Es gibt also eine zehn- und eine zwölftheilige Eintheilung.

Die 10theilige oder Decimaleintheilung:	Die 12theilige oder Duodecimaleintheilung:
$1^0 = 10' = 100'' = 1000'''$	$1^0 = 12' = 144'' = 1728'''$
$1' = 10'' = 100'''$	$1' = 12'' - 144'''$
$1'' = 10'''$	$1'' = 12'''$

b) Verwandlung der Längenmaße.

Beispiel 1. $8^0\ 5'\ 9''$ 12theiligen Maßes, wie viele Zoll?

Berechnung:

$8^0\ 5'\ 9''$
12
$101'$
12
211
101
$1221''$

Probe:

$12 \mid 1221'' \mid 101' \mid 8^0$
12 — 96
21 — $5'$
12
$9''$

Beispiel 2. $5^0\ 3'\ 4''\ 6'''$ 10theiligen Maßes, wie v. Lin.?

Berechnung:

$5^0\ 3'\ 4''\ 6''' = 53'\ 4''\ 6'''$
$= 534''\ 6'''$
$= 5346'''$

Probe:

$5346''' = 534''\ 6'''$
$= 53'\ 4''\ 6'''$
$= 5^0\ 3'\ 4''\ 6'''$

Aufg. z. Zifferr., 58. Uebung.

Das Nächstfolgende, nämlich die Verwandlung des 12theiligen Maßes in 10theiliges und umgekehrt, ist nicht für die Schule.

Beispiel 1. 8^0 zwölftheiligen Maßes, wie viel Ruthen und Fuß 10theiligen Maßes?

Auflösung: 8^0 zwölfth. Maßes $= 8 \times 12$ oder 96 Fuß; $96'$ zwölfth. M. sind auch $96'$ zehnth. Maßes; $96'$ zehnth. Maßes $= 9^0\ 6'$; also ꝛc.

Beispiel 2. $15^0\ 4'$ zehnth. M., wie viel Rth. 12theil M.?

Auflösung: $15^0\ 4'$ zehnth. M. $= 154'$; $154'$ sind so viele Ruthen 12theil. Maßes, als $12'$ in $154'$ enthalten sind, nämlich $12^0\ 10'$; also ꝛc.

Beispiel 3. Verwandle $6'\ 8''\ 10'''$ zwölftheilig. M. in 10theiliges Maß? ($6'\ 7''\ 3^{11}/_{18}'''$.)

Auflösung: Fuß sind Fuß; $6' = 6'$; also sind nur die $8''\ 10'''$ in 10thei-

liges Maß zu verwandeln. 8″ 10‴ zwölftheiligen M. = 8 × 12 + 10 = 106‴; da der Fuß bei jeder Eintheilung derselbe ist, so sind auch 144‴ zwölftheiligen M. = = 100‴ zehnth. M.; die Aufgabe ist daher: 144 zwölfth. Linien machen 100 zehntheilige Linien; was thun 106 zwölftheilige Linien?

144‴	100‴ dc.	144 : 100 = 106 : x
106‴	?	x = $73^{11}/_{18}$‴ = 7″ $3^{11}/_{18}$‴

Also sind 6′ 8″ 10‴ zwölfth. M. = 6′ 7″ $3^{11}/_{18}$‴ zehnth. M.

Beispiel 4. Verwandle 3° 7′ 9″ zehnth. M. in 12theil. Maß!

Auflösung: 3° 7′ = 37′; 37′ = 3° 1′ zwölfth. Maßes. Nun sind noch die 9″ zu verwandeln. Da 10 Decimalzoll = 12 Duodecimalzoll, so heißt es jetzt: 10 thun 12, was thun 9? Antwort: 10,8.

Also sind 3° 7′ 9″ zehnth. M. = 3° 1′ 10,8″ zwölfth. M.

Oder: 3° 7′ 9″ = 379″; nun heißt es: 10 thun 12, wie viel thun 379?

Sehr nützlich ist es, durch die Schüler den Umfang einzelner in der Schule befindlicher Gegenstände mittelst eines genau eingetheilten Maßstabes messen zu lassen. Dabei wird sich Folgendes ergeben.

Hat eine Fläche lauter gleiche Seiten, so braucht blos eine derselben gemessen zu werden; die Länge einer Seite, mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, gibt den ganzen Umfang. Sind bei einem Vierecke nur die zwei einander gegenüberstehenden Seiten von gleicher Länge, so hat man zwei Seiten von verschiedener Länge zu messen; der ganze Umfang ist dann zweimal so groß, als beide zusammen genommen. Ist keine Seite der anderen gleich, so müssen sie alle gemessen und die Ergebnisse durch Addition vereinigt werden.

Der Winkel.

Ich ziehe eine gerade Linie. Setze ich nun an den Endpunkt eine andere Linie, so heißt das ein Winkel. Ein Winkel entsteht also, wo sich zwei Linien in einem Punkte vereinigen. Die beiden Linien nennt man Schenkel, den Punkt, wo die Linien sich treffen, Scheitelpunkt. — Ich nehme einen Zirkel; die beiden Arme desselben sind die Schenkel des Winkels, und je nachdem ich den Zirkel erweitere, oder zusammenziehe, wird der Winkel größer, oder kleiner. Steht ein Schenkel senkrecht auf dem andern, so heißt der Winkel ein rechter (Figur 1). Ist ein Winkel kleiner als ein rechter, so ist er ein spitziger (Fig. 2); ist er größer, als ein rechter, so ist er ein stumpfer (Fig. 3).

B. Flächenberechnung.

Unter Fläche versteht man das Aeußere oder die Grenze eines Körpers. Dieselbe ist nicht dick, sondern nur lang und breit, oder lang und hoch. Will man die Größe einer Fläche genau bestimmen, so muß man suchen, wie vielmal so groß sie ist, als eine andere Fläche von bekannter Größe. Daher können als Maße für die Flächen nur wieder Flächen genommen werden. Als solche dienen die Quadrate d. i Flächen, welche von 4 gleichen Seiten eingeschlossen sind und 4 gleiche, nämlich 4 rechte Winkel haben.

Der Lehrer zeichnet Fig. 4, 5 und 6 an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, anzugeben, welche derselben ein Quadrat sei, welche nicht, und warum?

Da die Quadrate (hinsichtlich ihrer Größe) von unendlicher Verschiedenheit sein können, so sind diejenigen derselben, welche als Flächenmaße dienen sollen, näher zu bestimmen. Es sind dieß solche, deren eine (also jede) Seite genau eine Ruthe, oder einen Fuß, oder einen Zoll, oder eine Linie lang ist. Beträgt eine Seite des Quadrates 1 Ruthe, so ist es eine Quadratruthe; beträgt sie 1 Fuß, so ist es ein Quadratfuß u. s. f.

Was ist also eine Quadratruthe? ein □ Fuß? eine □ Meile? ꝛc. Zeichne an die Wandtafel einen Quadratfuß! an die Wand eine Quadratruthe! auf die Schiefertafel einen Quadratzoll! eine Quadratlinie! (Die 3 letzteren nach dem zehn- und zwölftheiligen Maße, vorausgesetzt, daß wenigstens einzelne Schüler einen doppelt eingetheilten Maßstab in Händen haben.)

Will man den Inhalt einer Fläche finden, so wendet man beim Messen derselben nicht die Quadratmaße selbst an, sondern man sucht mittelst der Längenmaße, wie lang und breit sie ist. Aus der gefundenen Länge und Breite wird dann der Flächen- oder Quadratinhalt berechnet. Wie dieß geschieht, läßt sich aus der Anschauung erkennen. Ist z. B. eine Fläche, wie Figur 7 im verkleinerten Maßstabe zeigt, 5 Fuß lang und 3 Fuß breit; so denkt man sich zuerst (wie bei Fig. 8) in die Länge von Fuß zu Fuß gerade Linien gezogen. Dadurch entstehen so viele Streifen, als die Fläche Fuß breit ist, nämlich 3. Nun denkt man sich auch in die Breite (wie bei Fig. 9) von Fuß zu Fuß gerade Linien gezogen. Hierdurch bildet sich aus jedem Streifen eine Reihe von so viel Quadratfuß, als die Fläche Fuß lang ist, nämlich 5. Mithin ist dieselbe 3 × 5 oder 15 □ Fuß groß.

Anm. Die Zahl, welche die Breite angibt, bezeichnet die Anzahl der Reihen, und die Zahl, welche die Länge bezeichnet, sagt, wie viele Quadrate jede Reihe enthält. Darum geben Länge und Breite, miteinander multiplicirt, den Quadratinhalt der Fläche. — Bei folgenden Fällen unterlasse man nicht, die Aufgabe und deren Lösung durch Figuren anschaulich zu machen.

1. Berechnung der Quadrate.

Aufgabe 1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite a) 2 Zoll, b) 3 Zoll, c) 4 Zoll ꝛc. lang ist?

Auflösung: a) ein Quadrat, dessen Seite 2 Zoll lang ist, ist eine Fläche von 2 Zoll Länge und 2 Zoll Breite. Dasselbe enthält also 2 Reihen von je 2 □ Zoll und ist daher 2 × 2 oder 4 □ Zoll groß.

b) Ein Quadrat, dessen Seite 3 Zoll mißt, gibt 3 Reihen von je 3 □ Zoll, ist also 3 × 3 oder 9 □ Zoll groß. Und so fort.

Anm. Da bei dem Quadrate Länge und Breite einander gleich sind, so kann man auch sagen, daß die Größe desselben gefunden werde, wenn man eine seiner Seiten mit sich selbst multiplicirt.

Aufgabe 2. Verwandle eine □ Ruthe in □ Fuß, einen □ Fuß in □ Zoll, einen □ Zoll in □ Linien, nach dem zehn- und zwölftheiligen Maße!

Auflösung.

a. Nach der zehntheiligen Eintheilung ist

1 □° = 10 × 10 oder 100 □′
1 □′ = 10 × 10 oder 100 □″
1 □″ = 10 × 10 oder 100 □‴

Also ist 1 □° = 100 □′ = 10000 □″ = 1000000 □‴
1 □′ = 100 □″ = 10000 □‴
1 □″ = 100 □‴

b. Nach der zwölftheiligen Eintheilung ist

1 □′ = 12 × 12 oder 144 □″
1 □″ = 12 × 12 oder 144 □‴

Also ist 1 □′ = 144 □″ = 20736 □‴
1 □″ = 144 □‴

Aufgabe 3. Ein Garten hat die Form eines Quadrats und mißt an jeder Seite 15 Ruthen. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Antwort: 225 □°.

Aufg. z. Zifferr., 59. Uebung.

2. Berechnung des länglichen Rechtecks.

(Fig. 5, 7, 8 u. 9.)

Beispiel 1. Eine Wiese 20 Ruthen lang und 15 Ruthen breit. Wie groß ist ihr Quadratinhalt?

Auflösung. Da die Wiese 20 Rth. lang und 15 Rth. breit ist, so gibt es 15 Reihen von je 20 □°; mithin ist dieselbe 15mal 20 oder 300 □° groß.

Beispiel 2. Eine Fläche ist 2 Fuß 8 Zoll breit und 3 Fuß 6 Zoll lang, 12theilig. Wie groß ist ihr Quadratinhalt?

Auflösung: Man verwandelt die Fuß in Zoll, multiplicirt dann Länge und Breite mit einander und reducirt die gefundene Anzahl Quadratzoll mit 144 auf Quadratfuß.

3′ 6″ = 42″
2′ 8″ = 32″
84
126
1344 □″.

144 | 1344 | 9 □′
1296
48 □″

Die Fläche ist also 9 □′ 48 □″ groß.

Beisp. 3. Ein Ackerbeet ist 36° zehntheiligen Maßes lang und 8′ breit. Wie viel beträgt sein Flächeninhalt?

Auflösung: Man bringt das Maß der Länge und Breite

auf einerlei Benennung, d. i. man verwandelt die 36° gleichfalls in Fuß, multiplicirt dann beide miteinander und reducirt die gefundene Anzahl Quadratfuß auf Quadratruthen.

Berechnung: $36^0 = 360'$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 2880\ \square' = 28\ \square^0\ 80\ \square'. \end{array}$$

Beispiel 4. Welches ist der Quadratinhalt einer Fläche, welche $\frac{1}{2}'$ lang und $\frac{1}{3}'$ breit ist?

Aufl. 1′ lang und 1′ breit $= 1\ \square'$ (Fig. 10.)

1′ lang und $\frac{1}{3}'$ breit $= \frac{1}{3} \times 1\ \square' = \frac{1}{3}\ \square'$ (Fig. 11)

$\frac{1}{2}'$ lang und $\frac{1}{3}'$ breit $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\ \square' = \frac{1}{6}\ \square'$ (Fig. 12.)

Beispiel 5. Eine Fläche ist $\frac{3}{4}$ Zoll breit und $\frac{4}{5}$ Zoll lang, wie groß ist ihr Quadratinhalt?

Aufl. 1″ lg. und 1″ br. $= 1\ \square''$

1″ lg. und $\frac{3}{4}$ br. $= \frac{3}{4}\ \square''$ (Fig. 13.)

$\frac{4}{5}''$ lg. und $\frac{3}{4}''$ br. $= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20}\ \square''$ (Fig. 14.)

Also ist die Fläche $\frac{12}{20}$ oder $\frac{3}{5}\ \square''$ groß.

Beispiel 6. Der Fußboden eines Zimmers ist $28\frac{2}{3}'$ lang und $20\frac{3}{4}'$ breit; wie viel beträgt sein Flächeninhalt?

Aufl. 1′ Breite und $28\frac{2}{3}'$ Länge gibt $28\frac{2}{3}\ \square'$; 2′ Breite und $28\frac{2}{3}'$ Länge gibt $2 \times 28\frac{2}{3}\ \square'$; also machen $20\frac{3}{4}'$ Breite und $28\frac{2}{3}'$ Länge $20\frac{3}{4} \times 28\frac{2}{3}\ \square'$.

Ausrechnung.

a. $20\frac{3}{4} \times 28\frac{2}{3} =$

$$\begin{array}{rcrcr} 20 & \times & 28 & = & 560 \\ 20 & \times & \frac{2}{3} & = & 13\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \times & 28 & = & 21 \\ \frac{3}{4} & \times & \frac{2}{3} & = & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

Zusammen: $594\frac{5}{6}\ \square'$

b. $20\frac{3}{4} \times 28\frac{2}{3} =$

$\frac{83}{4} \times \frac{86}{3} = \frac{7138}{12}$

$= 594\frac{5}{6}$.

Der Fußboden ist also $594\frac{5}{6}\ \square'$ groß.

Aufg. z. Kopfr., S. 49.

Aufg. z. Ziffferr., 60. und 61. Uebung.

Das Bisherige aus der Flächenberechnung ist in allen Schulen durchzunehmen.

3. Berechnung des verschobenen Vierecks.

Daß das verschobene Viereck abcd (Fig. 15) dem rechtwinkeligen Vierecke efcd an Größe gleich ist, ist (auch ohne mathematischen Beweis) leicht einzusehen. Also wird der Quadratinhalt des ersteren eben so gefunden werden, wie der des letzteren: man sucht die Länge ab und die Breite (oder Höhe) de und multiplicirt dann beide miteinander.

Aufgabe. Die Grundlinie ab sei = 24′ und die Höhe de = 15′; wie groß ist der Quadratinhalt? Antwort: 360 □′.

4. Berechnung des ungleichseitigen Vierecks.
(Fig. 16.)

Wenn man über der Grundlinie ab und dieser parallel eine gleichlange Linie zieht, welche die Linie cd bei e schräg schneidet, so wird von der Figur auf der einen Seite gerade so viel weggeschnitten, als auf der andern fehlt, um ein Rechteck zu bilden. Es lehrt also der Augenschein, daß ein ungleichseitiges Viereck genau so groß ist, als ein Rechteck, welches dieselbe Grundlinie und mittlere Höhe hat. Um daher den Quadratinhalt einer solchen Fläche zu erhalten, so mißt man deren Länge und mittlere Breite und multiplicirt dann beide mit einander.

Anstatt der mittleren Breite kann man auch die kleinere und die größere Breite messen und die Hälfte von deren Summe nehmen.

Aufgabe 1. Es sei ab = 36′, ad = 6′ 4″ und bc = 10′ 8″; wie groß ist der Quadratinhalt?

Berechnung: 6′ 4″ + 10′ 8″ = 17′; die Hälfte von 17′ = $8^1/_2$′; $8^1/_2$ mal 36 = 306; also ist die Fläche 306 □′ groß.

Aufgabe 2. Ein Acker ist 98⁰ 5′ lang und auf der einen Seite 42⁰ 5′, auf der andern 37⁰ 3′ breit, zehntheiligen Maßes. Wie viele Tagw. (zu 40000 □′) ist derselbe groß?

Antwort: 9,825375 Tgw. = 9 Tgw. 33015 □Fuß.

5. Berechnung der Dreiecke.

Wie sich aus der Anschauung (Fig. 17 und 18) ergibt, so ist das Dreieck immer die Hälfte eines Vierecks von gleicher Grundlinie und Höhe. Der Inhalt eines Dreiecks wird daher gefunden, wenn man seine Grundlinie (ab) und seine senkrechte Höhe (ac oder ce) mit einander multiplicirt und hernach das Produkt halbirt.

Aufgabe 1. Es sei ab = 15′ 4″ und die Höhe ac = 12′ 9″; wie groß ist der Flächeninhalt? Antwort: $97^3/_4$ □′.

Aufgabe 2. Es sei ab = $12^3/_4$′ und ac = $14^2/_3$′: wie viel beträgt der Quadratinhalt? Antwort: $93^1/_2$ □′.

Aufgabe 3. Der Giebel eines Hauses ist 28′ breit und $25^1/_2$′ hoch; wie groß ist der Quadratinhalt seiner Außenseite? (357 □′.)

6. Berechnung der Vielecke.

Alle geradlinigen Figuren, welche mehr als 4 Seiten haben, werden vielseitige oder vieleckige genannt. Sind bei einer vieleckigen Figur alle Seiten (und Winkel) einander gleich, so ist sie ein regelmäßiges Vieleck (Fig. 20); wenn nicht, so ein unregelmäßiges (Fig. 19.)

Um den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vielecks zu finden, so zerlegt man dasselbe, indem man von einer Ecke zur andern Linien zieht, in Dreiecke, berechnet dann diese einzeln und zählt die Ergebnisse zusammen.

Aufgabe: Von dem Fünfecke (Figur 19) sei ac = 24′; bf =

9′; dg = 10′; ad = 21′; eh = 12′; wie groß ist sein Quadratinhalt?

Auflösung: Durch die Linien ac und ad werden Dreiecke gebildet: I. abc, II. acd und III. ade.

I. Die Grundlinie ac = 24′; die Höhe bf = 9; 9 × 24 = 216; $\frac{1}{2}$ × 216 = 108; das erste Dreieck also = 108 □′.

II. Die Grundlinie ac = 24′; die Höhe dg = 10′; 10 × 24 = 240; $\frac{1}{2}$ × 240 = 120; das 2. Dreieck = 120 □′.

III. Die Grundlinie ad = 21′; die Höhe eh = 12′; 12 × 21 = 252; $\frac{1}{2}$ × 252 = 126; das 3. Dreieck = 126 □′.

Das ganze Fünfeck enthält also 108 + 120 + 126 = 354 □′.

Wie das unregelmäßige Vieleck, so läßt sich auch das regelmäßige behandeln. Einfacher ist es aber, wenn man von den Ecken aus Linien auf den Mittelpunkt desselben zieht, wodurch so viele gleiche Dreiecke entstehen, als die Figur Seiten hat. Dann berechnet man eines derselben und nimmt das Ergebniß so oft mal, als Seiten oder Dreiecke vorhanden sind.

Aufgabe. Es sei bei Figur 20 die Grundlinie ab = 4′ und die Höhe cd = 5′; wie viele Q.-F. enthält das Sechseck?

Auflösung: 4 × 5 = 20; die Hälfte davon ist 10. Das Dreieck abc ist also 10 Q.-Fuß groß. Von derselben Größe sind auch die übrigen Dreiecke. Folglich enthält das ganze Sechseck 6 × 10 Q.-F.; 6 × 10 Q.-F. = 60 Q.-F.

Anm. Um auf das Folgende vorzubereiten, so lasse man die Berechnung noch auf eine zweite Weise ausführen.

$$1 \text{ Dreieck} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ Q.-F.}$$

$$2 \text{ Dreiecke} = \frac{4 \times 5}{2} + \frac{4 \times 5}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ Q.-F.}$$

$$3 \text{ Dreiecke} = \frac{4 \times 5}{2} + \frac{4 \times 5}{2} + \frac{4 \times 5}{2} = \frac{12 \times 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ Q.-F.}$$

Haben also 2 oder mehrere Dreiecke gleiche Höhe, so wird der Inhalt derselben auch gefunden, wenn man ihre Grundlinien in eine Summe vereinigt, diese dann mit der gemeinschaftlichen Höhe multiplicirt und das Produkt halbirt.

7. Berechnung der Kreisfläche.

(Figur 21.)

Der Kreis wird durch einen Zirkel mit gleicher Oeffnung beschrieben. Daher ist die Kreislinie oder der Umkreis von dem Mittelpunkte überall gleichweit entfernt, und daher sind auch die Halbmesser eines Kreises — die geraden Linien von dem Mittelpunkte bis zum Umkreis — alle einander gleich. Eine gerade Linie, welche durch den Mittel-

punkt des Kreises geht und mit ihren beiden Enden die Kreislinie berührt, wird der Durchmesser genannt. Der Umfang eines Kreises verhält sich zum Durchmesser desselben wie 314 zu 100, d. i. der Umfang enthält stets 314 solche Theile, wie der Durchmesser deren 100 hat. Er ist also $3^{14}/_{100}$ (= 3, 14 oder genauer 3,1416) mal so groß, als dieser.

Fragen: Wie verhält sich der Durchmesser eines Kreises zum Halbmesser desselben? der Halbmesser zum Durchmesser? Wie findest du aus dem gegebenen Durchmesser den Kreisumfang und umgekehrt? Wie aus dem Halbmesser und umgekehrt?

Der Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von (unzählig) vielen Seiten angesehen werden. Denkt man sich nun vom Mittelpunkt aus nach allen Ecken Halbmesser gezogen, so entstehen (unendlich) viele Dreiecke. Die gemeinschaftliche Höhe derselben ist der Halbmesser, und ihre Grundlinien bilden, zusammen genommen, den Kreisumfang. Der Inhalt aller Dreiecke und somit auch der Inhalt des ganzen Kreises wird daher gefunden, wenn man Umfang und Halbmesser mit einander multiplicirt und das Produkt halbirt, oder wenn man Umfang und Durchmesser mit einander multiplicirt und das Produkt durch 4 theilt.

Beispiel: Der Umfang eines Kreises = 22′, sein Halbmesser = $3^1/_2$′; wie groß ist seine Fläche?

Antwort: $3^1/_2 \times 22$, getheilt durch 2 = $38^1/_2$ Q.-F.

Aufgaben: Wie groß ist der Quadratinhalt

a) einer kreisrunden Scheibe von 6″ Durchmesser? (28,2744 □″.)

b) eines Kreises von 4^0 im Halbmesser? (50,2656 Q.-R.)

c) eines kreisrunden See's von 471,24′ Umfang? (17671,5 Q.-F.)

Anm. Da der Q.-Inhalt eines Kreises aus dem Halbmesser und dem Umfange desselben sich berechnet, beide aber selten geradezu gegeben sind; so ist immer das Erste, sie zu bestimmen. Dann wird zur eigentlichen Flächenberechnung übergegangen. — Ist der Durchmesser = 8′, so ist der Umkreis = 8 × 3,1416′, und die Kreisfläche = 4 × 8 × 3,1416 getheilt durch 2 = 4 × 4 × 3,1416 Q.-F. Hieraus folgt, daß der Inhalt eines Kreises auch gefunden wird, wenn man den Halbmesser mit sich selbst und das Produkt wieder mit 3,1416 multiplicirt.

Zusatz.

Der Flächeninhalt ist das unmittelbare Produkt aus Länge und Breite. Ist daher die Größe der Fläche und die eine Ausdehnung derselben (die Länge oder Breite) bekannt; so findet man die andere, indem man mit der gegebenen Ausdehnung in den Flächeninhalt dividirt.

Beispiel 1. Eine Fläche ist 24 Q.-Zoll groß; in ihrer Breite mißt sie 4″; wie viel beträgt ihre Länge?

Auflösung. Ist eine Fläche 4″ breit, so muß sie, um 4 Q.-Z. zu enthalten, 1″ lang sein. Um 2 × 4 Q.″ zu enthalten, so muß sie 2 × 1″ lang sein. Um 3 × 4 Q.-Z. zu enthalten, so muß sie 3 × 1″ lang sein. Die gegebene Fläche ist 24 Q.″

groß. Also muß ihre Länge so viel mal 1″ betragen, als 4 Q.″ in 24 Q.-Zoll enthalten sind. 4 Q.″ in 24 Q.″ = 6 mal. Folglich ist sie 6 × 1″ lang; 6 × 1″ = 6″.

Beispiel 2. Ein Rechteck, dessen kürzere Seite 4° 8′ zehntheil. Maßes beträgt, ist 36 Q.° groß. Wie viel mißt dessen längere Seite?

Auflösung: a) 4° 8′ = 48′; 48′ Breite und 1′ Länge geben 48 Q.′; das Rechteck ist also so vielmal 1 Fuß lang, als 48 Q.′ groß. Sein Flächeninhalt = 36 Q.°; mithin beträgt seine Ausdehnung in der Länge so viele Fuß, als 48 Q.′ in 36 Q.° enthalten sind. Um dies zu finden, so verwandle ich die 36 Q.° auch in Q.′; 36 Q.° = 36 × 100 = 3600 Q.′; 48 Q.′ in 3600 Q.′ oder 48 in 3600 = 75. Also ist das Rechteck 75′ oder 7° 5′ lang.

b) 4° 8′ = 4,8°. Ist eine Fläche 4,8° breit und 1° lang, so enthält sie 4,8 Q.°; ist sie 4,8° breit und 2 × 1° lang, so ist sie 2 × 4,8 Q.° groß. Folglich ist die Fläche so vielmal 1 Ruthe lang, als 4,8 Q.° groß. Und da ihre Größe 36 Q.° beträgt, so ist sie so vielmal 1 Ruthe lang, als 4,8 Q.° in 36 Q.° enthalten sind. 4,8 in 36 = 48 in 360 = 7,5. Also beträgt die Länge 7,5 Rth.

Aufg. z. Kopfr. Nr. 8 u. 9, z. Zifferr. 62. Uebung.

C. Körperberechnung.

Eine (mathematische oder gedachte) Linie ist nur lang; eine Fläche ist lang und breit; ein Körper aber ist lang, breit und hoch (tief oder dick). Als Maß für die Körper dient der Würfel oder Kubus. Derselbe ist ein achteckiger, von 6 gleichen Quadratflächen umschlossener Körper. Seine 12 Kanten — die scharfen Erhebungen, welche durch das Zusammenstoßen der Flächen entstehen — sind alle einander gleich. Er ist daher eben so hoch als lang und breit. Sowie man die Linien nach Längenruthen, Längenfuß rc. und die Flächen nach Quadratruthen, Quadratfuß rc. bestimmt; so sucht man bei den Körpern, wie viele Würfelruthen, Würfelfuß rc. sie enthalten. Ein Würfel- oder Kubikzoll ist ein Würfel, welcher 1″ lang, 1″ breit und 1″ hoch ist. Was ist nun ein Kubikfuß? eine Kubikruthe? eine Kubikmeile?

Ist ein Würfel 2 Zoll lang (folglich auch breit und hoch), so beträgt seine Grundfläche 2 × 2 = 4 Quadratzoll. Auf jeden Q.″ kann ein Kubikzoll aufgesetzt werden. Auf der Grundfläche von 4 Q.″ können somit 4 K.-Z. neben einander stehen. Sie bilden eine Schicht von 1″ Höhe. Da der Würfel 2″ hoch ist, so enthält er 2 dergleichen Schichten. Er ist also 2 × 4 oder 8 K.-Z. groß.

Ist ein Würfel 3 Zoll lang, so enthält er 3 Schichten von je 3 × 3 oder 9 Kubikzoll. Er ist also 3 × 3 × 3 oder 27 K.-Z. groß.

Bei 4″ Länge enthält ein Würfel 4 Schichten von je 4 × 4 oder 16 K.-Z.; sein Rauminhalt ist also = 4 × 4 × 4 = 64 K.-Zoll u. s. f.

Anm. Das Produkt aus Länge und Breite bezeichnet zunächst den Quadratinhalt der Grundfläche, dann aber auch die Anzahl der Würfelzoll 2c., welche zusammen eine Schicht bilden. Die Zahl, welche die Höhe bestimmt, sagt, wie viele dergleichen Schichten der ganze Körper enthält. Darum gibt das Produkt aus der Länge, Breite und Höhe den Kubikinhalt. Da beim Würfel alle Seiten einander gleich sind, so kann man, um dessen Inhalt zu finden, die Zahl, welche die Länge des Würfels bezeichnet, mit sich selbst und das Produkt wieder mit derselben Zahl multipliciren.

Aufgabe. Verwandle eine Kubikruthe in Kubikfuß, einen Kubikfuß in Kubikzoll 2c.!

a) Zehntheilig.

1 K.-R. = 10 × 10 × 10 = 1000 K.-Fuß,
1 K.-F. = 10 × 10 × 10 = 1000 K.-Zoll,
1 K.-Z. = 10 × 10 × 10 = 1000 K.-Linien.

Also ist 1 K.-R. = 1000 K.-F. = 1000000 K.-Z. = 1000000000 K.-L.
1 K.-F. = 1000 K.-Z. = 1000000 K.-L.
1 K.-Z. = 1000 K.-L.

b) Zwölftheilig.

1 K.-R. = 12 × 12 × 12 = 1728 K.-Fuß,
1 K.-F. = 12 × 12 × 12 = 1728 K.-Zoll,
1 K.-Z. = 12 × 12 × 12 × 1728 K.-Linien.

Also ist 1 K.-R. = 1728 K.-F. = 2985984 K.-Z. = 5159780352 K.-L.
1 K.-F. = 1728 K.-Z. = 2985984 K.-L.
1 K.-Z. = 1728 K.-L.

Aufg. z. Zifferr. 63. Uebung.

Die Art und Weise, den kubischen Inhalt von andern Körpern zu bestimmen, ist durch die Form derselben bedingt.

1) Das Prisma und der Cylinder.

Das Prisma ist ein Körper, welcher zwei gleiche Drei-, oder Vier-, oder Vielecke als Grundflächen und drei oder mehrere ebene Seitenflächen hat. Der Cylinder (die Rolle oder Walze) hat zwei ebene kreisrunde Grundflächen und eine gewölbte Seitenfläche. Beide (Prisma und Cylinder) sind überall gleich dick.

Beispiel 1. Die Grundfläche eines vierseitigen Körpers ist 1′ lang und 9″ breit; seine Höhe beträgt 8′ 5″ zehntheiligen Maßes. Wie groß ist sein Kubikinhalt?

Auflösung: 1′ = 10″; die Grundfläche ist also = 9 × 10 oder 90 Q.-Zoll. Eben so viele Kubikzoll kommen auf eine Schicht. Da 8′ 5″ = 85″, so enthält der Körper 85 dergleichen Schichten; 85 × 90 = 7650. Er ist also 7650 Kubikzoll oder 7 Kubikfuß und 650 Kubikzoll groß.

Beispiel 2. Wie groß ist der Kubikinhalt eines dreiseitigen

$7\frac{1}{2}$ Fuß hohen Körpers, dessen zwei Grundflächen Dreiecke sind von $\frac{3}{4}$' Breite und $1\frac{1}{6}$' Höhe?

Auflösung: $\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{6} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$; die Hälfte von $\frac{7}{8} = \frac{7}{16}$. Die Grundfläche ist also $\frac{7}{16}$ Q.-F. groß. Von der untern Grundfläche bis zu 1 Fuß Höhe beträgt der Rauminhalt $\frac{7}{16}$ Kubikfuß, bis zu $7\frac{1}{2}$' Höhe $7\frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = 3\frac{9}{32}$ K.-F.

Beispiel 3. Ein Cylinder hat 1' 4" im Durchmesser und ist 10' hoch. Wie groß ist sein Kubikinhalt?

Auflösung: Da der Durchmesser = 1' 4" oder 16", so ist der Umkreis = 3,14 × 16 = 50,24", der Halbmesser = ½ × 16" = 8", die Kreisfläche also ist die Hälfte von 8 × 50,24 = 4 × 50,24 = 200,96 Q.-Z. Auf diese Fläche lassen sich 200,96 Kubikzoll neben einander setzen. Und da der Cylinder 10' oder 120" hoch ist, so enthält er 120 dergleichen Schichten. Er ist also 120 × 200,96 = 24115,2 K.-Z. = 13 K.-F. und 1651,2 K.-Z. groß.

Anm. Aus dem Bisherigen ist zu ersehen, daß der Kubikinhalt eines jeden Körpers mit gleichen Grundflächen, es mögen dieß Dreiecke oder Vierecke, oder Vielecke, oder Kreise sein, gefunden wird, wenn man den Quadratinhalt der Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Aufg z. Kopfr. S. 50; z. Zifferr. 64. Uebung.

2) Die Pyramide und der Kegel.

Die Pyramide hat, wie das Prisma, entweder ein Dreieck, oder ein Viereck, oder ein Vieleck als Grundfläche; der Kegel hat, wie der Cylinder, als solche in einen Kreis. Beide nehmen gegen ihre Höhe an Dicke verhältnißmäßig ab und endigen in einer Spitze.

Eine Pyramide ist genau ⅓ von einem Prisma, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Dasselbe Verhältniß besteht zwischen Kegel und Cylinder.

So lehrt die Stereometrie. Um die Schüler davon zu überzeugen, so fertige man einen Cylinder und einen Kegel von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe, beide hohl. Mit derselben Masse Sand, welche der Cylinder auf einmal faßt, läßt sich der Kegel dreimal füllen.

Der Rauminhalt einer Pyramide und eines Kegels wird daher gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe vervielfacht und das Ergebniß durch 3 theilt, oder wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt.

Aufgabe 1. Eine vierseitige Pyramide ist 4' breit und tief und 12' hoch; wie groß ist ihr Kubikinhalt?

Auflösung: Die Grundfläche = 4 × 4 = 16 Q.'; der Kubikinhalt = 12 × 16, getheilt durch 3, oder ⅓ × 12 × 16 = 4 × 16 = 64 K.-F.

Aufgabe 2. Ein Kegel hat 8" Durchmesser und 1' 6" Höhe; wie viel beträgt sein Rauminhalt?

Auflösung: Der Durchmesser = 8"; der Umfang der Grundfläche = 8 × 3, 14 = 25,12"; der Halbmesser = 4"; der Qua-

dratinhalt der Grundfläche beträgt die Hälfte von 4 × 25,12 = 2 × 25,12 = 50,24 Q."; die Höhe = 1' 6" = 18"; der körperliche Inhalt des Kegels ist daher $\frac{1}{3}$ von 18 × 50,24 = 6 × 50,24 = 301,44 K.-Z.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Kubikinhalt einer 4seitigen Pyramide von 12' Breite und Tiefe und 45' Höhe? (2160 K.-F.)

Aufgabe 4. Ein Kegel hat 6' Durchmesser und 20' Höhe; was ist sein Rauminhalt? Antwort: 188,4 Kubikfuß.

3) Der abgestumpfte Kegel.

Ein abgestumpfter Kegel entsteht, wenn die Spitze eines Kegels abgeschnitten wird. Dieß kann auf zweierlei Weise geschehen: so daß die obere Fläche mit der Grundfläche gleichlaufend ist, und so, daß sie mit dieser nicht gleichlaufend ist. Wir ziehen nur den ersteren Fall in Betracht. Ein abgestumpfter Kegel, dessen obere Fläche mit der Grundfläche gleichlaufend ist, läßt sich als eine Walze ansehen, deren Durchmesser gleich ist dem mittleren Durchmesser des abgestumpften Kegels. Man addirt also den obern und untern Durchmesser und nimmt von der Summe die Hälfte; aus dem so gefundenen mittleren Durchmesser berechnet man die Grundfläche, und diese mit der Höhe multiplicirt, gibt den kubischen Inhalt.

Beispiel 1. Der untere Durchmesser sei 6', der obere 4', die Höhe 12, welches ist der Kubikinhalt?

Ausrechnung: 6 + 4 = 10; die Hälfte von 10 = 5. Der mittlere Durchmesser ist also 5 Fuß. Die Kreisfläche des mittlern Durchschnitts = 5 × 5 × 3,14 getheilt durch 4 = 19,625 □ Fuß; der kubische Inhalt = 12 × 19,625 = 235,5 Kubikfuß.

Beispiel 2. Ein abgesägter Baumstamm ist 25 Fuß lang; sein Stammende hat 2,4 und sein Kopfende 1,8 Fuß im Durchmesser; wie viel beträgt sei Kubikinhalt?

Ausrechnung: 2,4 + 1,8 = 4,2; die Hälfte = 2,1; der mittlere Durchmesser ist also 2,1 Fuß. Die Kreisfläche = 2,1 × 2,1 × 3,14 getheilt durch 4 = 3,46185 □', der Kubikinhalt = 25 × 3,46185 = 86,5 Kubikfuß.

4) Die Kugel.

Die Kugel hat nur eine einzige vollkommen runde Fläche, welche in allen Punkten gleichweit von dem Mittelpunkt entfernt ist.

Denkt man sich die krumme Seitenfläche eines geradstehenden Cylinders abgerollt, so ist leicht einzusehen, daß der Quadratinhalt derselben gefunden werde, wenn man den Umfang des Cylinders mit seiner Höhe multiplicirt. Auch ist ohne Beweis begreiflich, daß eine Kugel dieselbe Oberfläche habe, wie ein Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich ist. Demnach wird die Oberfläche einer Kugel gefunden, wenn man den Kugelumfang mit dem Durchmesser multiplicirt. Bei näherer

Betrachtung ergibt sich, daß dieß eben so viel ist, als wenn man den Kugeldurchmesser mit sich selbst und das Produkt mit 3,1416 (oder 3,14) multiplicirt.

Aufgabe 1. Der Durchmesser einer Kugel ist 8″; wie groß ist ihre Oberfläche? Antwort: Ist der Durchmesser = 8″, so ist der Umfang = 3,14 × 8, mithin die Kugeloberfläche = 3,14 × 8 × 8 = 3,14 × 64 = 200,96 Q.″ = 1 Q.′ 56,96 Q.″

Aufgabe 2. Der Umfang einer Kugel ist 26,7′; wie groß ist ihre Oberfläche?

Auflösung: Der Durchmesser = 3,14 in 26,7 = 8,5′; die Oberfläche also = 26,7 × 8,5 = 226,95 Q.′

Denkt man sich eine Kugel aus lauter Pyramidchen zusammengesetzt, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammentreffen: so bilden die Grundflächen derselben zusammen genommen die Kugeloberfläche, und die Höhe einer Pyramide gibt den Halbmesser der Kugel. Man findet also den Kubikinhalt einer Kugel, wenn man ihre Oberfläche mit ihrem Halbmesser multiplicirt und das Ergebniß durch 3 theilt.

Aufgabe 1. Eine Kugel hat 3′ im Durchmesser; wie groß ist a) ihre Oberfläche? b) ihr Rauminhalt?

Auflösung: a) Die Oberfläche der Kugel = 3 × 3 × 3,14 = 9 × 3,14 = 28,26 Q.′ b) Der Halbmesser = $\frac{1}{2}$ × 3′ = 1,5′; der Rauminhalt der Kugel ist also $\frac{1}{3}$ von 1,5 × 28,26 = 0,5 × 28,26 = 14,13 Kubikfuß.

Aufgabe 2. Eine Kugel hat 24′ Durchmesser; was macht ihr Rauminhalt? Antwort: 7234,56 K.-F.

Aufgabe 3. Durch theilweise Messung hat man gefunden, daß der Umfang der Erdkugel 5400 Meilen beträgt. Wie groß ist a) der Durchmesser, b) der Halbmesser, c) die Oberfläche, d) der Kubikinhalt derselben?

Antwort: Der Erddurchmesser = 1718,9 und der Erdhalbmesser = 859,5 Meilen, die Erdoberfläche = 9282060 Quadratmeilen, der Rauminhalt der Erde = 2659310190 Kubikmeilen.

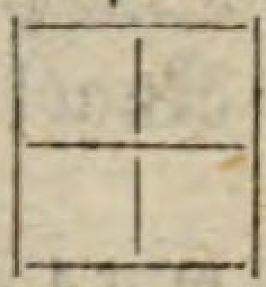
III. Die Quadratzahlen und ihre Wurzeln.

1) Eine Quadratzahl entsteht, wenn man irgend eine Zahl durch sich selbst multiplicirt. So ist 2.2 oder 4 die Quadratzahl von 2, 3.3 oder 9 die Quadratzahl von 3 ꝛc. Die Quadratzahl ist also das Produkt aus zwei gleichen Faktoren. Statt 2.2 setzt man aber 2^2, und statt 3.3 setzt man 3^2 ꝛc. Man setzt also den Faktor nur einmal und hängt ihm, um anzuzeigen, daß er zweimal zu stehen habe, die kleine Ziffer ^{2} an. Demnach ist 1^2 = 1.1 oder 1, 2^2 = 2.2 oder 4, 3^2 = 3.3 oder 9 ꝛc.

Den Faktor nennt man Grundzahl, wenn man von ihm die Quadratzahl sucht, und Quadratwurzel, wenn man ihn aus einer Quadratzahl bestimmt. Das Verfahren, die Quadratwurzel d. i. einen der zwei gleichen Faktoren von einer Zahl zu finden, heißt das Aus-

ziehen der Quadratwurzel. Das Zeichen für diese Operation ist $\sqrt[2]{\ }$ oder blos $\sqrt{\ }$. Bei $7^2 = 49$ ist 7 die Grundzahl und 49 die Quadratzahl davon; bei $\sqrt{49} = 7$ ist von 49 7 die Quadratwurzel.

Die Benennung **Quadratzahl** kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer solchen Zahl in Form von einem Quadrate oder durch ein Quadrat darstellen läßt.

$2^2 = 4 =$ • •
• • = 
$3^2 = 9 =$ • • •
• • •
• • • = 

Man sagt deßhalb statt Quadratzahl auch blos **Quadrat**.

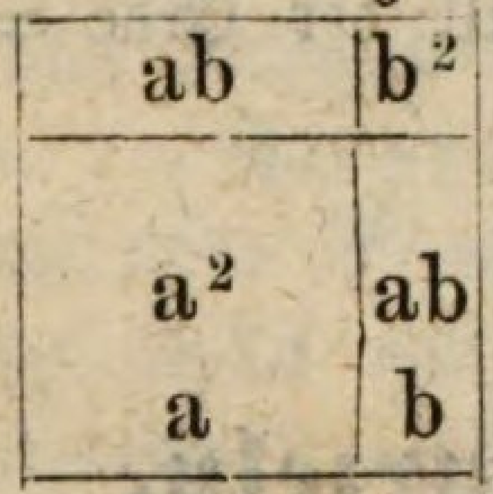
Stelle so die Quadratzahlen der Zahlen von 1—10 dar und präge sie dir ein! Die Quadratzahlen von 20, 30 . . . . . 90 aber bilde frei im Kopfe! Eben so die Quadratzahlen von 11, 12, 13 . . . . . 19!

2) $23^2 = ?$ Da $23 = 20 + 3$, so ist $23^2 =$

$$\begin{array}{r} 20 + 3 \\ \times\ 20 + 3 \\ \hline 9 \\ 60 \\ 60 \\ 400 \\ \hline 23^2 = 529 \end{array} \qquad \text{Besser:} \quad \begin{array}{rl} 20 + 3 & \\ \times\ 20 + 3 & \\ \hline 20 \,.\, 20 = 400 & = 20^2 \\ 20 \,.\, 3 = 60 & \rbrace = 2\,(20 \,.\, 3) \\ 3 \,.\, 20 = 60 & \\ 3 \,.\, 3 = 9 & = 3^2 \\ \hline 23^2 = 529 & \end{array}$$

Es ist also $23^2 = 20^2 + 2\,(20 \,.\, 3) + 3^2$. Nennt man die **Zehner** den **ersten** und die **Einer** den zweiten Theil der in's Quadrat erhobenen Zahl, so besteht die Quadratzahl einer **zweitheiligen** Zahl
aus dem Quadrate des ersten Theils,
aus dem doppelten Produkte des 1. und 2. Theils und
aus dem Quadrate des zweiten Theils.

Dazu führt auch folgende Anschauung:

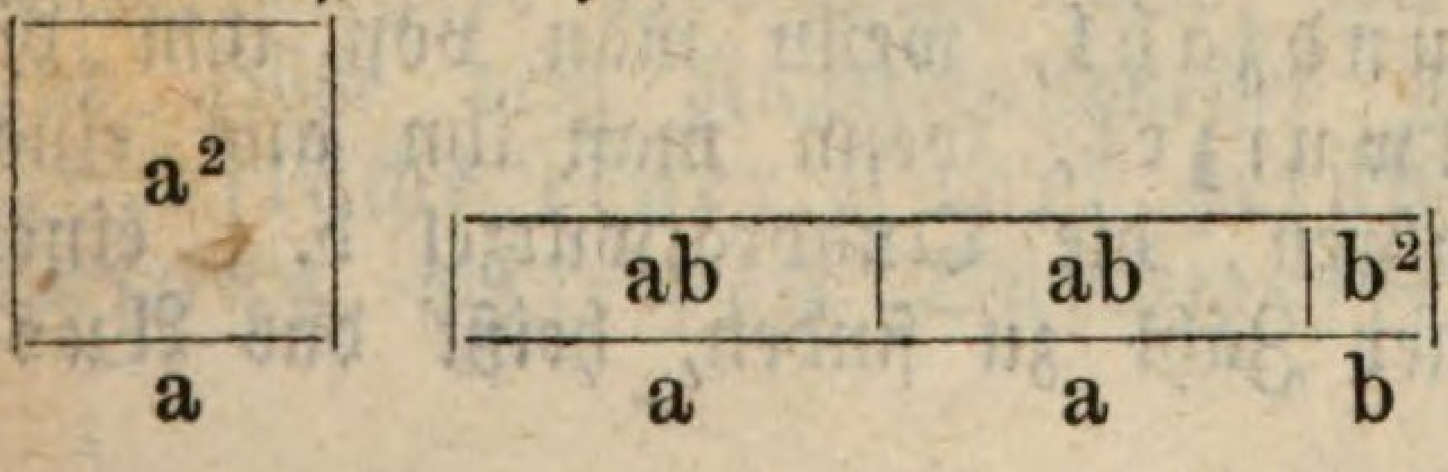


Wie vorhin die Zahl 23 in Zehner und Einer, so ist hier die Grundlinie des ganzen Quadrats und zugleich jede andere Seite desselben in die zwei ungleichen Theile a und b abgetheilt. Der Flächeninhalt des ganzen Quadrats zerfällt hiernach durch Ziehung der entsprechenden Linien
in das **Quadrat** des größeren Theils ($= a^2$),
in 2 **Rechtecke**, von denen jedes den größeren Theil als eine und den kleineren Theil als andere Ausdehnung hat ($= 2\,ab$), und
in das **Quadrat** des kleineren Theils ($= b^2$), mithin in

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Und das ist die Formel für das Ausziehen der Quadratwurzel.

Löst man bei obiger Figur die 2 Rechtecke und das Quadrat des kleineren Theils ab und legt diese 3 Stücke in **einer** Richtung nebeneinander, wie hier:



so zeigt sich, daß die Quadratzahl oder das Quadrat einer 2theiligen Größe auch besteht:

1) aus der **Quadratzahl** (oder dem Quadrate) des 1. Theils und
2) aus einem **Produkte** (oder Rechtecke), welches den doppelten ersten Theil und den zweiten Theil ($2a + b$) als einem Faktor (als Länge) und den zweiten Theil (b) als andern Faktor (als Breite) hat.

3) $1^2 = 1$ $10^2 = 100$ $100^2 = 10000$
$3^2 = 9$ $30^2 = 900$ $300^2 = 90000$
$4^2 = 16$ $40^2 = 1600$ $400^2 = 160000$
$9^2 = 81$ $99^2 = 9801$ $999^2 = 998001$

Vergleicht man an Vorstehendem die Grundzahlen mit ihren Quadratzahlen und sieht dabei auf die Anzahl ihrer Stellen, so ergibt sich Folgendes: die **einstelligen** Grundzahlen (1—9) geben **ein-** und **zweistellige** Quadratzahlen; die **zweistelligen** Grundzahlen (10—99) geben **drei-** und **vierstellige** Quadratzahlen; die **dreistelligen** Grundzahlen (100—999) geben **fünf-** und **sechsstellige** Quadratzahlen. **Die Quadratzahl enthält also entweder doppelt so viel Stellen als ihre Grundzahl, oder doppelt so viel Stellen weniger eine.**

Hieraus folgt umgekehrt, daß eine **ein-** oder **zweistellige** Quadratzahl nur eine **einstellige** Wurzel, eine **drei-** oder **vierstellige** Quadratzahl nur eine **zweistellige** Wurzel, eine **fünf-** oder **sechsstellige** Quadratzahl nur eine **dreistellige** Wurzel haben kann ꝛc. Man theilt daher beim Ausziehen der Quadratwurzel die Quadratzahl von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu 2 Stellen, wie: 5|29 , 40|96 , 1|51|29 , 99|80|01. So viele **Klassen** die Quadratzahl hat, so viele **Stellen** hat ihre Wurzel.

4) Das Ausziehen der Wurzel aus vollkommenen Quadratzahlen.

Zunächst wird Folgendes eingeübt:

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{36.00} = 60$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{49.00} = 70$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{900} = 30$	$\sqrt{64.00} = 80$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{1600} = 40$	$\sqrt{81.00} = 90$
$\sqrt{25} = 5$		$\sqrt{2500} = 50$	

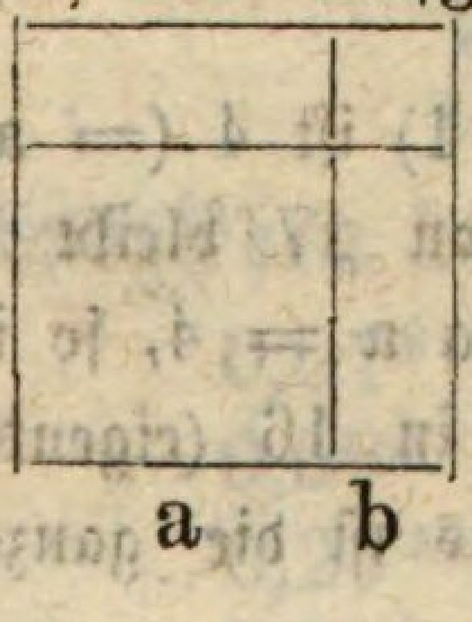
Die Quadratwurzel von 1 ist 1; denn 1.1 ist 1. Die Q.-Wurzel von 4 ist 2; denn 2.2 ist 4 ꝛc. Die Q.-Wurzel von 1600 (16 Hundert) ist 40; denn 40.40 ist 1600 ꝛc.

Dann wird zum **schriftlichen Verfahren** übergegangen.

Beispiel 1. $\sqrt{529} = ?$

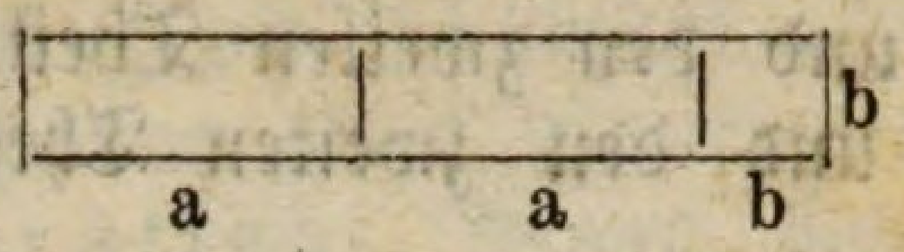
Da 5 | 29 zwei Klassen gibt, so wissen wir voraus, daß die Wurzel eine zweitheilige d. i. eine aus Zehnern und Einern bestehende Zahl ist. Daher stellt sich die Aufgabe auch so:

Das Quadrat



enthält 529 Quadratfuß; wie groß ist die Seite $a + b$?

```
Verfahren:   √5|29 = 20 + 3 = 23
               400     a    b
  2 . 20 = 40 | 129
     3 . 43   | 129
```



Erkl. Zuerst sucht man den ersten Theil (a) oder die Zehner der Wurzel. Die Quadratzahlen der Zehner sind 100, 400, 900 ꝛc.; 500 ist nicht dabei. Die nächste Quadratzahl unter ihr ist 400. Die Wurzel von 400 ist 20. Der erste Theil oder a ist also 20; $20^2 = 20.20$ oder 400. Von den 529 □′ des ganzen Quadrats bilden also 400 das Quadrat von a, und 529—400 oder 129 kommen auf das abgelöste Rechteck $2ab + b^2$.

Nun suchen wir den 2. Theil (b) oder die Einer der Wurzel. Der 2. Theil ist gleich der Breite des Rechtecks, dessen Quadratinhalt = 129 und dessen Länge = 2a + b. Wie wir wissen, wird die Breite eines Rechtecks gefunden, wenn man seinen Quadratinhalt durch seine Länge dividirt. Die Länge unseres Rechtecks ist nun zwar nicht vollständig, doch nahezu bekannt. Denn da a = 20, so ist 2a = 2 . 20 oder 40. Es fehlt also zur ganzen Länge nur noch der Theil b, welcher der Breite gleich und daher noch unbekannt ist. Wir müssen daher jetzt eben so verfahren wie beim Dividiren überhaupt, wenn z. B. gesucht werden soll, wie oft 41, oder 42, oder 43 ꝛc. in 129 enthalten ist. Wir sehen von den Einern ab und suchen, wie oft 40 in 120 liegt.

40 in 120 liegt 3mal. Die Breite des Rechtecks oder b ist also = 3. Mithin ist die ganze Länge desselben = 40 + 3 oder 43, und sein Quadratinhalt = 3.43 oder 129; 129 von 129 geht auf. Die Wurzel von 529 oder die Seite a + b des ganzen Quadrats ist also 20 + 3 oder 23.

```
Beispiel 2.   √46|24 = 60 + 8 = 68
              3600
  2.60 = 120 | 1024
     8 . 128 | 1024
```

Erkl. Die Wurzel aus 46 (= 36 + 10) ist 6, aus 46.00 also 60 (= a) 60.60 = 3600 (= a^2); 3600 von 4624 bleibt 1024; das ist der Inhalt für das Rechteck, dessen Länge = 2a + b. Da a = 60, so ist 2a = 2.60 oder 120; 120 in 1020 oder 12 in 102 = 8 (= b); die ganze Länge des Rechtecks ist also 120 + 8 = 128, und der Inhalt desselben = 8.128 oder 1024. Geht auf. Die Wurzel aus 4624 ist also 60 + 8 oder 68.

Auf gleiche Weise wird die Wurzel gesucht von 625; 1296; 2025; 2916; 5184; 7569; 9604; dann wird zum kürzeren Verfahren übergegangen.

```
Beispiel 3.   √17|64 = 42
              16
     8. | 164
     82 | 164
```

Erkl. Die Wurzel aus 17 (oder 16 + 1) ist 4 (= a), eigentlich 40; 4.4 = 16 (eigentlich 40.40 = 1600 = a^2); 16 von 17 bleibt 1; dazu die folgende Klasse, macht für $2ab + b^2$ zusammen 164. Da a = 4, so ist 2a = 8 (eigentlich 80, was durch den Punkt angezeigt ist); 8 liegt in 16 (eigentlich 80 in 160) 2mal (= b). Diese 2 der 8 angehängt, macht 82. Das ist die ganze Länge des Rechtecks. 2.82 = 164. Die Wurzel aus 1764 ist also 42.

Beisp. 4. $\sqrt{11|90|25} = \overset{a\ \ b}{3\,4}\,5$ (a b c) — **Kürzer:** $\sqrt{11|90|25} = 345$

```
 √11|90|25 = 345            √11|90|25 = 345
  9                  Kürzer:  9
  6. |290                   64 |290
  64 |256                       256
  68. | 3425               685 |3425
  685 | 3425                    3425
```

Erkl. Die Quadratzahl hat 3 Klassen, die Wurzel also 3 Stellen. Man sucht zuerst die Wurzeltheile aus der ersten und zweiten Klasse, d. i. aus 1190, und sieht dabei von der folgenden Klasse ganz ab.

Die Wurzel aus 11 ist 3 (= a), eigentlich 30; 3 . 3 = 9 (eigentlich 30 . 30 = 900 = a^2); 9 von 11 bleibt 2; dazu die folgende Klasse, macht für $2ab + b^2$ zusammen 290. Ist a = 3 (30), so ist 2a = 6 (60); 6 liegt in 29 (nämlich 60 in 290) 4mal (= b). Diese 4 der 6 angehängt, macht 64; 4 . 64 = 256; 256 von 290 = 34; hiezu die letzte Klasse, gibt 3425.

Nun sieht man die zwei gefundenen Wurzeltheile a + b oder 34 wieder als ersten Theil, als a, an und bestimmt hiezu den zweiten Theil b (eigentlich c).

Also ist jetzt a = 34 (eigentlich 340); 2a = 2 . 34 oder 68 (eigentlich 2 . 340 oder 680: 68 in 342 (eigentlich 680 in 3420) = 5; diese 5 der 68 angehängt, gibt 685; 5 . 685 = 3425. Die Wurzel ist also 345.

Noch einige Beispiele.

```
 √51|84|00 = 720            √36|48|16 = 604
  49                          36
 142|284                      12.  |4816
     284                      1204 |4816
     ---
      00
```

```
 √55|77|10|24 = 7468
  49
 144 | 677
       576
 1486| 10110
        8916
 14928| 119424
        119424
```

Die Wurzel aus 55 ist 7; 7 . 7 od. 49 von 55 ab, läßt 6; dazu die nächste Kl., macht 677; a = 7, 2a = 14; 14 in 67 liegt 4mal; 4 . 144 = 576, von 677 ab, läßt 101; dazu die nächste Kl., gibt 10110; a = 74, 2a = 148; 148 in 1011 liegt 6mal; 6 . 1486 = 8916, abgezogen, läßt 1194; dazu die letzte Kl., ist 119424; a = 746, 2a = 1492; 1492 in 11942 liegt 8mal; 8 . 14928 = 119424, geht auf. Also ist die Wurzel aus 55771024 = 7468.

Aufgaben:

$\sqrt{591361}$	$\sqrt{1841449}$	$\sqrt{25725184}$
$\sqrt{651249}$	$\sqrt{5499025}$	$\sqrt{12809241}$
$\sqrt{921600}$	$\sqrt{55696369}$	$\sqrt{41319184}$
$\sqrt{300304}$	$\sqrt{73444900}$	$\sqrt{79834225}$
$\sqrt{427716}$	$\sqrt{23097636}$	$\sqrt{97930816}$

5) Das Ausziehen der Wurzel aus Decimalbrüchen.

$0{,}1^2 = 0{,}01$	$0{,}01^2 = 0{,}0001$	$0{,}001^2 = 0{,}000001$
$0{,}3^2 = 0{,}09$	$0{,}09^2 = 0{,}0081$	$0{,}008^2 = 0{,}000064$
$0{,}4^2 = 0{,}16$	$0{,}25^2 = 0{,}0625$	$0{,}012^2 = 0{,}000144$
$0{,}9^2 = 0{,}81$	$0{,}99^2 = 0{,}9801$	$0{,}999^2 = 0{,}998001$

Hiernach sind die Quadratzahlen der Zehntel **Hundertel**, die der Hundertel **Zehntausendtel** und die der Tausendtel **Milliontel**. **Die Quadratzahl eines Decimalbruchs hat also immer doppelt so viel Stellen, als dieser.** Darum ist auch der Decimalbruch, aus dem die Wurzel zu ziehen ist, in Klassen zu 2 Stellen abzutheilen. Fehlt eine Stelle, so wird eine Null, oder, wenn der Bruch ein periodischer ist, die treffende Stelle der Periode beigefügt. Das Verfahren bei dem Ausziehen der Wurzel ist das bisherige.

$\sqrt{0,12 \mid 96} = 0,36$

```
   9
66 | 396
     396
```

Die Wurzel aus 0 Ganzen = 0; die Wurzel aus 12 (Hunderteln) = 3 (Zehntel); das Quadrat derselben ab, läßt 3 (Hundertel). Dazu die nächste Klasse, macht 396 (Zehntausendtel). a = 3 (nämlich 30); also ist 2a = 6 (60); 6 in 39 (60 in 390) = 6; 6 . 66 = 396. Geht auf; also ꝛc.

$\sqrt{0,01 \mid 51 \mid 29} = 0,123$

```
    1
22 | 51
     44
243 | 729
      729
```

$\sqrt{0,00 \mid 75 \mid 69} = 0,087$

```
     64
167 | 1169
      1169
```

Die Wurzel aus 0 Ganzen = 0 Ganze, und die Wurzel aus 00 Hunderteln = 0 Zehntel ꝛc.

$\sqrt{54,24 \mid 32 \mid 25} = 7,365$

```
      49
143 | 524
      429
1466 | 9532
       8796
14725 | 73625
        73625
```

$\sqrt{7 \mid 19,84 \mid 89} = 26,83$

```
     4
46 | 319
     276
528 | 4384
      4224
5363 | 16089
       16089
```

In den 2 letzten Beispielen, wo mit den Decimalen **ganze** Zahlen verbunden sind, wurde die Wurzel erst aus diesen bestimmt und zu dem Reste hievon die Klasse der Zehntel und Hundertel herunter geführt.

Aus dem letzten Beispiele ist auch zu ersehen, daß die Abtheilung in Klassen **vom Decimalkomma aus** geschieht, bei den ganzen Zahlen von rechts nach links, bei den Decimalen von links nach rechts.

6) Das Ausz. der Wurzel aus nicht vollkommenen (od. Irrational-) Zahlen.

$\sqrt{7} = ?$ Da 7 = 7,0000 . . ., so ist die $\sqrt{7}$ =

$\sqrt{7,00 \mid 00 \mid 00} = 2,645 \ldots$ Oder: $\sqrt{7} = 2,645 \ldots$

```
     4
46 | 300
     276
524 | 2400
      2096
5285 | 30400
       26425
        3975
```

```
     4
46 | 300
     276
524 | 2400
      2096
5285 | 30400
       26425
        3975
```

Hierbei geht es nie auf. Die Wurzel läßt sich daher auch nicht ganz genau bestimmen. Sie wird aber um so vollständiger, je länger man die Operation fortsetzt. Mithin kommt es darauf an, welcher Grad von Genauigkeit erreicht werden will. In den gewöhnlichen Fällen wird es genügen, die Wurzel auf 2 oder höchstens 3 Decimalstellen zu bestimmen.

$\sqrt{0,24} = 0,489\ldots$ (nahe 0,49.)	$\sqrt{48,50} = 6,96\ldots$
16	36
88 | 800	129 | 1250
704	1161
969 | 9600	1386 | 8900
8721	8316
879	584

7) Das Ausziehen der Wurzel aus gemeinen Brüchen.

Da $^2/_3 \cdot {}^2/_3 = {}^4/_9$, so wird ein gemeiner Bruch in sein Quadrat erhoben, indem man sowohl den Zähler, als den Nenner mit sich selbst multiplicirt. Und da umgekehrt $\sqrt{^4/_9} = {}^2/_3$, so folgt, daß aus einem gemeinen Bruche die Wurzel gefunden wird, indem man diese sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner desselben zieht.

$\sqrt{^{16}/_{25}} = {}^4/_5$. $\sqrt{6^1/_4} = \sqrt{^{25}/_4} = {}^5/_2 = 2^1/_2$.

$\sqrt{^{36}/_{49}} = {}^6/_7$. $\sqrt{3^6/_{25}} = \sqrt{^{81}/_{25}} = {}^9/_5 = 1^4/_5$.

Sind Zähler und Nenner nicht vollkommene Quadratzahlen, so verwandelt man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und sucht aus diesem die Wurzel. $^{27}/_{32} = 0,84375$; also ist $\sqrt{^{27}/_{32}} = \sqrt{0,84|37\,50} = 0,918\ldots$

IV. Die Kubikzahlen und ihre Wurzeln.

1) Eine Kubikzahl ist das Produkt aus drei gleichen Faktoren. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, die Kubikzahl von 2 ist 8. Umgekehrt ist $\sqrt[3]{8} = 2$, d. i. die Kubikwurzel von 8 ist 2.

Der Name Kubikzahl kommt daher, weil sich die Menge der Einheiten einer solchen Zahl in Würfelform darstellen läßt, oder auch, weil der Rauminhalt eines Kubus gefunden wird, wenn man die Größe einer Kante desselben 3mal als Faktor setzt und das Produkt hieraus sucht.

2)	$1^3 = 1$	$5^3 = 125$	$10^3 = 1.000$	$100^3 = 1.000000$
	$2^3 = 8$	$6^3 = 216$	$20^3 = 8.000$	$200^3 = 8.000000$
	$3^3 = 27$	$7^3 = 343$	$30^3 = 27.000$	$300^3 = 27.000000$
	$4^3 = 64$	$8^3 = 512$	$40^3 = 64.000$	$400^3 = 64.000000$
		$9^3 = 729$	u. s. w.	u. s. w.

Die Kubikzahlen der Grundzahlen 1 bis 9 werden vollständig eingeprägt. Die Kubikzahlen der reinen Zehner aber betragen eben so viele Tausender und die der Hunderter eben so viele Millionen, als jene Einer.

3) Nun suchen wir, welche Bestandtheile der Kubus einer zweitheiligen Grundzahl hat. $24 = 20 + 4$; also ist $24^3 = (20 + 4).(20 + 4).(20 + 4)$.

$$\begin{array}{l}
\quad 20 + 4 \\
\times\ 20 + 4 \\
\hline
\quad 20 . 20 + 20 . 4 + 20 . 4 + 4 . 4 \text{ (Quadrat)} \\
\times\ 20 + 4 \\
\quad 20.20.20 + 20 . 20 . 4 \\
\hline
\qquad\qquad + 20 . 20 . 4 + 20 . 4 . 4 \\
\qquad\qquad + 20 . 20 . 4 + 20 . 4 . 4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 20 . 4 . 4 + 4 . 4 . 4 \\
\hline
\quad 20.20.20 + 3(20.20.4) + 3(20.4 . 4) + 4 . 4 . 4
\end{array}$$

$= 20^3 + 3\ (20^2 . 4) + 3\ (20 . 4^2) + 4^3$; dieß ist, wenn man den 1. Theil durch a und den 2. durch b bezeichnet,

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Das ist die Formel für das Ausziehen der Kubikwurzel. Sie zeigt, daß der Kubus einer zweitheiligen Zahl besteht

a. aus der Kubikzahl des ersten Theils,
b. aus der 3fachen Quadratzahl des ersten Theils multiplicirt durch den zweiten Theil,
c. aus der 3fachen Quadratzahl des zweiten Theils multiplicirt durch den ersten Theil, und
d. aus der Kubikzahl des zweiten Theils.

4) $1^3 = 1$ $\quad 10^3 = 1.000$ $\quad 100^3 = 1.000.000$
$4^3 = 64$ $\quad 43^3 = 79.507$ $\quad 432^3 = 80.621.568$
$9^3 = 729$ $\quad 99^9 = 970.299$ $\quad 999^3 = 997.002.999$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Kubikzahlen der einstelligen Grundzahlen höchstens 3stellig, die der zweistelligen Grundzahlen höchstens 6stellig und die der dreistelligen Grundzahlen höchstens 9stellig sind. Und hierauf gründet sich für das Ausziehen der Kubikwurzel die Abtheilung der gegebenen Zahl von rechts nach links in Klassen zu 3 Stellen.

5) Das Ausziehen der Wurzel aus vollkommenen Kubikzahlen.

$$\sqrt[3]{39|304} = \underset{a}{30} + \underset{b}{4} = 34$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = 30^3 = & 27000 \\
3a^2 = 3 . 30^2 = 2700 & \boxed{12304}\ 4 \\
3a^2b = 3 . 30^2 . 4 = & 10800 \\
3ab^2 = 3 . 30 . 4^2 = & 1440 \\
b^3 = 4^3 = & 64 \\
\hline
& 12304
\end{array}$$

Die Wurzel aus 39 (oder 27 + 12) ist 3, aus 39000 also 30; $30^3 = 27000$; dieß abgezogen, läßt 12304. Ist $a = 30$, so ist $a^2 = 30^2$ und $3a^2 = 3 . 30^2$ oder 2700. Um b zu finden, wird gesucht, wie oft 2700 in 12304 enthalten ist. Geht 4mal; $b = 4$. Demnach ist $3a^2b = 3 . 30^2 . 4$ oder 108000, $3ab^2 = 3 . 30 . 4^2$ oder 1440 und $b^3 = 4^3$ oder 64, zusammen 12304. Dieß von 12304 ab, geht auf. Die Wurzel ist also 30 + 4 oder 34.

$$\sqrt[3]{421|875} = 70 + 5 = 75$$
$$70^3 = 343$$
$$3 . 70^2 \,|78\,875|\; 5$$
$$3 . 70^2 . 5 = 73\,500$$
$$3 . 70 . 5^2 = 5\,250$$
$$5^3 = 125$$
$$\overline{78\,875}$$

$$\sqrt[3]{80|621|568} = \overset{a\;b}{4\;3}\;2 \quad (\text{a b})$$
$$a^3 = 4^3 = 64$$
$$3a^2 = 3 . 40^2 \,|16\,621|\; 3$$
$$3a^2b = 3 . 40^2 . 3 = 14\,400$$
$$3ab^2 = 3 . 40 . 3^2 = 1080$$
$$b^3 = 3^3 = 27$$
$$\overline{15\,507}$$
$$3a^2 = 3 . 430^2 \,|1114568|\; 2$$
$$3a^2b = 3 . 430^2 . 2 = 1\,109400$$
$$3ab^2 = 3 . 430 . 2^2 = 5160$$
$$b^3 = 2^3 = 8$$
$$\overline{1114568}$$

Die Kubikwurzel aus 80 ist 4; also ist $a^3 = 4^3 = 64$; 64 von 80 bleibt 16, dazu die nächste Klasse, macht 16621, und dieß ist für $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Da $a = 40$, so ist $a^2 = 1600$ und $3a^2 = 4800$; 4800 ist in 16621 3mal enthalten; $b = 3$. Demnach ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 15507$. Dieß von 16621 ab, läßt 1114, dazu die nächste Klasse, macht 1114568.

Wie beim Ausziehen der Quadratwurzel, wenn diese dreitheilig ist, so betrachten wir auch hier nun a + b als a. Mithin ist $a = 430$, $a^2 = 430^2$, und $3a^2 = 3 . 430^2 = 554700$, welche Zahl in 1114568 nur 2mal liegt; $b = 2$. Demnach ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1114568$. Geht auf. Die Wurzel ist also 432.

$$\sqrt[3]{373|248|000} = 720.$$
$$7^3 = 343$$
$$3 . 70^2 \,|30\,248|\; 2$$
$$3 . 70^2 . 2 = 29\,400$$
$$3 . 70 . 2^2 = 840$$
$$2^3 = 8$$
$$\overline{30\,248}$$
$$\overline{000}$$

$$\sqrt[3]{220|348|864} = 604$$
$$6^3 = 216$$
$$3 . 60^2 \,|4348|0$$
$$3 . 600^2 \,|4348\,864|\; 4$$
$$3 . 600^2 . 4 = 4320\,000$$
$$3 . 600 . 4^2 = 28\,800$$
$$4^3 = 64$$
$$\overline{4348\,864}$$

6) Das Ausziehen der Wurzel aus Decimalbrüchen.

$0{,}9^3 = 0{,}729$, $0{,}99^3 = 0{,}970299$ und $0{,}999^3 = 0{,}997002999$;

Die Kubikzahl eines Decimalbruchs hat also 3mal so viel Stellen, als die Grundzahl; deßhalb muß man sie von links nach rechts in Klassen zu 3 Stellen abtheilen.

$\sqrt[3]{0{,}262|144} = 0{,}64$
262
$60^3 = 216$
$3 . 60^2 \mid 46144 \mid 4$
$3 . 60^2 . 4 = 43200$
$3 . 60^2 . 4^2 = 2880$
$4^3 = 64$
46144

$\sqrt[3]{103{,}823} = 4{,}7$
$4^3 = 64$
$3 . 40^2 \mid 39823 \mid 7$
$3 . 40^2 . 7 = 33600$
$3 . 40 . 7^2 = 5880$
$7^3 = 343$
39823

7) Das Ausziehen der Wurzel aus Irrational-Zahlen.

$\sqrt[3]{12} = 2{,}28 \ldots$
$2^3 = 8$
$3 . 20^2 \mid 4000 \mid 2$
$3 . 20^2 . 2 = 2400$
$3 . 20 . 2^2 = 240$
$2^3 = 8$
2648
$3 . 220^2 \mid 1352000 \mid 8$
$3 . 220^2 . 8 = 1161600$
$3 . 220 . 8^2 = 42240$
$8^3 = 512$
1204352
147648

Aufgaben:

$\sqrt[3]{830584}$. $\sqrt[3]{571787}$.
$\sqrt[3]{438976}$. $\sqrt[3]{300763}$.
$\sqrt[3]{1481544}$.
$\sqrt[3]{758550528}$.
$\sqrt[3]{669921875}$.
$\sqrt[3]{17596287801}$.
$\sqrt[3]{567869252041}$.
$\sqrt[3]{151334226289}$.

V. Von dem Grundsteuerkataster.

Eine in Bayern im zweiten Viertel dieses Jahrhunderts durchgeführte sehr vortreffliche Einrichtung ist die Art und Weise, wie die Grundsteuer berechnet wird. Dieselbe ist nämlich nicht nur von der Größe eines Grundstückes, sondern zugleich auch von dessen Bodengüte abhängig gemacht. Deßhalb wurde das ganze Land in allen seinen einzelnen Parzellen neu vermessen und die Bodengüte der einzelnen Lagen möglichst genau bestimmt.

Als Grundeinheit des Maßes ist das bayerische Tagwerk angenommen. Dasselbe ist 40000 Quadratfuß groß, und ist in allen Regierungsbezirken (mit Ausnahme von Unterfranken) in 100 Theile eingetheilt, welche kurzweg Decimale heißen. Unter einem Decimale versteht man also $^1/_{100}$ Tagwerk.

2 Tagwerke 45 Decimale also = 2,45 Tagwerk; 68 Decimale = 0,68 Tagwerk; 9 Decimale = 0,09 Tagwerk.

Ein solches Decimal = 400 Quadratfuß, das ist eine Fläche, 20 Fuß lang und breit, oder 40 Fuß lang und 10 Fuß breit.

In Unterfranken, wo schon eine größere Zertheilung der Grundstücke Platz gegriffen, ist das Tagwerk in 1000 Theile eingetheilt. Diese Theile heißen gleichfalls Decimale. Hier hat man sich also unter einem Decimal $^1/_{1000}$ von einem Tagwerk vorzustellen.

2 Tagw. 375 Decim. also = 2,375 Tagw.; 865 Decim. = 0,865 Tagw.; 70 Decim. = 0,070 Tgw.; 9 Dec. = 0,009 Tgw.

Ein Decimal dieser Art = 40 Quadratfuß, das ist eine Fläche von 10 Fuß Länge und 4 Fuß Breite.

Hinsichtlich der Bodengüte (Bonität) sind die einzelnen Grundstücke in Klassen gebracht, welche durch Ziffern bezeichnet werden. Je besser der Boden eines Feldes, desto höher seine Klassenziffer. Ein Grundstück mit der Klassenziffer 16 ist von doppelter Bodengüte als ein anderes mit der Klassenziffer 8.

Denken wir uns nun drei Aecker mit A, B, C bezeichnet.

A sei 2 Tagwerk groß und habe die Bodenklasse 8.
B sei 2 Tagwerk groß und habe die Bodenklasse 16.
C sei 4 Tagwerk groß und habe die Bodenklasse 16.

Die Aecker A und B sind von gleicher Größe; jeder derselben ist 2 Tagwerk groß. Hinsichtlich ihrer Bodengüte aber sind sie verschieden. Die Bodenklasse des B ist 2mal so hoch als die des A; B wird daher, unter gleichen übrigen Umständen, 2mal so vielmal ertragen als der Acker A.

Die Aecker B und C haben gleiche Bodengüte; beide liegen in der 16. Bonitätsklasse. C ist jedoch 2mal so groß als B. Der Ertrag und dadurch auch der Werth des C besteht daher in dem Doppelten von dem des B, folglich in dem Vierfachen von dem des A.

Dieß Ertrags- und Werths-Verhältniß der drei Grundstücke zu einander wird auf das Genaueste durch das Produkt aus der Flächengröße und der Klassenziffer ausgedrückt. Dasselbe ist

von A = 2 × 8 = **16**.
von B = 2 × 16 = **32** (= 2 × 16).
von C = 4 × 16 = **64** (= 2 × 32 = 4 × 16).

Darum heißt man die Zahlen 16, 32 und 64 „Verhältnißzahlen." Aus ihnen berechnet sich die Steuer. Die einfache Steuer — das Steuer-simplum — ist von A = 16 kr., von B = 32 kr., von C = 64 kr.

Wie vielmal die einfache Steuer jährlich zu erheben ist, wird durch die Staatsregierung mit Zuziehung der Stände des Reichs von 6 zu 6 Jahren bestimmt. Werden z. B. 2,8 Simpla gezahlt, so ist die Jahressteuer

von A = 2,8 × 16 kr. = 44,8 kr. = 44 kr. 6,4 hlr. = 44 kr. 6 hlr.
„ B = 2,8 × 32 kr. = 89,6 kr. = 89 kr. 4,6 hlr. = 89 kr. 5 hlr.
„ C = 2,8 × 64 kr. = 179,2 kr. = 179 kr. 1,6 hlr. = 179 kr. 2 hlr.

Der Lehrer nehme hierauf einige Steuerkatasterauszüge, welche jeder bayerische Unterthan für seinen Grundbesitz in Händen hat, ausführlich mit den Schülern durch, damit sie solche in ihrer Einrichtung kennen und die Vortrefflichkeit derselben würdigen lernen. Dann zeichne er Folgendes mit Weglassung der Verhältnißzahl und Steuer an die Wandtafel und gebe den Schülern auf, die hiefür leer gelassenen Rubriken auszufüllen.


Pl.-Nr.	Bezeichnung des steuerbaren Objekts.	Tagw.	Decim.	Bonitätsklasse.	Verhältnißzahl.	Einfache Steuergröße.		
						fl.	kr.	hl.
715	Hausleiten . . .	2	74	14	38,4	—	38	3
836	Morgarten . . .	0	96	13	12,5	—	12	4
1235	Eggerten . . .	3	25	15	48,8	—	48	6
894	Siegesthal . . .	1	08	12	13,0	—	13	—
456	Langenlohe . . .	4	79	17	81,4	1	21	3
579	Breitenfeld . . .	8	42	16	134,7	2	14	6
	Summe	21	24	—	328,8	5	28	6

Die Jahressteuer hievon = 2,8 × 328,8 kr. = 920,64 kr. Die $^4/_{100}$ werden weggeworfen. 920,6 kr. = 15 fl. 20 kr. 5 hlr.

Für Unterfranken.

Pl.-Nr.	Bezeichnung des steuerbaren Objekts.	Tagw.	Decim.	Bonitätsklasse.	Verhältnißzahl.	Einfache Steuergröße.		
						fl.	kr.	hl.
725	Hausleiten . . .	2	745	14	38,4	—	38	3
836	Morgarten . . .	0	964	13	12,5	—	12	4
1257	Eggerten	3	257	15	48,9	—	48	7
894	Siegesthal . . .	1	082	12	13,0	—	13	—
476	Langenlohe . . .	4	798	17	81,6	1	21	5
579	Breitenfeld . . .	8	420	16	134,7	2	14	6
	Summa	21	266	—	329,1	5	29	1

Die Jahressteuer = 2,8 × 329,1 kr. = 921,48 kr. = 921,5 kr. = 15 fl. 21 kr. 4 hlr.


Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
1/3
12
1/6
13
1/4
14
1/20
15
d c a e b f
16
c e d a f b
17
c d a b
18
c d a e b
19
b c g f a h d e
20
c a d b
21

[illegible]	[illegible]	3	[illegible]	15	134,7	2	14	6
	Summe	[illegible]	[illegible]	—	328,6	5	28	6

[illegible] = 2½ × 328,6 kr. = 820,64 kr. [illegible] = 13 fl. 20 kr. 5 [illegible]

Für [illegible]

Nr.	Bezeichnung der Einzelnen [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Einfache Steuergebühr fl.	kr.	[illegible]
735	Haagslacken	2	745	14	38,4	—	38	3
836	[illegible]	6	[illegible]	13	12,5	—	12	4
1257	[illegible]	3	[illegible]	15	45,[illegible]	—	[illegible]	7
894	[illegible]	3	892	12	18,0	—	13	—
176	[illegible]	4	795	17	81,6	1	21	5
579	Breitfeld	5	420	16	134,7	2	14	6
	Summe	24	[illegible]	—	329,1	5	29	1

[illegible] = 3 × 329,1 kr. = [illegible] = 981,5 kr.

Heuner, Johann F.

Lehrgang des Rechenunterrichtes in Volks-Schulen

Ansbach 1864